CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Del 10 al 14 de Julio

VIII

CIBEM

Madrid 2017

LIBRO DE ACTAS

*“Miramos con ilusión
hacia el futuro
de la educación matemática”*

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LIBRO DE ACTAS

Editado por:
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
C/ H. Carvajal, 5. 23740 Andújar (Jaén) España

www.fespm.es

ISBN: 978-84-945722-3-4

VIII CIBEM

Madrid 2017

CONGRESO
IBEROAMERICANO DE
EDUCACIÓN MATEMÁTICA

TALLERES

EXPLORANDO AS PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DAS CURVAS PLANAS PARAMETRIZADAS UTILIZANDO O GEOGEBRA

André Lúcio Grande
andreluciogrande@gmail.com
Faculdade de Tecnologia de Mauá (Fatec-Mauá) - Brasil

Núcleo Temático: V. Recursos para o ensino e aprendizagem das matemáticas
Modalidad: T
Nivel educativo: Formação e atualização docente
Palavras chave: Curvas Planas Parametrizadas, GeoGebra, Propriedades Geométricas, Intuição e Rigor.

Resumo

Esta oficina objetiva realizar um estudo das curvas planas parametrizadas utilizando o software GeoGebra, com o intuito de explorar quais são suas propriedades locais e globais bem como seus invariantes geométricos. Para a investigação de tais propriedades, foram elaboradas algumas questões sobre as concepções, classificação e características das curvas planas, que serão discutidas pelos participantes e respondidas em protocolos fornecidos durante a oficina, além da construção de algumas curvas utilizando o software GeoGebra, que permite manipular de maneira dinâmica e interativa as diversas representações dos objetos matemáticos. Como fundamentação teórica, serão utilizados alguns princípios e ideias ligadas ao uso e a importância da intuição e do rigor na construção do conhecimento matemático segundo Henri Poincaré (1854 – 1912), que defendia a intuição como uma ideia ou interpretação antecipada daquilo que se está procurando, constituindo-se de um sentimento que possibilita gerar hipóteses na constituição do conhecimento científico. Destacamos que o uso do GeoGebra permite explorar tanto propriedades locais quanto globais das curvas planas parametrizadas, auxiliando em grande medida na elaboração de conjecturas a respeito das propriedades do objeto matemático em questão e que durante a oficina serão formalizadas pelos participantes.

1. Propriedades Geométricas das Curvas Planas

O estudo das curvas planas parametrizadas possibilita explorar uma variedade de conceitos matemáticos, tais como: equações cartesianas e paramétricas, diferenciabilidade e continuidade de uma função, propriedades geométricas e topológicas de uma curva, dentre outros. Além disso, num curso de Cálculo Diferencial e Integral os professores podem em grande medida articular e relacionar de maneira interdisciplinar diversos componentes curriculares como Geometria Analítica, Álgebra Linear e Física.

ISBN 978-84-945722-3-4

Esse estudo abarca ainda a discussão sobre as diversas concepções de uma curva plana, sua classificação, representações (geométrica, algébrica, numérica), propriedades locais e globais, invariantes geométricos e topológicos, além da questão do uso de equações paramétricas.

Carmo (2012) considera que as propriedades locais de uma curva ou superfície são aquelas que não pertencem à forma do objeto geométrico em questão como um todo, mas somente pertencem às vizinhanças de um ponto desse objeto. Temos, por exemplo, a curvatura de uma curva como propriedade local das curvas e superfícies. A curvatura mede, intuitivamente, o quanto a curva se "dobra" no plano e se constitui o único invariante geométrico das mesmas, a menos sua posição no plano, de acordo com o Teorema Fundamental das Curvas Planas. Outra propriedade local das curvas diz respeito à mesma ser regular, ou seja, se em cada ponto da curva existe um vetor tangente bem definido.

Já as propriedades globais consideram o objeto geométrico na sua totalidade como, por exemplo, a dimensão de uma curva ou o fato da mesma ser aberta ou fechada. No caso das curvas fechadas, elas podem ser simples (sem auto intersecção) ou não simples (com auto intersecção).

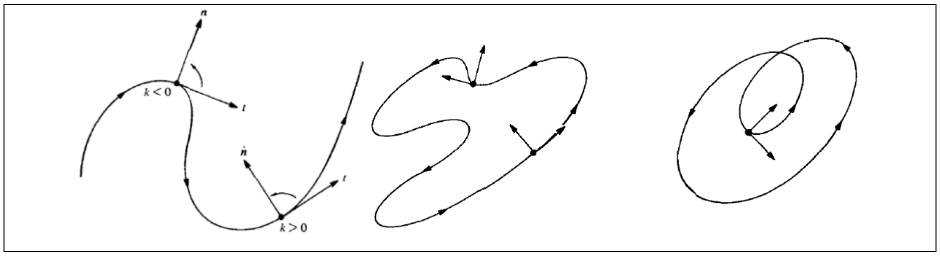


Figura 1 – Propriedades locais e globais das curvas
Fonte: Carmo, 2012 – pp. 25 e 36

Por seu turno, a exploração das propriedades geométricas das curvas planas, quer sejam locais ou globais, nos permitem evocar alguns aspectos ligados ao raciocínio intuitivo e visual, no sentido de se elaborar conjecturas, hipóteses, que serão posteriormente formalizadas ou refutadas, objetivando a construção do objeto matemático, o que se constitui uma prática extremamente pertinente e interessante no processo de ensino e aprendizagem.

Dessa forma, esta oficina tem por objetivo realizar um estudo das curvas planas parametrizadas procurado investigar quais são suas propriedades geométricas explorando o

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

raciocínio intuitivo e visual. Utilizaremos o software GeoGebra como recurso computacional auxiliar de maneira dinâmica na construção e elaboração de conjecturas e hipóteses. Para o desenvolvimento dessa oficina, descreveremos a seguir o referencial teórico que será utilizado e a metodologia empregada.

2. Fundamentação Teórica

Com relação ao papel do raciocínio intuitivo, o matemático e filosofo Henri Poincaré (1854 – 1912) apresentou em suas principais obras como O Valor da Ciência (1995) alguns temas que discutem o papel da intuição, da lógica e da hipótese na construção do conhecimento científico.

No tocante às características do raciocínio intuitivo, Poincaré (1995) destaca a intuição sensível ou geométrica, com o apelo aos sentidos e à imaginação e o uso de representações geométricas. Essa intuição, segundo o autor, não pode nos dar a certeza, entretanto ela possui a propriedade de instrumento da invenção do conhecimento matemático.

Entretanto, para o autor a intuição não se baseia apenas na imagem geométrica, mas também física. A analogia física, segundo Poincaré (1995), permite obter a solução que um matemático não poderia estabelecer pelo raciocínio dedutivo. Essa intuição portanto não pressente a solução, mas nos sugere o raciocínio necessário para encontrar uma solução.

Para que as conjecturas acerca do objeto de estudo sejam elaboradas, pode-se dispor do uso de um recurso didático auxiliar, como o uso do software GeoGebra, que possibilita, “concretizar” os objetos matemáticos em seu estudo, além da interatividade que suscita a exploração do raciocínio intuitivo.

3. Metodologia e Procedimentos Metodológicos

A oficina está dividido em duas sessões. Na primeira sessão, serão discutidas duas questões sobre as concepções e propriedades geométricas das curvas planas parametrizadas. Na segunda sessão, será proposta uma atividade referente ao estudo dessas propriedades utilizando o GeoGebra.

Para a primeira sessão, as questões respondidas pelos participantes serão norteadoras da exploração das propriedades geométricas das curvas planas nesta presente oficina.

Inicialmente, os participantes receberão o Protocolo 1 contendo duas questões que serão respondidas no início da sessão. Após as questões serem respondidas, será proposta a construção de uma curva denominada astróide utilizando o software GeoGebra, procurando-se formalizar alguns conceitos que foram intuídos e conjecturados durante a atividade.

No Protocolo 1, entregue aos participantes, a Questão 1 consiste em procurar definir uma curva plana. Podemos considerar as múltiplas concepções sobre esse objeto matemático e suas diversas abordagens, tais como:

- Geométrica: conjunto de pontos do plano ou um subconjunto do $\mathbb{R}^2$;
- Algébrica: aplicação de um intervalo aberto *I* contido em $\mathbb{R}$;
- Física: movimento contínuo de um ponto;
- Topológica: deformação contínua de um intervalo aberto *I* em $\mathbb{R}$.

Nessas concepções percebemos alguns aspectos ligados ao raciocínio intuitivo como, por exemplo, a analogia física da interpretação de uma curva com um movimento contínuo de um ponto, ou a intuição geométrica, como a deformação de um intervalo da reta. Essas analogias com objetos físicos ou representações geométricas se constituem como sendo uma intuição sensível tal como defendia Poincaré (1995).

A seguir, os participantes serão indagados na Questão 2 sobre quais as vantagens ou desvantagens e a importância da utilização de um parâmetro no estudo das curvas planas.

Para discutirmos essa questão, devemos lembrar que ao utilizarmos a representação de uma curva pela equação cartesiana $y = f(x)$ há uma restrição de que a curva só pode ser interceptada por qualquer reta paralela ao eixo das ordenadas em apenas um ponto.

A forma implícita $f(x, y) = 0$ envolvendo uma função de duas variáveis para a representação algébrica pode ser utilizada, mas para encontrarmos um ponto pertencente a curva devemos, por exemplo, substituir o valor numérico de x e encontrar o valor de y resolvendo a equação.

Destacamos a representação algébrica das curvas planas com o uso de um parâmetro como uma variável auxiliar. Sendo assim, uma curva plana parametrizável pode ser representada por duas funções de um parâmetro *t*, como por exemplo as expressões $x(t)$ e $y(t)$. Essa representação apresenta uma vantagem de que as coordenadas de um ponto da curva são dadas em função apenas de uma variável, auxiliando na descrição de curvas mais complexas.

ISBN 978-84-945722-3-4

As equações paramétricas de uma curva nos fornecem uma ideia intuitiva de que os pontos t pertencentes a um intervalo $I \in \mathbb{R}$ são transformados em pontos numa curva, sendo que o parâmetro t serve para distinguir os diferentes pontos de da curva.

4. Abordagens ou tratamentos de um objeto matemático com o GeoGebra

O estudo das curvas planas de maneira interativa e dinâmica utilizando o GeoGebra se constitui um exemplo de uma proposta de ensino e aprendizagem em que um objeto matemático pode ser abordado sob diferentes enfoques ou tratamentos.

O tratamento físico dado às curvas planas possibilita "visualizar" de maneira dinâmica, por meio de analogias físicas, uma curva como sendo o movimento contínuo de um ponto no plano. Essa intuição física não permite de maneira formal descrever o equacionar a curva, mas suscita a elaboração de conjecturas e hipóteses acerca do objeto de estudo.

Uma abordagem geométrica das curvas planas apresenta como principal característica explorar e relacionar algumas propriedades geométricas das mesmas, tais como sua curvatura.

Após esse levantamento, o estudo pode apresentar um viés algébrico ou analítico, em que ao se utilizar um sistema de coordenadas cartesianas, suas propriedades geométricas são formalizadas de modo algébrico no sentido de se obter as equações paramétricas da curva plana.

Como exemplo das várias representações ou tratamentos, mostraremos as etapas da construção da curva plana parametrizada denominada astróide, que será abordada na segunda parte dessa oficina.

5. Explorando as propriedades geométricas das curvas planas

No Protocolo 1, entregue aos participantes, a Questão 3 apresenta o seguinte enunciado:

03. Seja λ a circunferência de centro O e raio 1. Para todo ponto A de λ, associamos suas projeções ortogonais P e Q sobre os eixos O_x e O_y, respectivamente, e vamos designar por M a projeção ortogonal de A sobre a reta PQ. Determine o lugar geométrico L de M.

Esta construção será realizada no software GeoGebra, que permite de maneira interativa e dinâmica manipular os objetos matemáticos utilizando-se de suas diversas representações,

ISBN 978-84-945722-3-4

tais como a geométrica, algébrica e numérica. Essa curva também pode ser obtida, de maneira dinâmica, por um dado ponto *P* de uma circunferência que rola, sem escorregar, interiormente sobre outra circunferência, de raio igual ao quádruplo do da interior. No caso da questão 3, de acordo com os dados fornecidos, teremos a seguinte representação geométrica:

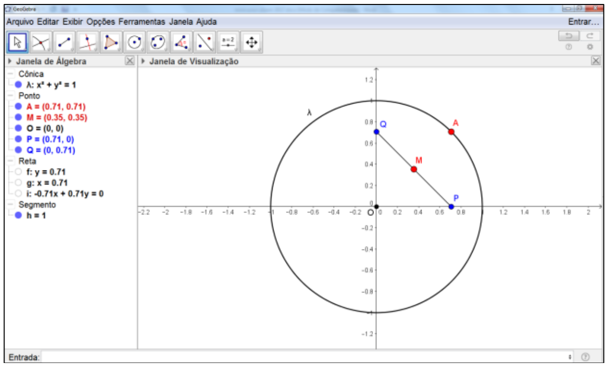


Figura 2 – Questão 3 – Representação Geométrica
Fonte: Autor, 2016

Movimentando-se o ponto A no GeoGebra ao longo da circunferência λ observamos a trajetória descrita por M, conforme a figura a seguir:

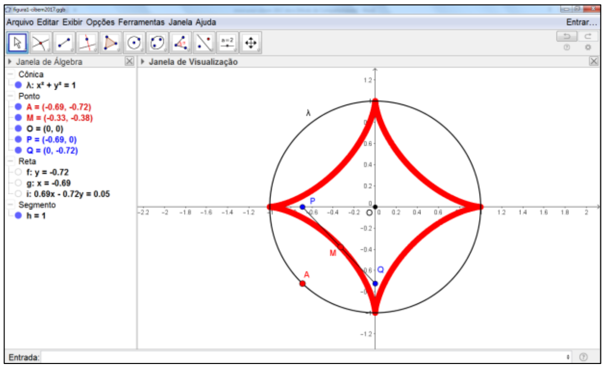


Figura 3 – Trajetória descrita pelo ponto M
Fonte: Autor, 2016

Essa curva, denominada astróide, possui algumas propriedades geométricas que podem ser conjecturadas, tais como: a reta que passa pelos pontos P e Q é tangente à curva no ponto M; os pontos em que a curva não é regular estão localizados nas coordenadas (1, 0), (0, 1), (-1,

ISBN 978-84-945722-3-4

0) e (0, -1). Sua curvatura é sempre negativa, adotando o sentido anti-horário de percurso do ponto A e podemos classificá-la como uma curva fechada, simples, periódica, apresentando simetria em relação ao eixos Ox e Oy. Para um tratamento algébrico da curva em questão, no sentido de formalizar as hipóteses e conjecturas, sendo $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ uma curva parametrizada pelo parâmetro *t* e *x(t) e y(t)* suas equações paramétricas, teremos:

- Condição de alinhamento dos pontos P, Q e M (figura 3), com $P = (cost, 0)$, $Q = (0, sent)$ e $A = (cost, sent)$: $\det(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PQ}) = 0$ (I)

- Ortogonalidade dos vetores $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{PQ}$: $\overrightarrow{AM}.\, \overrightarrow{PQ} = 0$ (II)

Resolvendo I e II, podemos representar as equações paramétricas da astróide da seguinte maneira:

$$\alpha(t) = \begin{cases} x(t) = cos^3 t \\ y(t) = sen^3 t \end{cases}, \text{ t} \in \mathbb{R}.$$

No GeoGebra, ao criarmos o parâmetro *t* $\in [0,2\pi]$ e as equações paramétricas $x(t) = cos^3 t$ e $y(t) = sen^3 t$, podemos definir a curva parametrizada $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ e o ponto $M \in \alpha(t)$ conforme a figura a seguir:

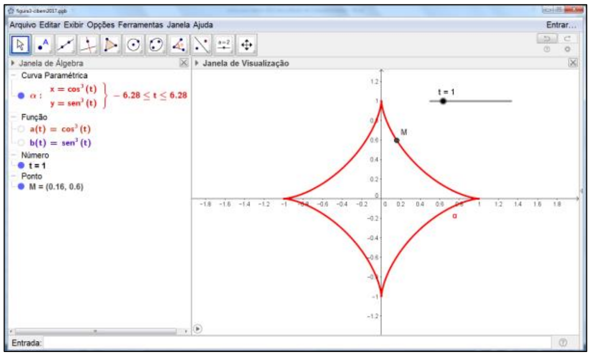


Figura 4 – Curva astróide
Fonte: Autor, 2016

A curvatura *k* da astróide pode ser estudada utilizando os recursos do GeoGebra de maneira dinâmica observando sua variação em relação ao parâmetro *t* pelo gráfico descrito pela ponto $C = (t, k)$:

ISBN 978-84-945722-3-4

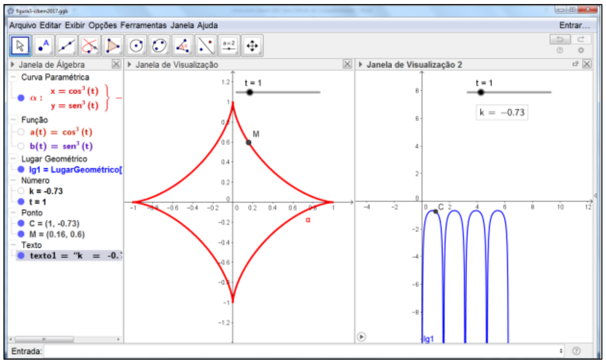


Figura 5 – Curvatura da astróide
Fonte: Autor, 2016

Destacamos que podemos obter as equações paramétricas da astróide utilizando outras técnicas algébricas e conceitos envolvidos, preferimos nessa oficina privilegiar o tratamento vetorial. Além disso, a por meio de suas equações paramétricas podemos obter sua equação implícita da forma: $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

Com isso, todas as propriedades geométricas da astróide conjecturadas no GeoGebra podem ser formalizadas por meio de suas equações paramétricas

6. Considerações Finais

Gostaríamos de destacar, de acordo com a nossa proposta, que o estudo das curvas planas parametrizadas com o auxílio do GeoGebra propiciou uma série de situações didáticas que podem ser exploradas pelos professores em sala de aula, permitindo aos estudantes de maneira dinâmica interagir com o objeto de estudo.

O GeoGebra permite ainda explorar tanto propriedades locais das curvas planas parametrizadas, como curvatura, se a mesma é regular, simetrias, utilização do parâmetro, auxiliando em grande medida na elaboração de conjecturas a respeito das propriedades do objeto matemático em questão e que durante a oficina serão formalizadas pelos participantes.

Além disso, podemos inferir que na construção do conhecimento matemático podemos envolver diversas abordagens ou tratamentos e suas inter-relações, como a algébrica, geométrica e analítica, além do uso da língua natural e analogias físicas.

ISBN 978-84-945722-3-4

Referências

Carmo, M. P. do (2012). *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies.* 5. Ed. Rio de Janeiro: SBM.

Courant, R. John, F. (2001). *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático*. Vol. I México: Limusa, 2001.

Grande, A. L. (2013). Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

Poincaré, H. (1995). *O valor da ciência*. Tradução de Maria Helena Franco Martins. Rio de Janeiro: Contraponto.

Terracher, P-H. et all. (1992). *Math: Algèbre e Géométrie. Terminales C et E*. Paris: Hachette.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-34

UNA MIRADA DIFERENTE DE LA GEOMETRÍA PARA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

Myrian Luz Ricaldi Echevarria- Isabel Zoraida Torres Céspedes
myrianluz@hotmail.com isabeltz50@hotmail.com
Colegio Peruano Británico. Universidad de Lima. APINEMA. Perú.

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Modalidad: T
Nivel educativo: Medio básico
Palabras clave: visualización, construcción, análisis, Situación didáctica.

Resumen

En el aprendizaje de la geometría a nivel escolar se debe enfatizar en el planteamiento de actividades de reflexión y análisis para promover el desarrollo de la competencia relacionada con la forma, el movimiento y la localización. Por ello, el presente taller tiene como objetivo desarrollar diversas actividades de conceptualización, visualización, construcción y descubrimiento que involucren el análisis crítico y el uso de recursos y materiales para el aprendizaje de la geometría.

El estudio planteó la siguiente pregunta de investigación: ¿En qué medida las situaciones problemáticas que propician un análisis crítico favorecen el desarrollo de la competencia matemática en geometría? Se tomó como marco teórico la teoría de situaciones didácticas de Brousseau.

El nuevo Diseño Curricular de Matemática propuesto en Perú el 2016 señala la competencia relacionada a la geometría: "Resuelve situaciones de forma, movimiento y localización". Para el logro de esta competencia se plantean el desarrollo de las siguientes capacidades:

- Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones: es construir un modelo que reproduzca las características de los objetos, su localización y movimiento, mediante formas geométricas, sus elementos y propiedades; la ubicación y transformaciones en el plano. Es también evaluar si el modelo cumple con las condiciones dadas en el problema.
- Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas: es comunicar su comprensión de las propiedades de las formas geométricas, sus transformaciones y la ubicación en un sistema de referencia; es también establecer relaciones entre estas formas, usando lenguaje geométrico y representaciones gráficas o simbólicas

ISBN 978-84-945722-3-4

- Usa estrategias y procedimientos para orientarse en el espacio: es seleccionar, adaptar, combinar o crear, una variedad de estrategias, procedimientos y recursos para construir formas geométricas, trazar rutas, medir o estimar distancias y superficies, y transformar las formas bidimensionales y tridimensionales.
- Argumenta afirmaciones sobre relaciones geométricas: es elaborar afirmaciones sobre las posibles relaciones entre los elementos y las propiedades de las formas geométricas; basado en su exploración o visualización. Asimismo, justificarlas, validarlas o refutarlas, basado en su experiencia, ejemplos o contraejemplos, y conocimientos sobre propiedades geométricas; usando el razonamiento inductivo o deductivo. (Currículo Nacional de Educación Básica, 2016).

En este marco, el presente taller tiene como objetivo desarrollar diversas actividades de conceptualización, visualización, construcción y descubrimiento que involucren el análisis crítico y el uso de recursos y materiales para el aprendizaje de la geometría. Además, se proponen como objetivos específicos los siguientes:

- Analizar actividades que involucren conceptualización, visualización, construcción y descubrimiento.
- Comunicar ideas y conceptos con respecto a nociones geométricas y sus características.
- Usar herramientas y recursos para la comprensión y construcción de conceptos geométricos.
- Identificar posibles dificultades en el aprendizaje de situaciones geométricas.
- Proponer orientaciones didácticas específicas para resolver situaciones geométricas.

En esta propuesta se analizará el sistema didáctico formado por el profesor, el saber y el alumno, tal como lo contempla la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (2000). Las situaciones didácticas son un conjunto de relaciones explícita o implícitamente establecidas entre uno o varios estudiantes, un entorno de aprendizaje (que puede incluir instrumentos de matemática) y un profesor reunidos con la finalidad de construir un conocimiento. Según Brousseau (2000), una situación didáctica es considerada como una situación problema que necesita una adaptación por parte del sujeto, una respuesta del alumno. En consecuencia, cuando se habla de una situación didáctica se refiere al conjunto de interrelaciones entre tres sujetos: profesor, estudiante y medio didáctico, donde se manifiesta directa o indirectamente

ISBN 978-84-945722-3-4

la voluntad de enseñar. Por otro lado, una situación es a-didáctica cuando el maestro logra que el alumno asuma el problema planteado como propio y empiece un proceso de búsqueda autónomo, es decir, sin la intervención del profesor. Toda situación didáctica debe tener como objetivo generar una situación a- didáctica.

La experiencia se desarrolló con docentes representantes de diversas unidades de gestión educativa de la ciudad de Lima durante los meses de verano del 2016. El tiempo dedicado a la ejecución de las situaciones didácticas fue aproximadamente de 1 mes con una frecuencia de 15 horas semanales. Las actividades consistieron en analizar, resolver y socializar diversas situaciones geométricas propuestas en el módulo 3 (Collanqui, P. Soto, J., & Gutiérrez, K., 2016). Los trabajos se desarrollaron en forma individual y grupal utilizando en cada caso papelógrafos, hojas de papel de diferentes colores (papel arco iris), tijeras y goma. Durante el desarrollo del taller se hizo evidente, tal como luego registran los propios participantes, el interés y la valoración positiva a las actividades propuestas, las mismas que consideraron pertinentes para ser reproducidas con sus alumnos en sus aulas de clase.

A continuación algunos ejemplos de actividades que se desarrollaran en el taller para trabajar las capacidades anteriormente mencionadas.

Actividad: Cubriendo el plano con mosaicos

El secreto para cubrir el plano con mosaicos sin superponerlos ni dejar huecos es partir de un polígono que tenga esa propiedad y transformarlo convenientemente.

Para ello, es preciso seguir las siguientes instrucciones:

1. Corte varios cuadrados de las mismas medidas.
2. Recorte una parte del cuadrado, considerando que el corte sea paralelo a la diagonal del cuadrado.
3. Desplace la figura recortada al lado opuesto al que fue cortada, de tal forma que uno de los lados de la figura recortada coincida con el vértice y con el lado del cuadrado de referencia.
4. Repita este proceso con el recorte en otra esquina del cuadrado, siguiendo las condiciones 2 y 3.
5. Una vez que haya obtenido una figura, utilícela como molde para copiarla en una hoja las veces que quiera de manera que las líneas de los bordes estén en contacto, es decir, sin dejar huecos y sin superposiciones.

ISBN 978-84-945722-3-4

Después de crear el teselado, puedes colorear cada figura para que parezcan pájaros, peces, gente o cualquier otra cosa imaginable.

Al finalizar la actividad se proponen algunas preguntas de reflexión y extensión, tales como:

¿Cuáles son las características de esta tarea? ¿A diferencia de la tarea anterior, qué requiere esta situación?

Recorta el cuadrado de diversas maneras de forma que puedas teselar el plano. A diferencia de la tarea anterior, ¿qué requiere esta situación?

Actividad: Visualizando polígonos con el libro de los espejos

A partir de dos espejos de las mismas medidas y una hoja de papel, realice los siguientes procedimientos:

Tarea 1:

Trazar una línea en una hoja de papel, y coloque encima los espejos. Abra y cierre los espejos y aparecerán diferentes polígonos.

Tarea 2:

Sitúe los espejos usando la línea, de forma que se obtenga un cuadrado. Aparecen dibujados dos ángulos: el ángulo A, que se denomina central, y el ángulo B, que se denomina interior. Podrá calcular fácilmente la suma de los cuatro ángulos centrales del cuadrado y, en consecuencia, el valor de cada uno de ellos. Complete, a continuación, la siguiente tabla:

Número de lados del polígono obtenido	4	5	6	7	8	9
Valor del ángulo central						
Valor del ángulo interior						

Tarea 3:

Considerando la línea y los espejos forma un triángulo. El triángulo que se forma es isósceles, ya que dos de sus lados (los que se forman con los espejos) son iguales; en consecuencia, los

ISBN 978-84-945722-3-4

ángulos opuestos también serán iguales. La suma de estos dos ángulos da justamente otro ángulo que aparece en la figura reflejada: ¿cuál es este?

Polígono	3	4	5	6	7	8
Medida de los dos ángulos iguales						
Medida del ángulo interior						

Para concluir la actividad se proponen algunas preguntas de discusión y extensión:

¿Cuál es la característica de esta actividad? ¿Qué capacidades es posible promover con esta actividad?

Referencias bibliográficas

Brousseau G. (2000). Educación y Didáctica de las matemáticas. En *Educación Matemática, 12(1)*, 5-38

Collanqui, P. Soto, J., & Gutiérrez, K. (2016). *Módulo 3: Aspectos didácticos curriculares*. Dirección Regional de Educación de Lima Metropolitana. Recuperado el 15 de noviembre de 2016 de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2017.pdf

MINEDU (2016). Currículo Nacional de Educación Básica.

CEDED. *Movimientos*: *Lugares geométricos.* Recuperado el 10 de abril de 2016 de http://descargas.pntic.mec.es/cedec/mat3_2/contenidos/M3_U7/lugares_geomtricos.html Consultado 08/09/2016

ISBN 978-84-945722-3-4

T-41

LA CAJA DE POLINOMIOS

Oscar Fernando Soto Ágreda – Saulo Mosquera López
fsoto@udenar.edu.co – samolo@udenar.edu.co
Universidad de Nariño – Colombia – Universidad de Nariño - Colombia

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.
Modalidad: T.
Nivel educativo: Medio o secundario; Formación y actualización docente
Palabras clave: Caja de Polinomios, algoritmos, enseñanza.

Resumen
La Caja de Polinomios es una herramienta didáctica resultado del trabajo colectivo de profesores, del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño, Colombia, y sus orígenes se remontan a los trabajos de Euclides, de Tabit ibn Qurra al-Harani, de Pierre de Fermat y Renato Descartes. Es un material didáctico con esencia lúdica que estimula varias esferas de la inteligencia, como la lógico matemática y la corporal cinestésica. Sumar, restar, multiplicar, dividir, factorizar polinomios, se convierten en algoritmos divertidos que plasman el conocimiento en saberes significativos y derivan en procedimientos de mayor riqueza que al tratarlos en forma tradicional. El propósito del taller consiste en, utilizar la versión virtual de la Caja de Polinomios, para motivar e ilustrar a los participantes en su uso como una alternativa de enseñanza para los procesos operatorios descritos anteriormente, así como reconocer que contribuye al desarrollo cognitivo, dinamizando los procesos de aprendizaje de las Matemáticas en diferentes grados de la Educación básica y que su aplicación depende de la creatividad docente, y su grado de interés en la planeación y desarrollo de estrategias sirviendo de mediador de los conceptos desde lo concreto hasta lo simbólico y lo puramente abstracto y formal.

Introducción.

La Caja de Polinomios, es una herramienta didáctica cuya construcción está apoyada en hombros de gigantes: Euclides, de quien de sus Elementos se toma la proposición 43 del libro I que dice: "*En cada paralelogramo los complementos de dos cualesquiera paralelogramos construidos alrededor de una diagonal del primer paralelogramo son iguales (equiextensos)*.", y que permite la construcción exacta de las fichas del juego. Tabit ibn Qurra el Harani apoya la construcción al proponer la idea de *homogeneización* que permite la representación de objetos de cualquier dimensión en el mundo bidimensional. El último

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

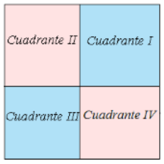
apoyo aparece con Descartes y Fermat, quienes desarrollaron la caracterización del plano cartesiano donde se conjugan los conceptos de espacio y tiempo para los objetos.

Este material didáctico permite desarrollar toda la operatoria algebraica con polinomios de una variable hasta de grado cuatro y dos variables hasta de grado dos en su versión tangible; en su versión digital, se presenta la operatoria con polinomios de una variable y hasta de grado tres. Algunos de los algoritmos que es posible tratar con la Caja de Polinomios y que se estudiarán en el desarrollo del taller son los siguientes: Sumar, restar, multiplicar, factorizar y dividir polinomios en una variable, así como sustituir variables.

El taller tiene como finalidad, capacitar a los participantes en la versión virtual de la caja de polinomios con el propósito de la construcción colaborativa de conocimiento para que esta herramienta pueda ser utilizada como un recurso adicional en el proceso enseñanza – aprendizaje. A continuación de disponen algunos ejemplos de cada una de las actividades que se ejecutarán en el taller.

Lectura y escritura de polinomios

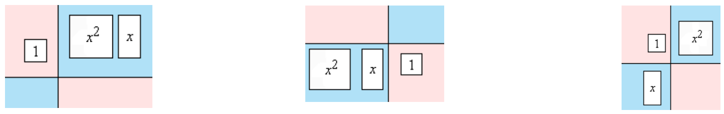
El contexto fundamental para utilizar *La Caja de Polinomios* es el plano cartesiano. Sus cuadrantes permiten escribir cualquier polinomio de coeficientes enteros, para ello, recordemos que el plano está dividido en cuatro cuadrantes.



En el primer cuadrante las coordenadas (x, y) de cada punto son positivas y en el tercer cuadrante las coordenadas son negativas, por tanto, las fichas de la *Caja* que se ubiquen en estos cuadrantes corresponden a términos positivos del polinomio. En el segundo cuadrante, las coordenadas de un punto (x, y) muestran que su abscisa x es negativa y su ordenada y positiva, mientras que en el cuarto cuadrante, la abscisa es positiva y la ordenada es negativa, de donde se deduce que las fichas ubicadas en estos cuadrantes representen términos

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

negativos del polinomio. En consideración a lo explicado, algunas de las representaciones posibles del polinomio x^2+x-1 se muestran enseguida.

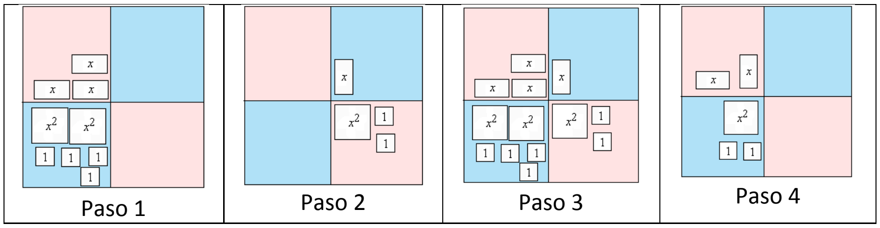


Adición de polinomios

Para calcular la suma de $p(x)$ y $q(x)$ es conveniente escribir el primer sumando $p(x)$ utilizando únicamente los cuadrantes SEGUNDO y TERCERO; el sumando $q(x)$ se escribe, en los cuadrantes PRIMERO y CUARTO. Sumar es sinónimo de AGREGAR, de modo que la suma se calcula leyendo el polinomio que queda escrito en TODO EL TABLERO (Plano Cartesiano). Recuerde que para leer un polinomio es aconsejable retirar del plano todos los CEROS que se produzcan, siendo cada cero todo par de fichas del mismo valor algebraico y cada ficha se ubica en un cuadrante de diferente color.

Ejemplo. Para efectuar la adición del polinomio $p(x)=2x^2-3x+4$ con $q(x)=-x^2+x-2$ se realizan los siguientes pasos.

1. Escribir el polinomio $p(x)=2x^2-3x+4$ en los cuadrantes segundo y tercero.
2. Escribir el polinomio $q(x)=-x^2+x-2$ en los cuadrantes primero y cuarto.
3. Retirar del plano, si las hubiere, los pares de fichas que equivalgan algebraicamente a cero; con lo que se obtiene lo que sigue.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

4. Leer el polinomio que queda escrito en TODO el tablero, tal y como se ve en el plano anterior; es decir, $x^2 - 2x + 2$. De esta forma se obtiene que $(2x^2 - 3x + 4) + (-x^2 + x - 2) = x^2 - 2x + 2$

Sustracción de polinomios

Para calcular la diferencia entre $p(x)$ y $q(x)$, $p(x) - q(x)$ se procede de manera similar al cálculo de sumas y de acuerdo a los siguientes pasos.

1. Escribir el minuendo $p(x)$ en los cuadrantes SEGUNDO y TERCERO.
2. Escribir el sustraendo $q(x)$ en los cuadrantes PRIMERO y CUARTO.
3. Dado que *restar* es sinónimo de *quitar*, las fichas ubicadas en el primer cuadrante correspondientes a $q(x)$ deben cambiarse de signo, lo que equivale a trasladarlas al segundo cuadrante, de igual forma se procede con las fichas ubicadas en el cuarto cuadrante que deben trasladarse al tercer cuadrante.
4. Retirar del tablero, los ceros que se hayan configurado.
5. La diferencia está constituida por las fichas que finalmente quedan en el tablero.

Ejemplo. Para calcular la diferencia entre $p(x) = 2x^2 - 3x + 2$ y $q(x) = x^2 - 2x + 1$, $p(x) - q(x)$ se realizan los siguientes pasos.

1. Escribir el polinomio $p(x) = 2x^2 - 3x + 2$ (minuendo) en los cuadrantes segundo y tercero.

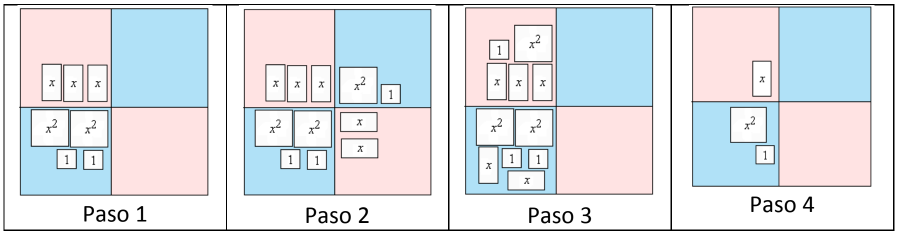
2. Escribir el polinomio $q(x) = x^2 - 2x + 1$ (sustraendo) en los cuadrantes primero y cuarto.

3. Trasladar las fichas del sustraendo; las del primer cuadrante al segundo y las del cuarto cuadrante al tercero.

4. Retirar del plano las fichas que representen ceros.

5. Leer el polinomio resultante, en este caso $p(x) - q(x) = x^2 - x + 1$.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



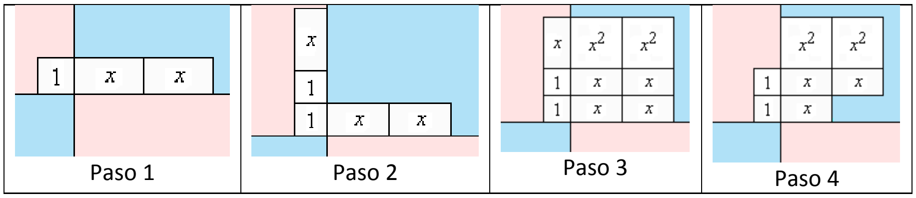
Multiplicación de polinomios de la forma $(ax+b)\cdot(cx+d)$

El plano cartesiano con sus ejes coordenados se constituye en una guía esencial para el cálculo de productos. El producto $p(x)\cdot q(x)$ corresponde al valor algebraico relativo de las fichas que configuran un rectángulo de base $p(x)$ y de altura $q(x)$ o viceversa. La lectura del producto se realiza, después de retirar los pares de fichas que algebraicamente equivalen a cero y que se ubican, para recordarlo, en cuadrantes de colores distintos, si es que los hubiere.

Ejemplo. El cálculo de productos de la forma $(ax+b)\cdot(cx+d)$ se ilustra con $(2x-1)(x+2)$.

1. Se toma como base el polinomio $p(x)=2x-1$, ubicando dicho polinomio a partir del origen y haciendo uso adecuado de los ejes coordenados, como se muestra en la siguiente figura.
2. Una vez hecho eso y utilizando la regla del juego de que fichas adyacentes deben tener la misma dimensión en su frontera común, se configura la altura del rectángulo cuya dimensión está dada por el factor $q(x)=x+2$.
3. Se arma completamente el rectángulo utilizando tantas fichas como sea necesario.
4. Finalmente se procede a retirar fichas que algebraicamente equivalen a cero; en este caso, un par de fichas rotuladas con x y se procede a leer la respuesta teniendo en cuenta la ubicación de las fichas en sus respectivos cuadrantes; el tablero se mira como sigue.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



Paso 1 Paso 2 Paso 3 Paso 4

Y en consecuencia se tiene que $(2x-1)(x+2)=2x^2+3x-2$.

División de polinomios

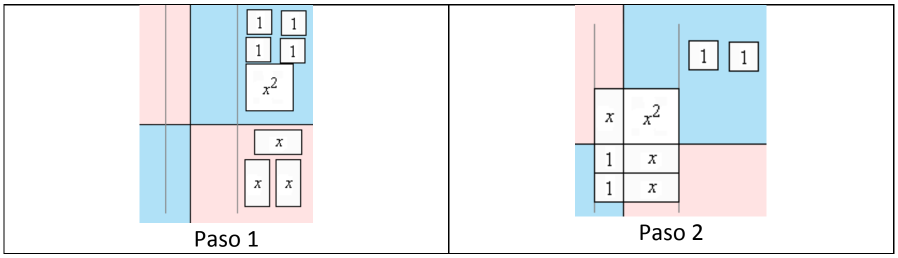
La división es sinónimo de distribuir y es lo que ocurre al calcular el cociente $p(x)\div q(x)$; en este caso se debe construir con el dividendo $p(x)$ un rectángulo de base $q(x)$ teniendo como recurso la agregación de pares de fichas que equivalen a cero. Si se efectúan divisiones del tipo $(ax^2+bx+c)\div(dx+e)$, el cociente es la altura del rectángulo, mientras que el residuo, si existe, está constituido por fichas que corresponden a polinomios de grado cero, El siguiente ejemplo ayuda a comprender la división de polinomios.

Ejemplo. Calcular el cociente y el residuo al efectuar $(x^2-3x+4)\div(x-1)$.

Paso 1. Escribir el polinomio dividendo x^2-3x+4 en el plano de *La Caja de Polinomios* y establecer sobre el plano unas guías imaginarias de anchura equivalente al divisor $x-1$ como se indica en la gráfica.

Paso 2. Ubicar las fichas que representan al polinomio sobre la banda imaginaria, teniendo en cuenta que se debe utilizar el menor número posible de pares de fichas que representen cero y respetando el color del cuadrante que les corresponde, es decir, el polinomio que se debe leer en el tablero, una vez efectuado el paso 2 se obliga a ser el dividendo $p(x)$, como se muestra a continuación.

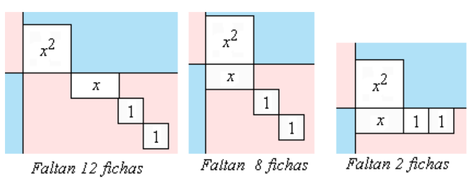
VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



En este ejemplo no hubo necesidad de agregar ceros, y es claro que el cociente es $x-2$ y el residuo es 2.

Factorización de polinomios

Factorizar un polinomio utilizando *La Caja de Polinomios* equivale a disponer una representación rectangular del mismo, siempre que esto sea posible. Para realizar esta tarea a veces es necesario la agregación de ceros. Para este efecto, se requiere disponer el menor número de fichas que representan al polinomio en cuestión, en un *encuadre minimal viable*. Un encuadre minimal, es aquella disposición de un polinomio $p(x)$ de forma que su transformación a rectángulo requiere del menor número de fichas (Ceros). En la siguiente gráfica se representan tres encuadres del polinomio $p(x)=x^2-x-2$; de los cuales el tercero corresponde a un encuadre minimal.



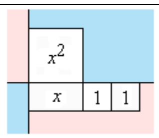
Un encuadre minimal viable es aquel encuadre minimal que requiere de un número par de fichas que equivalen algebraicamente a cero y que completan el rectángulo que representa al polinomio $p(x)$.

Ejemplo. En la siguiente gráfica se representan dos encuadres minimales de $p(x)=x^2-x-2$, el segundo de los cuales es viable, pues requiere de dos fichas x para

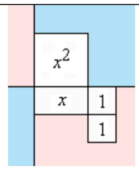
VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

completar el rectángulo, pero algebraicamente, la agregación de estas fichas equivale a sumar cero.

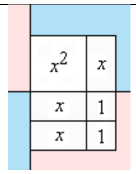
Al completar el rectángulo que representa al polinomio $p(x)$ a partir de un encuadre minimal viable, se ha factorizado; su factorización es el producto de las dimensiones de dos lados consecutivos del rectángulo; por ejemplo, a partir de la disposición minimal viable que representa a $p(x)=x^2-x-2$ se consigue la siguiente figura y puesto que las dimensiones de dos lados consecutivos de este rectángulo $x+1$ y $x-2$ se tiene que



Encuandre Minimal



Encuadre minimal viable



Factorización

$p(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$.

El significado didáctico de la caja de polinomios

El conocimiento matemático escolar, desde los niveles iniciales, se ha rodeado de conceptos desafortunados a su propia naturaleza, como un conocimiento excluyente e intimidatorio que solo está al alcance de unos pocos privilegiados y en cambio para muchos significa fracaso, frustración y ansiedad. Frente a este estado de cosas, los recursos para el trabajo en el aula de clase de matemáticas juegan un papel esencial para despertar sentimientos y actitudes positivas hacia las matemáticas, para desmitificarlas, y propiciar la participación y la integración y vencer los obstáculos emocionales responsables del aburrimiento, permitiendo ver que las matemáticas son una materia viva, llena de interés y útil dentro y fuera del aula.

La visualización o experimentación de imágenes visuales en secuencia llevan al estudiante a una comprensión profunda de los procesos matemáticos involucrados en una operación. Aquí resulta conveniente precisar que las operaciones constituyen un aspecto fundamental en la construcción y desarrollo de los conceptos matemáticos, y en esta toma de conciencia de la posibilidad de realizar operaciones, el sujeto desempeña un papel activo como es el caso de

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

La Caja de Polinomios en el que se hace un trabajo que va desde lo tangible, es decir, desde la manipulación, hasta el desarrollo operatorio simbólico que es el que finalmente interesa.

Referencias bibliográficas

Acevedo, D. & Folk de L., M. (1997). *Redescubriendo el Algebra: De la solución de ecuaciones al álgebra abstracta.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Boyer, C. (2004). *Historia de la Matemáticas*. Madrid, Alianza Editorial.

Guzmán, Miguel de. (1984). *Juegos Matemáticos en la Enseñanza*. En: http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/old/06juegomat/juegosmatensenanza/juemat.htm/ Consultado 21/07/2016.

Eves, H. (1965). *Estudio de las Geometrías,* tomo I. México. Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana.

Soto, F., Mosquera, S. & Gómez, C. (2005). *La Caja de Polinomios*. Matemáticas, Enseñanza Universitaria, 15, 83-97. Escuela Regional de Matemáticas. Universidad del Valle. Colombia.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-71

PROBLEMAS MATEMÁTICOS SIN RESOLVER QUE CUALQUIER NIÑO PUEDE ENTENDER

David Orden
david.orden@uah.es
Universidad de Alcalá, España

Modalidad: T
Nivel educativo: 7
Núcleo temático: IX. Comunicación y divulgación matemática
Palabras clave: problemas abiertos, investigación, docencia, aula

Resumen
Un lastre que incide en el rechazo a las matemáticas es su imagen de ser una ciencia inerte, sin nada por descubrir y limitada a unos pocos expertos. Este taller pretende demostrar que la investigación en matemáticas también puede acercarse al aula. Para ello se tratarán algunos problemas muy sencillos de entender (comprensibles a partir de los 6 años) que los investigadores matemáticos siguen intentando resolver. Se propondrá a los asistentes que jueguen con estos problemas, se explicará cómo resolver algunos casos y se mostrará la trayectoria histórica de cada problema.

1. Introducción

La percepción social de las matemáticas está fuertemente influenciada por las vivencias acumuladas en la etapa estudiantil. Los contenidos matemáticos de esta etapa son, en su casi totalidad, conocimientos con cientos de años de antigüedad, y esto contribuye a crear la imagen de que las matemáticas son una ciencia inerte. En esta imagen abunda, además, el hecho de que la investigación matemática se realiza, casi por completo, en centros especializados cuyos miembros mantienen un contacto exiguo o nulo con los docentes de etapas anteriores.

El principal objetivo de este taller es demostrar que, con una adecuada selección de los problemas, es factible acercar la investigación matemática a estudiantes desde los 6 años y sin límite de edad. Para ello se propondrán diversos problemas que los investigadores matemáticos aún no han conseguido resolver, pese a ser extremadamente sencillos de entender y manipular. Se propondrá a los asistentes que jueguen a intentar resolver estos

ISBN 978-84-945722-3-4

problemas y se explicará cómo resolver algunos casos. Asimismo, se mostrará la trayectoria histórica de cada problema, con el objetivo de tomar conciencia sobre el tiempo que ha llevado desarrollar y asentar aquellos conocimientos antiguos que se tratan en la etapa estudiantil.

2. El problema del plegado de sellos (de cómo no tenemos fórmulas para todo)

Uno de los lugares comunes en las matemáticas pre-universitarias, cada vez más frecuente también en la universidad, es la reducción de las matemáticas a una sucesión de recetas y fórmulas (Houssart, 2002; Mora, 2003). Con este ejemplo se pretende mostrar que hay problemas sencillos para los que no se conoce una fórmula.

Imagina que te dan una tira de tres sellos (Figura 1) y te piden que los dobles, por las líneas de unión, hasta apilarlos en una pila cuya base tenga el tamaño de un sello. ¿Cuántas maneras tienes de hacerlo?

Figura 1: Tira de tres sellos.

Fuente: [Wikimedia Commons File:B239 42b Stamp Day 1000.png]

Para unificar resultados, conviene aclarar que cada columna de sellos se identificará por una tripleta ordenada, de modo que la pila 1-2-3 es distinta de la pila 3-2-1. De este modo, no lleva mucho tiempo comprobar que hay exactamente seis maneras de plegar la tira de tres sellos, que se corresponden con las seis maneras posibles de ordenar los números {1,2,3} (Figura 2).

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

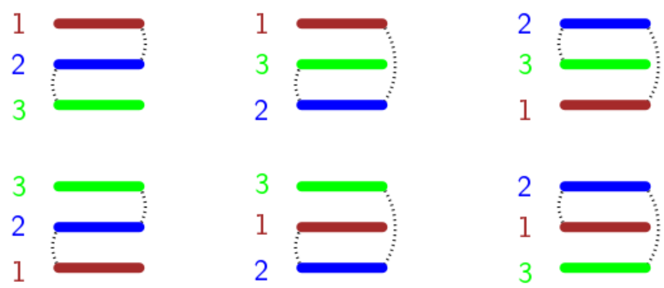


Figura 2: Las seis maneras de plegar una tira de tres sellos.

Para contar todas las posibles maneras de ordenar un conjunto de números {1,…,n} sí tenemos una fórmula, pues el resultado es el número factorial n! Como hemos avanzado que el del plegado de sellos es un problema para el que no se conoce fórmula, se intuye que nuestro problema no va a coincidir con el de la ordenación de un conjunto de números. Para comprobarlo, basta plantearse cuántas maneras hay de plegar una tira de cuatro sellos (Figura 3).

Figura 3: Tira de cuatro sellos.

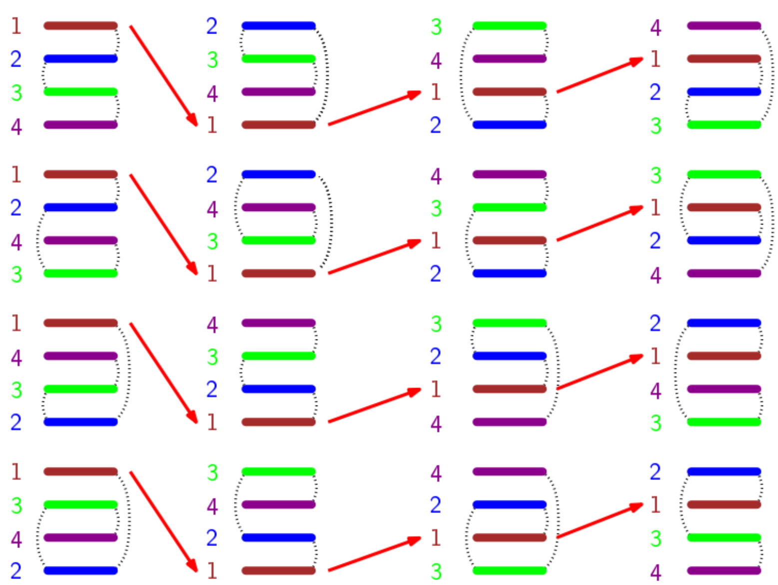
Fuente: Wikimedia Commons File:B239 42b Stamp Day 1000.png

Si este problema no coincide con el de ordenar el conjunto de números {1,2,3,4}, deberá haber alguna ordenación que no se pueda conseguir con la tira de sellos. Efectivamente, por ejemplo la ordenación 1-3-2-4 es imposible de conseguir doblando la tira de sellos. Por ello, el número de maneras de doblar una tira de cuatro sellos será inferior a 4!=24, pero ¿cómo estar seguros de que hemos encontrado todas las posibilidades?

Una buena estrategia es contar cuántos plegados hay con el sello número 1 en lo alto de la pila, y luego tratar de utilizar esta información para contar el número total de plegados. De este modo, podemos convencernos de que hay solo cuatro maneras de plegar la tira de sellos manteniendo en lo alto el sello número 1 y, moviendo ese sello número 1 a cada una de las otras tres posibles posiciones, obtenemos un total de 16 posibles plegados (Figura 4).

Este "truco", que el lector o el asistente al taller habrán asimilado en unos pocos segundos, tardó mucho más en descubrirse en la historia de las matemáticas. Fue utilizado por Sainte-Laguë (1957) para, 66 años más tarde de que Édouard Lucas (1891) propusiera el problema, conseguir llegar a contar el número de plegados para una tira de diez sellos.

En la actualidad solo se conoce el número de plegados para tiras de hasta 45 sellos, que son 37384929247793935264200. La lista completa de plegados para cada número de sellos es la secuencia A000136 de (OEIS Foundation Inc., 2017). Puede consultarse más información sobre este problema en (Orden, 2014b).



ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 4: Posibles maneras de doblar una tira de cuatro sellos. En cada columna, el sello número 1 aparece en cada una de las cuatro posiciones posibles.

3. El problema de minimizar el número de cruces (de cómo lo que se tiene por cierto puede no serlo)

Imagina que tienes que diseñar el plano de una ciudad muy sencilla, en la que solo habrá casas y fábricas. Puedes colocarlas donde tú quieras y, una vez colocadas, tienes que unir cada casa con todas las fábricas mediante una carretera (el mercado laboral está complicado y los trabajadores no saben a cuál de las fábricas les mandarán ir cada día).

Los cruces de carreteras serán puntos peligrosos, donde los coches pueden chocar, así que para minimizar el peligro tendrás que intentar que el plano de tu ciudad tenga el menor número posible de cruces.

La Figura 5 muestra dos posibles planos para una ciudad con tres casas y dos fábricas, uno con tres cruces y otro sin ningún cruce. El siguiente paso será intentarlo para tres casas y tres fábricas.

Para este tipo de ciudad resulta imposible dibujar un plano como el que nos piden que no tenga ningún cruce (Kuratowski, 1930), algo que intuimos después de un rato dibujando posibilidades. Deberemos conformarnos con que nuestro dibujo tenga el menor número posible de cruces.

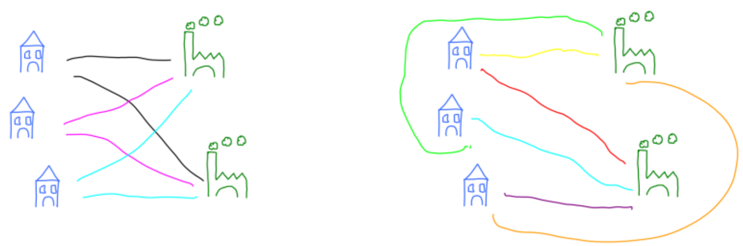


Figura 5: A la izquierda, un plano con tres cruces. A la derecha, un plano sin cruces.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Así podemos continuar para ciudades con cuatro casas y cuatro fábricas e incluso, si tenemos paciencia suficiente, para cinco casas y cinco fábricas. Lo interesante es que solo se conoce cómo dibujar el mejor plano para ciudades hasta ocho casas y ocho fábricas (Woodall, 1993). ¡No se conoce la manera de obtener el mínimo número de cruces para nueve casas y nueve fábricas!

Aún más interesante; todos los resultados que se conocen siguen una determinada fórmula (Zarankiewicz, 1955), pero a partir de los valores antes mencionados no se sabe si dicha fórmula sigue funcionando o no. Durante algún tiempo se dio por bueno que sí, hasta que se descubrió que la demostración de Zarankiewicz contenía errores (Guy, 1969). El lector interesado puede encontrar más información sobre este problema en (Orden, 2014a).

4. El problema de colocar cilindros que se toquen todos con todos (de cómo lo teórico puede tener utilidad)

El último de los problemas propuestos en este taller utiliza caramelos blandos con forma cilíndrica, por ejemplo los conocidos como Palotes. El objetivo es colocar cuantos más mejor, con la condición de que cada uno de ellos tiene que tocar a todos los demás, es decir, que se toquen todos con todos. La Figura 6 muestra un ejemplo con tres cilindros, en el que se puede comprobar que el verde toca al rojo y al naranja, el naranja toca al verde y al rojo, y el rojo toca al naranja y al verde.

Una vez visto que se puede hacer con tres, el objetivo será intentar hacerlo con cuatro, luego con cinco, y es de esperar que alguno de los asistentes lo consiga con seis o, incluso, con siete.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 6: Tres cilindros tocándose todos con todos.

Pero resulta que se desconoce si es posible para ocho cilindros, es decir, ¡no se sabe si se pueden colocar ocho cilindros de modo que todos se toquen con todos!

En esta versión inicial del problema no se ha puesto ninguna restricción, pero cabe plantearse el problema prohibiendo que los cilindros se toquen en sus extremos; por ejemplo, si los cilindros son infinitos y no tienen extremos. Esto es, los cilindros solo pueden tocarse en su parte intermedia, como en la Figura 6.

Para este problema, un poco más exigente, lo que se conoce también llega hasta solo siete cilindros (Bozóki et al., 2015). No se sabe si es posible colocar ocho cilindros infinitos tocándose todos con todos.

Lo más interesante de este problema es que está conectado con una interesante utilidad práctica, los materiales augéticos. Al estirar un material, lo habitual es que se estreche. Los materiales augéticos, por el contrario, se ensanchan al estirarlos. Un ejemplo de este tipo de materiales son las espumas Gore-Tex que se utilizan para impermeabilizar calzados y prendas de vestir, pero también aparecen en la naturaleza, por ejemplo en la piel de la ubre de la vaca.

La medida de cuánto adelgaza o engorda un material al estirarlo se llama coeficiente de Poisson, un número entre -1 y 0.5. Para una goma elástica (que adelgaza) ese coeficiente es positivo. Para un material augético (que engorda) ese coeficiente es negativo. Y resulta que las soluciones al problema de los cilindros infinitos son clave para conseguir una malla

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

metálica que alcance el coeficiente de Poisson -1, esto es, que se ensanche lo máximo posible al estirarla (Pikhitsa et al., 2009). Para más información, se recomienda leer (Orden, 2014c).

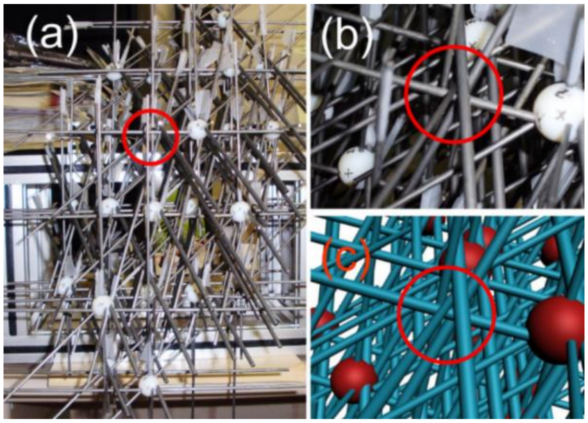


Figura 7: Malla augética Fuente: Pikhitsa et al., 2009.

5. Conclusiones

Este taller es una muestra de cómo es posible llevar la investigación matemática al aula. Existen múltiples problemas matemáticos que, pese a continuar abiertos, permiten ser explicados y manipulados por una audiencia muy extensa. Sería deseable potenciar y mejorar la comunicación entre investigadores y docentes de todas las etapas educativas, permitiendo que estos puedan motivar mejor a sus alumnos mediante ejemplos de matemáticas actuales y aplicadas, con un importante componente creativo y manipulativo. Por su parte, los investigadores mejoran de este modo sus habilidades comunicativas y, quizá más importante aún, proporcionan un servicio a la sociedad que los financia.

Referencias bibliográficas

ISBN 978-84-945722-3-4

Bozóki, S., Lee, T. L., & Rónyai, L. (2015). Seven mutually touching infinite cylinders. Computational Geometry, 48(2), 87-93.

Guy, R.K. (1969). The decline and fall of Zarankiewicz's theorem. In: Proof Techniques in Graph Theory (ed. F. Harary), New York: Academic Press, pages 63–69
Houssart, J. (2002). Simplification and repetition of mathematical tasks: a recipe for success or failure? The Journal of Mathematical Behavior, 21(2), 191-202. http://dx.doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00116-5

Kuratowski, C. (1930). Sur le probleme des courbes gauches en topologie. Fundamenta mathematicae, 15(1), 271-283.

Mora, C.D. (2003). Estrategias para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Revista de Pedagogía, 24(70), 181-272. Recuperado el 13 de diciembre de 2016 de http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0798-97922003000200002

OEIS Foundation Inc. (2017). The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences.
Sainte-Laguë, A. (1957). *Avec des nombres et des lignes*. Librairie Vuibert.

Orden, D. (2014a). El problema matemático que nació en un campo de trabajo de la Segunda Guerra Mundial. http://cifrasyteclas.com/el-problema-matematico-que-nacio-en-un-campo-de-trabajo-de-la-segunda-guerra-mundial/ Consultado el 18/01/2017.

Orden, D. (2014b). In how many ways can you fold a strip of stamps? http://mappingignorance.org/2014/07/07/many-ways-can-fold-strip-stamps/ Consultado el 18/01/2017.

Orden, D. (2014c). Dos acertijos de Gardner para trolear y una sorprendente utilidad. http://cifrasyteclas.com/dos-acertijos-de-gardner-para-trolear-y-una-sorprendente-utilidad/ Consultado el 18/01/2017.

Pikhitsa, P. V., Choi, M., Kim, H. J., & Ahn, S. H. (2009). Auxetic lattice of multipods. physica status solidi (b), 246(9), 2098-2101.

Woodall, D. R. (1993). Cyclic- order graphs and Zarankiewicz's crossing- number conjecture. Journal of Graph Theory, 17(6), 657-671.

Zarankiewicz, C. (1955). On a problem of P. Turán concerning graphs. Fundamenta Mathematicae, 41(1), 137-145.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-83

EL JUEGO Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Melissa Denisse Castillo Medrano
melissa94_87@hotmail.com – melissa.castillo@newton.edu.pe
Newton College - Perú

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizajes de las matemáticas
Modalidad: Taller
Nivel educativo: Medio o Secundario
Palabras clave: juego, resolución de problemas, pensamiento numérico, estrategia de aprendizaje.

Resumen

Este taller teórico-práctico ofrecerá diversos juegos que pueden ser usados en clase con diferentes finalidades como, por ejemplo, desarrollar el pensamiento numérico, evaluar los aprendizajes, desarrollar estrategias, entre otros. Los participantes trabajarán en grupos, a cada grupo se le asignará un juego y lo desarrollarán. Luego, todos los grupos en plenario expondrán el juego asignado así como sus reflexiones. Esta actividad finalmente será complementada con información adicional en donde se presentará la relación que existe entre el juego y la educación, entre el juego y la resolución de problemas según Polya, así como las ventajas y desventajas del juego. Los participantes podrán apreciar una variedad de juegos tanto físicos como virtuales. Asimismo, llegarán a la conclusión de que el juego tiene mucha similitud en su estructura con la resolución de problemas, que puede ser trabajado como una estrategia de aprendizaje para la Matemática, que se le puede dar diferentes usos según las necesidades del estudiante y del docente y que las ventajas dependerán del correcto uso que se le dé en el aula.

Son muchos los escolares que muestran un gran rechazo hacia las matemáticas pues sienten que es un curso aburrido, difícil, abstracto, tedioso y poco aplicable a la vida real. Esta percepción de los estudiantes, la mayoría de veces, se debe a la forma de trabajo del docente en el aula y a experiencias negativas del pasado. Una de las estrategias que podría revertir la situación inicial presentada es el juego pues gracias a él, el estudiante puede aprender de forma motivadora y divertida desarrollando un espíritu creativo, un pensamiento reflexivo y una actitud positiva hacia las matemáticas.

Es por tal motivo que el presente taller pretende dar a conocer las bondades del juego, su implicancia con la educación y su relación con la resolución de problemas. Asimismo, busca presentar las diferentes formas de uso que se le puede dar al juego, presentando ejemplos

ISBN 978-84-945722-3-4

tanto físicos como virtuales. La finalidad de este taller es poder enriquecer las estrategias didácticas de los docentes de Matemática de tal forma que los más beneficiados sean sus estudiantes al cambiar su percepción con respecto a la Matemática.

El taller está diseñado para 30 personas como máximo y es un taller basado en una metodología activa.

El juego y la educación

Según Calero (2003) el juego como elemento educativo, influye en: el desarrollo físico, el desenvolvimiento psicológico, la socialización y el desarrollo espiritual.

El juego es considerado el medio más importante para educar. Existe una estrecha relación entre ambos incluso desde su significado. El término *educación* viene del latín *educere*, que implica moverse, salir de, fluir. En esta línea, el juego debe constituir un soporte para el aprendizaje, tal y como lo afirman algunos autores como Ferrero: "El interés de los juegos en la educación no es sólo divertir, sino más bien extraer de sus enseñanzas materias suficientes para impartir un conocimiento, interesar y lograr que los escolares piensen con cierta motivación" (2004, p.11).

El juego y la resolución de problemas

Las fases de la resolución de problemas, propuestas por Polya, son similares a las de un juego como se puede observar en el siguiente cuadro comparativo:

	En un juego	En un problema
Comprender el problema	Comprender ¿En qué consiste el juego? ¿Cómo funcionan las diferentes partes del juego? ¿Cuáles son las reglas? ¿Qué tengo que hacer para ganar?	Comprender ¿Qué se pide en el problema? ¿Con qué datos cuento? ¿Qué pasos necesito para llegar a la respuesta? ¿Qué tengo que encontrar?
Concebir un plan	Se debe construir un plan de ataque concreto con las siguientes preguntas: ¿Conozco un juego parecido? ¿Por dónde puedo empezar? ¿Qué es lo más fácil? ¿Qué estrategias puedo usar?	Se debe construir un plan de solución con las siguientes preguntas: ¿Conozco algún problema parecido? ¿Por dónde puedo empezar? ¿Qué estrategias me sirven para llegar a la meta?

ISBN 978-84-945722-3-4

Ejecutar el plan	Se debe poner en práctica el plan concebido, hay que ver si funciona el plan de lo contrario que otro plan me podría servir.	Se debe examinar la validez de la conjetura, probar si funcionó mi plan y si no es así intentar por otros medios.
Examinar el plan	El juego no debe terminar con ganar, hay que mirarlo a fondo y aprovechar la solución para asimilar bien la experiencia. Analizar las astucias de las reglas, qué otro juego similar podría ganar y construir otros juegos.	Una vez que he resuelto el problema, debo hacerme varias preguntas: ¿Cuál es la estrategia general? ¿Qué otras estrategias podría usar? ¿Mi plan funcionaría con otros problemas? Modifico y creo mi propio problema.

Tabla 1. Relación entre el juego y la resolución de problemas.

Ventajas y desventajas del uso del juego

Algunas desventajas de los juegos son:

- Crea un espacio entre la imaginación y la realidad objetiva, lo que hace desarrollar actividades que no se llevarían a cabo.
- Es considerada por algunos como una actividad poco seria que fomenta el desorden y la bulla en el aula.
- Se puede jugar por jugar sin llegar a aprender nada.
- La matemática es más que un juego, es ciencia e instrumento de exploración.

Sin embargo, existen múltiples ventajas si es que se usa el juego de manera adecuada:

- Ayuda a adquirir altos niveles de destreza en el pensamiento matemático.
- Desarrolla la exploración, experimentación, investigación y descubrimiento.
- Sirve para enseñar y aclarar contenidos así como fortalecer procesos.
- Desarrolla habilidades concretas para el pensamiento estratégico, planificación y toma de decisiones.
- Permite que la clase sea motivadora, atractiva y que los alumnos sientan un gusto por las matemáticas.
- Ayuda a fortalecer la personalidad del estudiante, lo desbloquea emocionalmente y lo desinhibe para el trabajo.
- Baja el nivel de ansiedad, crece el interés y la concentración.

ISBN 978-84-945722-3-4

- Fortalece la autonomía del niño permitiéndole buscar formas de solución.
- Fomenta el trabajo en equipo y el desarrollo de la expresión oral pues los alumnos deben hablar, discutir, compartir para después explicar.

A ello sumamos que el solo hecho de incorporar un juego a la clase, hace que el clima del aula sea diferente. Guzmán (1984) lo reafirma cuando menciona que si los docentes cada día ofreciésemos a nuestros alumnos un elemento de diversión, incluso aunque no tuviese nada que ver con el contenido de nuestra enseñanza, el conjunto de la clase y las relaciones interpersonales con nuestros alumnos variarían de forma favorable.

Los juegos se pueden clasificar de diversas formas según su contenido, su finalidad, el medio, la metodología, etc. A continuación presentaré los tipos de juegos que se trabajarán en el taller, cada uno acompañado de un ejemplo:

Juegos para desarrollar el pensamiento numérico: Jugamos a decir 20

Este juego es adaptado de "La carrera a 20" de Brousseau (2007). Es un juego en parejas que consiste en llegar a decir veinte, agregando 1 o 2 al número que dijo la otra persona. El participante que inicia puede decir 1 o 2 y el otro participante continúa sumando 1 o 2 más. Objetivo: Ser el primero en decir 20.

JUGAMOS A DECIR 20

PARTIDA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	LLEGADA

Figura 1. Jugamos a decir 20.

Indicaciones:

- A cada pareja se le entrega el tablero y 2 botones de diferentes colores. Dependiendo de la edad también se puede hacer de manera mental.
- Se rigen para iniciar el juego.
- Se les da un tiempo para jueguen varias veces.
- Después de haber jugado varias partidas, el profesor hará preguntas para orientar el razonamiento de los estudiantes y ellos descubran quién gana el juego según los números seleccionados.

ISBN 978-84-945722-3-4

Preguntas a desarrollar:

- ¿Hay alguien que haya ganado varias veces? ¿Encontraste cuál era la forma de ganar?
- Si el jugador A coloca la ficha en el casillero 19 ¿Quién gana? Rpta: el jugador B
- Si el jugador A coloca la ficha en el casillero 18 ¿Quién gana? Rpta: el jugador B
- Si el jugador A coloca la ficha en el casillero 17 ¿Quién gana? Rpta: el jugador A
- Si ambos jugadores dominan el juego ¿Quién debe comenzar el juego para que "A" sea el ganador? Rpta: el jugador A.
- ¿Cuáles son los casilleros que obligatoriamente debe ocupar el jugador A para ganar? Rpta: 17, 14, 11, 8, 5, 2

Este juego fue aplicado con estudiantes 12 años y resultó bastante interesante ver cómo lograban obtener sus propias conclusiones a partir de la experiencia planteada. El trabajo en parejas favoreció al intercambio de ideas y el rol del docente fue de facilitador.

Juegos para evaluar los aprendizajes: Cranium matemático

Cranium matemático está basado en el juego original Cranium, un juego muy divertido que se juega en equipos y a los que se le pide resolver diferentes retos como modelar, actuar, resolver, dibujar y contestar preguntas sobre cultura general. Este juego de mesa fue llevado al aula mediante una gigantografía como se puede observar en los anexos, en donde los mismos estudiantes eran las fichas que se movilizaban por todo el tablero. Para su ejecución los estudiantes se formaron en grupos. Este juego fue creado con la finalidad de poner en práctica todos los conocimientos aprendidos en el año.

Objetivo: Ser el primer equipo en recorrer todo el tablero resolviendo correctamente los diferentes retos propuestos hasta llegar al final.

ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 2. Juego Cranium Matemático.

Reglas:

- Inicia el equipo en donde se encuentre el jugador cuya fecha de cumpleaños sea la más próxima.
- Se debe escoger 1 representante por equipo para que sea la ficha y lance el dado.
- Si el dado cae en un determinado color (rojo, amarillo, azul, verde), la ficha debe avanzar hacia el casillero de ese color, como se muestra en la figura 1, y el equipo deberá resolver el reto. Si resuelven correctamente vuelven a lanzar el dado hasta que pierdan.
- Si el dado cae en color negro el equipo pierde un turno. Si el dado cae en el color morado y el equipo responde correctamente la pregunta difícil, pueden tomar el atajo.

Este juego fue aplicado con estudiantes de 12 años. Las preguntas planteadas en este juego se muestran en el anexo. La aplicación de esta actividad permitió descubrir el gran potencial que ejerce el juego en los alumnos por las siguientes razones:

- Los alumnos lograron poner en práctica todo lo aprendido y autoevaluarse cuánto es lo que habían comprendido de los temas trabajados.
- Se logró que los alumnos se comunicaran matemáticamente haciendo uso de los términos aprendidos en clase.
- Se atendió a la gran mayoría de habilidades de los alumnos pues tenían opciones para dibujar, actuar, calcular, etc.

ISBN 978-84-945722-3-4

- Permitió que todos trabajaran de manera activa ya que al momento de darles los retos, todos (incluyendo aquellos alumnos que no solían participar en clase) intentaban resolver el reto.
- Promovió el trabajo en equipo, pues los alumnos debían trabajar cooperativamente, cada uno desde su rol aportaba en la consecución de la meta.

Juegos de mesa: Dominó matemático

Este juego es adaptado de Azcárate (s.f.) quien presenta fichas de dominó con el tema de potencias como se observa en la figura 3. Este juego se puede construir en hojas o cartulinas de colores, o en fichas de madera, etc. Se juega con las mismas reglas del clásico dominó.

Objetivo: liberarse de todas las fichas.

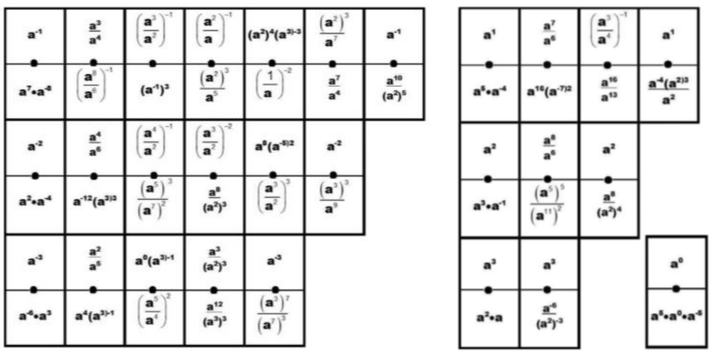


Figura 3. Fichas de dominó.

Indicaciones:

- Se reparten al azar seis fichas por participante.
- El jugador que encuentre un "doble" entre sus fichas inicia el juego.
- El siguiente jugador debe buscar entre sus fichas alguna que contenga en una de sus mitades una imagen relacionada con el "doble" ubicado al comienzo. Se continúa el juego de forma sucesiva. Cada jugador debe colocar solo una ficha en su turno.
- Si un jugador no posee ninguna ficha relacionada con una de las mitades de las fichas sobre la mesa, debe tomar una ficha del montón.
- Cuando se acaban las fichas del montón, si el último jugador que levantó no puede ubicarla, debe "pasar" su turno al siguiente jugador.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

- Gana el primer jugador que se libere de todas sus fichas.

Juegos virtuales: Kahoot!

Kahoot! es un juego muy divertido que puede ser utilizado en diferentes cursos y con diferentes edades. Es una página web en la que el docente al crear su cuenta puede elaborar diferentes juegos con preguntas de opción múltiple. Puede, además, añadir videos, imágenes y diagramas a sus preguntas.

Para la aplicación de este juego se necesita un aula con proyector y dispositivos electrónicos para los estudiantes, o se puede desarrollar en el laboratorio de computación. Lo interesante del juego es que después de cada pregunta, el juego muestra los resultados de cada pregunta, de esta forma el docente puede saber cuáles son las preguntas más contestadas y menos contestadas por los estudiantes.

Objetivo: responder rápidamente a las preguntas planteadas por el profesor.

Indicaciones:

- Los estudiantes deben ingresar desde una computadora, Tablet o celular a la página web https://kahoot.it/#/
- Deben ingresar el código proporcionado por el profesor y se registran con su nombre.
- Cuando el profesor muestre la pregunta, tendrán cuatro alternativas de un color diferente cada una, como se muestra en la figura 4.
- Los estudiantes, en su aparato electrónico, deben marcar el color con la respuesta que hayan obtenido.

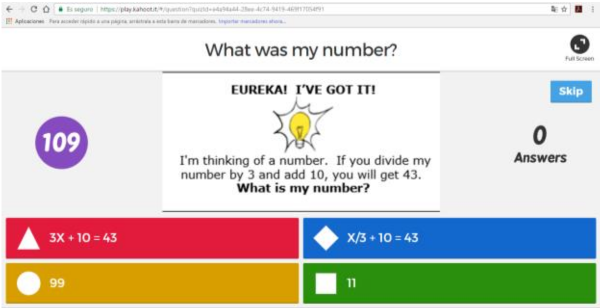


Figura 4. Juego Kahoot!.

A pesar de que la página web está en inglés, se pueden plantear preguntas en español.

ISBN 978-84-945722-3-4

Este juego fue aplicado con estudiantes de 13 años de un colegio bilingüe. Los resultados fueron favorables tanto para los estudiantes como para el docente. Los estudiantes se mostraron muy entusiasmados durante la aplicación del juego y pedían que se elaboren más pruebas usando el mismo recurso. En el caso del docente, después de la aplicación, se pudo reconocer cuáles fueron las preguntas menos contestadas por el grupo y así identificar qué temas no quedaron claros y por ende necesitaban volverse a explicar.

Por otro lado, D'Andrea (s.f.) plantea otras páginas web en donde se pueden encontrar más juegos para el aula como por ejemplo "Juegos de estrategia e ingenio: una experiencia temprana de investigación", que es un material interactivo elaborado por el Ministerio de Educación de España para el nivel de secundaria.

Evaluación de los juegos

Los participantes después de analizar los diferentes juegos procederán a completar una rúbrica (anexo) cuyos criterios corresponden al marco teórico utilizado para sustentar que mediante el juego vinculado a la resolución de problemas es posible el desarrollo de habilidades matemáticas.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*, trad. de Dilma Fregona. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Calero, M. (2003). *Educar jugando*. Lima: Editorial San Marcos.

D'Andrea, C. (s.f.). Juegos matemáticos y análisis de estrategias ganadoras. https://atlas.mat.ub.edu/personals/dandrea/D'Andrea.pdf Consultado el 14/04/2017

Ferrero, L. (2004). *El Juego y la Matemática*. Madrid: La Muralla S. A.

Guzmán, M. (1984). Juegos matemáticos en la enseñanza. Ponencia presentada en la IV Jornada sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemática. Madrid. http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/old/06juegomat/juegosmatensenanza/juemat.htm Consultado 14/04/2017

Palomino, D. (2010). El juego y la matemática: una pareja con mucho en común. *Signo Educativo*, 186, 34-36.

Azcárate, A. (s.f.). Mueve ficha. Juegos matemáticas y estrategias. http://venxmas.fespm.es/temas/mueve-ficha-juegos-matematicas-y.html?lang=es Consultado el 14/04/2017

ISBN 978-84-945722-3-4

ANEXOS

FOTOS DEL CRANIUM MATEMÁTICO

ISBN 978-84-945722-3-4

EJEMPLOS DE PREGUNTAS PARA EL CRANIUM MATEMÁTICO

Todos los retos deben ser realizados en 1 minuto

Rojo – piensa y resuelve

- Figura formada por dos rayos que tienen un vértice en común: ÁNGULO
- Triángulo que tiene tres ángulos agudos: TRIÁNGULO ACUTÁNGULO.
- Rectas que se intersecan formando ángulos rectos: RECTAS PERPENDICULARES
- Halla la medida del área de un rectángulo de 17 m de ancho y 18 m de largo. Rpta: 306m^2
- Segmento de recta que une el centro con un punto de la circunferencia: RADIO
- Halla la medida del área de un cuadrado de 12 cm de lado. Rpta: 144cm^2
- Triángulo cuyos lados tienen diferente medida: TRIÁNGULO ESCALENO
- Halla el perímetro de un romboide de 15m de base y 16m de altura. Rpta: 62m
- Cuadrilátero que solo tiene un par de lados paralelos: TRAPECIO
- Halla el perímetro de un cuadrado de 125m de lado. Rpta: 500m

Amarillo - lenguaje matemático

- Deletrea en equipo la palabra EQUILÁTERO al revés, recuerda mencionar las tildes.
- Dos personas deben escribir 3 palabras que se vengan a la mente con un concepto matemático y deben coincidir en por lo menos 1. El concepto es: PROPORCIONALIDAD.
- Deletrea en equipo la palabra ISÓSCELES al revés, recuerda mencionar las tildes.
- Resuelve el siguiente anagrama: TESCAN SECRETAS. Descompón las letras y vuelve a armar las palabras. Pista: Se intersectan. Respuesta: RECTAS SECANTES
- Deletrea en equipo la palabra CONGRUENCIA al revés.
- Dos personas deben escribir 3 palabras que se vengan a la mente con un concepto matemático y deben coincidir en por lo menos 1. El concepto es: ESTADÍSTICA.
- Resuelve el siguiente anagrama: DIARI TEMATICAME. Descompón las letras y vuelve a armar la palabra. Pista: estadística. Respuesta: MEDIA ARITMÉTICA.
- Deletrea en equipo la palabra PROBABILIDAD al revés.
- Dos personas deben escribir 3 palabras que se vengan a la mente con un concepto matemático y deben coincidir en por lo menos 1. El concepto es: FRACCIONES.
- Deletrea en equipo la palabra PERPENDICULAR al revés.

Azul - dibuja

Tu equipo debe adivinar lo que estás dibujando, NO PUEDES HABLAR, NI USAR LETRAS NI NÚMEROS EN TU DIBUJO

- Dibuja un DECÁGONO.
- Dibuja ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS.
- Dibuja una RECTA TANGENTE
- Dibuja con los ojos cerrados un TRAPECIO ISÓSCELES.
- Dibuja con los ojos cerrados un TRAPEZOIDE.

Verde – actúa y tararea

- Actúa para que tu equipo adivine el concepto matemático: PORCENTAJES. Pista: un tema trabajado en el año.
- Tararea la canción THE TRIANGLE de JAMES BLUNT para que tu equipo adivine.

ISBN 978-84-945722-3-4

- Actúa para que tu equipo adivine el concepto matemático: FRACCIONES. Pista: un tema trabajado en el año.
- Tararea la canción HIMNO DEL COLEGIO para que tu equipo adivine.

Morado – reto difícil

- Continúa la siguiente sucesión: 1, 4, 9, 16, 25, ___. Rpta: 36
- Calcula 7 + 9 x 6. Rpta: 61
- 21 obreros hacen una obra en 30 días. ¿En cuánto tiempo lo harán el doble de obreros? Rpta: 15 días
- Una máquina imprime 4 hojas en 2 minutos. ¿Cuántas hojas imprimirá en 5 minutos? Rpta: 10
- A un par de zapatillas que cuesta S/.165 se le aplica el 20% de descuento. ¿Cuánto cuesta finalmente las zapatillas? Rpta: S/.132

Negro - pierde un turno

RÚBRICA PARA EVALUAR JUEGOS MATEMÁTICOS

Categoría	En inicio	En proceso	Logrado
Comprensión del juego	No hay claridad sobre el objetivo del juego, sobre cómo es el funcionamiento de sus partes, ni de sus reglas.	Se comprende en qué consiste el juego y cómo funcionan sus diferentes partes pero no hay claridad en las reglas o estas quedan abiertas a ambigüedades.	Se comprende en qué consiste el juego, cómo funcionan las diferentes partes del juego y cuáles son las reglas.
Concepción de un plan para ganar el juego	El juego no permite la construcción de una estrategia ganadora. Ganar el juego solo es producto del azar.	El juego permite construir una estrategia ganadora, pero esta depende de la habilidad del estudiante y del azar.	El juego permite construir una estrategia ganadora. Se puede identificar por dónde empezar y qué estrategias se pueden usar.

ISBN 978-84-945722-3-4

Ejecución del plan para ganar el juego	El juego no permite la construcción de una estrategia, por lo tanto, no permite la aplicación de ningún plan y las decisiones tomadas durante su ejecución son azarosas.	El juego permite poner en práctica el plan diseñado pero, si este no funciona, no brinda oportunidades para diseñar otro tipo de estrategias.	El juego permite poner en práctica el plan diseñado y, en caso este no funcione, brinda oportunidades para diseñar otro tipo de estrategias.
Evaluación del plan usado	El juego termina cuando alguien gana. El juego no brinda posibilidades de análisis ni reflexión sobre sí mismo.	Después de terminar el juego es posible hacer una reflexión del mismo pero esta no es tan profunda como para asimilar la experiencia por completo.	El juego no termina cuando alguien gana. El juego brida la posibilidad de mirarlo a fondo y aprovechar la solución para asimilar bien la experiencia.
Desarrollo de habilidades matemáticas	El juego no permite el desarrollo de ninguna habilidad matemática	El juego permite el desarrollo en parte de una habilidad matemática.	El juego permite el desarrollo de una o varias habilidades matemáticas.

T-89

LA NOCIÓN DE FUNCIÓN: UNA INTRODUCCIÓN UTILIZANDO GEOGEBRA

Viviana Costa - Laura Del Río
vacosta@ing.unlp.edu.ar - laura.delrio@ing.unlp.edu.ar
UIDET IMAPEC – Departamento de Ciencias Básicas – Facultad de Ingeniería – Universidad Nacional de La Plata – Argentina

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.
Modalidad: T
Nivel Educativo: Formación y actualización docente.
Palabras claves: GeoGebra, Funciones, Didáctica.

Resumen

En este trabajo, se presenta y fundamenta una propuesta de taller destinado a docentes de matemática de distintos niveles educativos, cuyo propósito es promover la reflexión acerca de la enseñanza de una noción tan importante, como es la de función. En una primera instancia, se propondrá a los participantes realizar una actividad que permite introducir la noción de función a partir de un problema planteado en el marco geométrico. En la misma, se aprovechan las características distintivas del programa GeoGebra para resolver en forma dinámica las cuestiones planteadas y comenzar a introducir en el aula el lenguaje propio del marco funcional: la noción de dependencia, de dominio, de variabilidad. Luego, se propondrá un análisis didáctico del problema abordado en la sesión anterior, teniendo en cuenta aportes teóricos de la Didáctica Específica de la Matemática. Se observará en qué medida un problema como el presentado puede utilizarse para introducir el tema en el aula, aportando a la construcción con sentido de la noción de función, así como también las posibilidades que brinda el software GeoGebra, la necesidad de mediación del docente en la relación alumno-computador y los posibles obstáculos y dificultades de su puesta en práctica.

Introducción

El concepto de *función* es considerado de suma importancia en la enseñanza de la matemática en los niveles medio y superior. En el caso de Argentina, esto se refleja en la aparición del mismo en los diseños curriculares de todos los años de la escuela secundaria, retomándose y profundizándose a lo largo de todo el trayecto escolar.

La potencia de este concepto radica en la infinidad de problemas que pueden ser modelizados a través suyo, tanto en el interior de la matemática como en muchísimas otras disciplinas.

En este taller se propone realizar el análisis didáctico de un problema que puede utilizarse para introducir la noción de función en la escuela media, aprovechando las posibilidades que

ISBN 978-84-945722-3-4

brinda un entorno de geometría dinámica, como es GeoGebra. La actividad propuesta ha sido implementada por las autoras del presente trabajo en varios talleres de formación docente y como parte de un curso de formación en línea sobre aspectos didácticos del uso de GeoGebra para la enseñanza de la Matemática (Del Río, Costa 2016) y se ha encontrado en estas distintas ocasiones que permite disparar diversas reflexiones acerca de la construcción con sentido de la noción de función en el aula y cómo las herramientas tecnológicas contribuyen a este fin.

El resto del trabajo se organiza de la siguiente manera: en la próxima sección, se analizan diversas críticas expresadas por autores reconocidos en relación a la enseñanza tradicional del concepto de función; luego, se esbozan los lineamientos generales de la propuesta de la Escuela Francesa como enfoque superador de dichas críticas; a continuación de esto, se explicita de qué manera se pueden integrar las TIC en pos de este enfoque; y por último, se plantean los objetivos del taller y la actividad que se propone realizar para lograrlos.

La enseñanza tradicional de la noción de función

La enseñanza tradicional de la matemática, se caracteriza por realizar una presentación axiomática del conocimiento matemático. De acuerdo con Brousseau (1986) esta metodología facilita el proceso de instrucción, en tanto permite introducir los conceptos paulatina y ordenadamente, aislando las nociones para presentarlas una por una, y permite así optimizar la cantidad de conocimientos acumulados en un mínimo de tiempo. Pero esta presentación, “elimina completamente la historia de esos conocimientos, es decir la sucesión de dificultades y problemas que han provocado la aparición de los conceptos fundamentales” (Brousseau, 1986, p. 36). Una aproximación a los objetos matemáticos que tenga en cuenta esta génesis histórica de los mismos, es necesaria para que estos objetos cobren sentido para los estudiantes.

En esta misma línea, Rodríguez Fernández, Godino y Ruiz Higueras (1995) critican algunos aspectos de la enseñanza tradicional de la noción de función:

- El trabajo algorítmico de cálculo que “contribuye al desvanecimiento del problema como motor de generación de conocimientos en los alumnos y, en consecuencia, a una pérdida del sentido epistemológico de estas nociones” (p. 111).

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

- El trabajo acerca de las gráficas de funciones como punto de llegada: "la gráfica se concibe como un fin en sí mismo y no como una herramienta del trabajo matemático del alumno" (p. 107).
- El uso de las gráficas de funciones únicamente como apoyo intuitivo del discurso del profesor: "No se pone en juego el valor instrumental de las representaciones gráficas. La gráfica se constituye así en la enseñanza como una herramienta ostensiva que, controlada por el profesor, sirve para salvar la distancia entre el rigor y la intuición, ya que los saberes que se manejan están fuertemente descontextualizados y no adquieren ningún tipo de significación" (p. 109). Muchas veces encontramos que las funciones a trozos son presentadas a los alumnos con el único fin de ser un soporte gráfico para introducir las definiciones de límite, continuidad, etc.

La propuesta de enseñanza del concepto de función desde el enfoque de la Escuela Francesa

La Escuela Francesa de Enseñanza de la Matemática, le otorga un papel central a la actividad de modelización matemática. Chevallard, Bosch y Gascón (1997), mencionan:

> "Un aspecto esencial de la actividad matemática consiste en construir un modelo (matemático) de la realidad que queremos estudiar, trabajar con dicho modelo e interpretar los resultados obtenidos en este trabajo para contestar a las cuestiones planteadas inicialmente. Gran parte de la actividad matemática puede identificarse, por lo tanto, con una actividad de modelización matemática" (p. 51).

En este sentido, se promueve una forma de trabajo diferente a la tradicional (que aún tiene vigencia en algunas aulas en las escuelas secundarias, por lo menos en Argentina), en la que los objetos matemáticos se construyan a partir de la resolución de problemas, como soluciones óptimas para los mismos.

> "Presentar las nociones matemáticas como herramientas para resolver problemas ayuda a los alumnos/as a encontrar sentido a esas nociones. Luego de encontrar este sentido, los conceptos podrán ser estudiados fuera del contexto en el que se los presentó, lo que aportará nuevos significados y la posibilidad de realizar transferencias" (DGCyE, 2007, p. 295).

ISBN 978-84-945722-3-4

Para esto, se requiere que la situación planteada sea tal que el conocimiento que se pretende que el alumno re-construya aparezca como necesario para llegar a su resolución. No es suficiente con que sea posible utilizarlo, sino que este conocimiento debe ser el único medio eficaz para controlar dicha situación.

Se requiere también que el problema ofrezca al alumno una cierta resistencia, que él no cuente de entrada con todos los conocimientos necesarios para resolverlo (de lo contrario se trataría de un mero ejercicio de aplicación), pero a la vez debe resultarle suficientemente familiar, para que no le resulte inaccesible. El alumno debe poder, en virtud de sus conocimientos previos, anticipar cuál sería una solución razonable para el mismo. “Es indispensable que, en el momento de plantear el problema, los alumnos dispongan al menos de una estrategia (estrategia de base) para que puedan comprender la consigna y comenzar su actividad de búsqueda de la solución” (Gálvez, 1994, p. 45).

En el caso de la enseñanza de la noción de función, entendida como herramienta apta para modelizar fenómenos de cambio, se propone partir de sus nociones constitutivas: “la variación, la dependencia, la correspondencia, la simbolización y expresión de la dependencia y las distintas formas de representación, sea ella algebraica, gráfica y otra” (Hanfling, 2000, p. 11).

¿Cómo se pueden integrar las TIC a este enfoque de enseñanza?

La integración de las denominadas Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) puede resultar enriquecedora del enfoque de enseñanza mencionado:

> “En la medida de lo posible, se utilizarán programas graficadores que agilizan el dibujo de las gráficas y permiten analizar detalles de las mismas. La tecnología brinda formas dinámicas de representación, que en comparación con las habituales, permiten ahorrar tiempo y centrar la atención en la resolución de los problemas y no en el trabajo mecánico, lo que enriquece la comprensión” (DGCyE, 2007, p. 329).

Hay que tener en cuenta que incorporar estos recursos al aula, supone una tarea que va más allá de la realización de las mismas actividades que se hacen en el entorno “lápiz y papel”. Aparece la necesidad de pensar situaciones nuevas para aprovechar realmente su potencial educativo: “se incorporan actividades que no serían factibles para la enseñanza sin computadora. En líneas generales, este tipo de propuestas promueve un ambiente

ISBN 978-84-945722-3-4

experimental en la clase de Matemática que probablemente cambie la naturaleza de su aprendizaje" (Borsani et al., 2013, p. 6902).

Los entornos de geometría dinámica permiten entonces ampliar el abanico de situaciones que es posible llevar al aula, y propiciar un trabajo matemático que suponga la indagación, la experimentación y la elaboración de conjeturas, tal como lo propone Brousseau (1986).

Objetivos del taller

- Proponer a los profesores una actividad para la cual el uso del software GeoGebra constituya una herramienta de modelización.
- Discutir sobre las potencialidades que ofrecen las computadoras para la enseñanza de la Matemática.
- Analizar las posibilidades de un entorno para la exploración y la experimentación, para favorecer la comprensión y la apropiación de conceptos a partir de la visualización gráfica, que los docentes puedan luego compartir con sus alumnos.
- Discutir durante la realización del taller, nuevas formas de enseñar y aprender, que implican hacer matemática.

Actividad a desarrollar

Se propone discutir en el marco del taller, un problema que se ha seleccionado y adaptado del Diseño Curricular de 2º año de Secundaria de la Provincia de Buenos Aires (Argentina) que corresponde a alumnos de entre 12 y 13 años de edad:

Dado un triángulo isósceles cuyos lados congruentes miden 5 cm ¿Cómo se comporta su área al modificarse la longitud del lado?

Construya el triángulo en GeoGebra y luego responda a las siguientes preguntas:

1. ¿Varía el área del triángulo si se modifica la base?
2. ¿Cuál es el área si la base mide 5 cm? ¿y si mide 6 cm o 15 cm?
3. ¿Qué valores puede tomar la base?
4. ¿Para qué medida de la base el área mide 4 cm^2?
5. ¿A medida que el lado aumenta, el área aumenta o disminuye?
6. ¿Existe algún valor de la medida de la base que haga que el área sea máxima?

ISBN 978-84-945722-3-4

En oportunidades previas en las que se ha trabajado con esta actividad, se pudo observar que permite analizar con los docentes participantes en qué sentido la incorporación de las TIC en el aula, en particular el programa GeoGebra, amplía el abanico de problemas que es posible abordar en las clases, ya que sin utilizar estos recursos, sería impensable proponer la situación dada en la actividad a alumnos de 2º año de secundaria.

Por otro lado, esta actividad posibilita realizar un análisis en relación a cómo puede variar su abordaje en función de las herramientas que se tengan disponibles para ello:

- el problema puede resolverse utilizando lápiz y papel poniendo en juego conocimientos básicos de Cálculo, pero este procedimiento no sería adecuado para alumnos del nivel al que va dirigido;
- también es posible su resolución utilizando calculadora, realizando tablas de valores y un gráfico, tal como es propuesto en el Diseño Curricular de 2do. año de Secundaria, pero de este modo resulta trabajoso; y
- su realización utilizando el entorno GeoGebra, permite desplegar múltiples formas de resolución que favorecen la exploración, el debate de las diversas estrategias y la visualización de la variación del área en función del lado desigual, en tiempo real.

Según Carrillo,

> "Con GeoGebra se pueden realizar construcciones de muy diversa variedad y sobre todo complejidad, aunque lo ideal o recomendable es comenzar con propuestas sencillas, sobre todo cuando se trata de incorporarlo al aula, dejando para más adelante las propuestas que requieran un mayor esfuerzo en la construcción" (2012, p. 10).

Además se propondrá en el taller discutir las nociones didácticas desarrolladas en el marco teórico descrito anteriormente a partir de las consignas que se proponen a continuación, con el objetivo de observar en buena medida el potencial didáctico del software GeoGebra:

1. ¿Cómo realizaría la situación anterior utilizando lápiz y papel?
2. Comparar la tarea realizada utilizando GeoGebra.
3. Analizar los conocimientos previos que requerirían uno y otro modo de resolver la situación.
4. Analizar ventajas y desventajas de una y otra forma de afrontar el problema.

ISBN 978-84-945722-3-4

Reflexión final

Con la realización de este taller, se espera promover la reflexión acerca de la enseñanza de una noción tan importante, como es la de función, desde la perspectiva de la Escuela Francesa de Enseñanza de la Matemática, intentando superar algunas de las limitaciones que presenta el enfoque tradicional. Se espera también analizar las posibilidades que brinda la incorporación de GeoGebra cuando se explota su potencial como instrumento de modelización y sin que esto implique el uso de construcciones complejas que requieran un elevado nivel de experticia en el uso técnico del programa.

Referencias

Borsani, V., Cedrón, M., Cicala, R., Di Rico, E., Duarte, B., & Sessa, C. (2013). La integración de programas de geometría dinámica para el estudio de la variación de magnitudes geométricas: nuevos asuntos para la didáctica. Actas del VII CIBEM, 6901-6908.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. *Recherches en didactique de mathématiques*, 7(2), 33-115.

Carrillo, A. (2012). El dinamismo de GeoGebra. *Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (29), 9-22.

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: I.C.E., Universitat de Barcelona.

Del Río, L., Costa, V. (2016) Análisis del diseño de un curso a distancia sobre aspectos didácticos del uso de GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, 5(1), 23-38.

Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires. Diseño Curricular de 2° año de la Educación Secundaria, Resolución 2495/07 C.F.R. (2007).
http://servicios.abc.gov.ar/lainstitucion/organismos/consejogeneral/disenioscurriculares/documentosdescarga/escuelasecundaria.pdf Consultado el 13/12/16.

Gálvez, G. (1994). La didáctica de las matemáticas. En C. Parra & I. Saíz (Eds.), *Didáctica de la matemática. Aportes y reflexiones* (1° ed.). Capítulo 2, pp.21-31. Buenos Aires: Paidós.

Hanfling, M. (2000). Estudio didáctico de la noción de función. En G. Chemello (Ed.), *Estrategias de enseñanza de la matemática*. Quilmes: Universidad Virtual de Quilmes.

Rodríguez Fernández, J. L., Godino, J., & Ruiz Higueras, L. (1995). La noción de función como objeto a enseñar y como objeto enseñado: Análisis de un proceso de transposición didáctica. Quadrante, *Revista de investigacao em educasao matematica*, 2(4), 91-116.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-96

EMOCIÓN-ARTE: MATEMÁTICAS EN PERSPECTIVAS.

Noé Carrero Torres
noecarrerotorres@gmail.com
I.E.S Azuer, Manzanares, Ciudad Real, España

Núcleo temático: V. Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
Modalidad: T
Nivel educativo: Nivel educativo medio o secundario (12 a 15 años).
Palabras clave: Aprendizaje significativo, matemáticas emocionales

Resumo
Las matemáticas son la manera de mirar al mundo y por tanto no podemos separarlas de su contexto, la cultura. En este taller crearemos diversas técnicas para desarrollar el currículo de matemáticas a través de la cultura, o lo que es lo mismo, entender el mundo a través de las matemáticas. Manipularemos números, correremos a la aproximación más cercana de un número, analizaremos cuadros de arte, poesía, usaremos fotos, personajes famosos para hablar de números negativos, de pendientes, de funciones. Todo cobrará un significado personal dependiendo de cada uno.
Al final, seremos capaces de mirar de otra forma a la enseñanza de las matemáticas, siendo conscientes que los conceptos abstractos son los mismos, pero que dependiendo de la cultura representan cosas distintas. Con todas estas herramientas seremos capaces de diseñar lecciones distintas que se adapten a nuestra realidad, a nuestro aula.

Todo cambio nace de un problema, de una necesidad. Antes de escuchar nuevas ideas es importante tener claro qué se pretende conseguir, qué estamos buscando, qué nos ha traído a este taller. Así qué antes de comenzar me gustaría respondiesen a las siguientes preguntas. ¿Qué deseo cambiar? ¿Por qué lo quiero cambiar? ¿Qué es lo que no funciona en mi clase? ¿Qué funciona bien en mi clase? El siguiente taller pretende que los asistentes realicen las actividades como si fuesen estudiantes, para que desde su propia experiencia analicen el impacto de una nueva forma de trabajar en el aula. ¿Listo para el cambio? Pues adelante con las siguientes actividades.

1) ¿Y tú cómo piensas?: Cómo reciben los alumnos la información

Lo primero es analizar el medio en el que me encuentro, ya que, lo que funciona en un determinado lugar no tiene porqué hacerlo en otro. Debemos obtener información de nuestro

ISBN 978-84-945722-3-4

alumnos cuanto antes. El profesor debe saber cómo piensan sus alumnos, cómo perciben la información para adaptar su clase a dicho medio. Aún más importante aún es que el propio alumno identifique cómo trabaja, cómo piensa, que aprenda a conocerse para este viaje que pretendemos que sea el inicio de un aprendizaje continuo. Veamos algunas actividades encaminadas a conocer(se):

1A) **Los Puntos Cardinales**.

Como comienzo vamos a colocarnos en este aula en el punto que mejor nos represente de los cuatro puntos cardinales con las características de cada uno de dichos puntos cardinales:

- Norte: le gusta trabajar lentamente, comprender bien el problema antes de empezar.
- Sur: Les gusta obtener la solución rápidamente. No hay que entender todo perfectamente, les gusta probar hasta que dan con un resultado que parece coherente.
- Este: Cuando están en grupo les gusta que todos se encuentren cómodos, les gusta escuchar las ideas de todos antes de decidir que métodos van a aplicar.
- Oeste: No necesitan entender todo, basta con encontrar alguien que sepa hacerlo y les explique cómo hacerlo.

Es un buen punto de partida para que acepten su forma de pensar, de trabajar y que no asocien la velocidad de trabajar con ser mejores en matemáticas. Aprovechando la información obtenida podemos organizar la clase eficientemente. Les recomiendo agrupar a un estudiante “Norte” con un “Sur”. Al principio se desesperarán. pero luego van a ver lo bueno que es tener trabajando a una persona que no para de producir ideas con otro que necesita asegurarse de que las ideas son buenas antes de llevarlas a cabo.

1B) Formas de pensar: problemas de Jo Boaler

Hay muchas formas de resolver un problema, tantas como formas de pensar. Para ello les animo a que resuelvan entre problema visual de la página web www.youcubed.org y comparen su resultado con su compañero. Si en el primer caso (n=1) hay 4 cuadrados, en el segundo (n=2) hay 9 cuadrados, en el tercero (n=3) hay 16 cuadrados. ¿Cuántos cuadrados habrá en el caso 100 (n=100)?

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

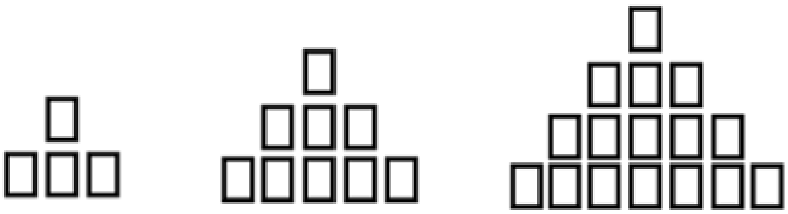


Ilustración 1: Ejemplo de problema visual

1C) Estimadas Matemáticas

Aquí vamos a aprender a utilizar y estimular la intuición matemática en nuestras clases de matemáticas. Utilizando la página web www.estimation180.com, vamos a deducir la altura de una noria o los metros de un papel de cocina. Al principio la suerte jugará un un papel excesivamente importante, pero poco a poco iremos desarrollando pensamientos y métodos matemáticos para intentar alcanzar una "educated guess".

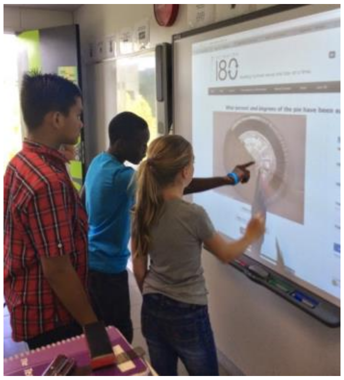


Ilustración 2: Alumnos resolviendo un problema de estimación

2) ¿Cómo quiero que se sientan mis alumnos en clase?

Está claro que todos queremos que nuestros alumnos se sientan a gusto en clase. Diversos estudios demuestran que un ambiente distendido es fundamental para el aprendizaje del alumno. No obstante, ¿trabajamos la parte emocional en nuestro aula? No queremos que el

ISBN 978-84-945722-3-4

alumno se desanime y tire la toalla, pero, ¿Estamos dispuestos a invertir 10 minutos de nuestro currículo para obtener mucho más de lo invertido?

2A) **Sus logros matemáticos depende de ellos**.

Para mi lo más importante es romper el falso mito de que no son buenos en matemáticas y nunca podrán volver a serlo. Y para ello me baso en la ciencia y en los estudios de Carol Dweck que habla de la importancia del "*growing mindset*" y de la importancia de practicar para conseguir ser bueno en algo. La ciencia está de nuestro lado, y se ha demostrado que el cerebro es plástico y que las neuronas y sus conexiones se multiplican. Por lo tanto depende de nosotros el poder llegar a ser buenos en matemáticas.

2B) **Errar es de sabios**.

Aquí vuelvo a utilizar estudios de Jo Boaler en el que se muestra que aprendemos cuando se realizan conexiones neuronales en nuestro cerebro. Cuando nos equivocamos y comprendemos en qué nos hemos equivocado, nuestro cerebro produce conexiones neuronales y esto crea un aprendizaje significativo.

3) ¿Cómo voy a transmitir la información?

Lo qué funciona en un aula no tiene por qué hacerlo en otra. ¿Qué es lo que falta? ¿Qué falla? ¿En qué se diferencia un aula de otra? La cultura. La forma de pensar de un Español y de un Estadounidense es distinta, como lo son las vivencias de un Mejicano. Toda esa interculturalidad se tiene que reflejar e incluso guiar la clase.

3. 1- LA LUZ: Son el tipo de actividades diseñadas para entender y afrontar un concepto desde diferentes puntos de vista, incluyendo el *quinestésico* y el *visual*.

3.1.A) Actividades con la recta numérica

¿Cómo funciona la regla de los signos? Para ello vamos a realizar el siguiente juego en el que usted caminará por los números. Originalmente estamos orientados hacia los números positivos pero cada vez que veamos un signo "-" vamos a girar 180º. De este modo "- -" es "+" ya que dos giros de 180º nos colocan en nuestra posición original.

El resto de la actividad es tan fácil como avanzar por la recta numérica que hemos colocado previamente en el suelo. Por ejemplo: -2-(-12).

El alumno se sitúa originariamente en el primer número, es decir, en el -2. Desde ahí gira dos veces, por lo que seguirá mirando hacia los números positivos. De ahí caminará 12 unidades en positivo. Si desde el -2 camina 12 unidades en positivo, llegará al 10.

Ilustración 3: Alumnos y padres usando la recta numérica

3.1.B) Algebra tiles

Usando las “algebra tiles” vamos a realizar operaciones con enteros manipulando. Por ejemplo, los signos + en verde y los – en rojo (¿estar en números rojos?). Utilizaremos las fichas verdes para los números positivos y las rojas para los negativos. De este modo, por ejemplo: -7+5 = -------+++++. El paso siguiente será cancelar una ficha roja con una ficha verde (proceso similar a pagar una deuda): -7+5 = -------+++++ = --. Por lo que el resultado será -2.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

A partir del primer ejemplo el alumno tiene que experimentar y generar hipótesis. Luego escribirá sus hipótesis e intentará aplicarlas en otros casos.

Ilustración 4: Alumnas operando con las "Algebra Tiles"

3.2- <u>EL LADO OSCURO</u>: Una vez entendido el concepto, existe una parte tediosa de asimilación, que implica trabajar, equivocarse y seguir trabajando. Aunque nos saltemos esta parte en este taller, si vamos a recomendar y analizar diferentes recursos online como: www.mathletics.com, www.myimaths.com, o www.thatquiz.org. Esta última gratuita y permite almacenar todos los resultados de los alumnos.

4) ¿Cómo almaceno y proceso la información?

4.1 Apuntes Cornell:

Existe una correlación directa entre la calidad de los apuntes, la organización del cuaderno y los resultados académicos. La pregunta es: Si las notas son tan importantes, ¿por qué no se enseña como tomarlas? El método Cornell consiste en dividir la hoja en cuatro partes. En la de arriba, pondrá su nombre, la fecha y el tema sobre el que va a tomar notas. Es interesante que el alumno detalle explícitamente el objetivo que pretende conseguir con esas notas.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Ilustración 5: Ejemplo de notas Cornell de una alumna

Las ideas las iremos escribiendo a la derecha, separando unas de otras mediante una línea horizontal. La izquierda se completará posteriormente, escribiendo lo que denominaremos la pregunta esencial. ¿Qué me preguntarán o cómo para que tenga que utilizar toda la información que hay a la derecha? Por ejemplo: Si el alumno escribe a la derecha como sumar dos fracciones con distinto denominador, a la izquierda escribirá una pregunta del tipo: ¿Cómo sumo 2/3 + 3/5?

Por último, la parte inferior será un resumen, una síntesis de todo lo aprendido. ¿Te atreves a tomar apuntes Cornell de todo lo aprendido hasta ahora?

4.2- Las matemáticas en las redes sociales

4.2.A- Following Pitágoras

¿Te has parado a pensar como sería el Facebook de Pitágoras? ¿Y la cuenta Twitter de Thales de Mileto? Descubrirás cosas apasionantes y en menos de 140 caracteres.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Ilustración 6: Ejemplo de tuit creado por una alumna

4.2.B- https://www.facebook.com/LasMatematicasDeMrCarrero/

O todas aquellas noticias que quiero compartir con mis alumnos y nunca encuentro el momento. Los tiempos ya han cambiado y con ellos la forma de distribuir la información.

4.2.C Notas virtuales.

¿Cuándo no sabemos algo donde acabamos la mayoría de las veces? Wikipedia. ¿Y si nuestros alumnos construyesen su propia wiki con apuntes colaborativos, en el que recojan todo lo aprendido y se pueda acceder fácilmente en cualquier momento?

Notas virtuales a través de http://matematicasconmrcarrero.wikispaces.com/ . Además los alumnos pueden crear sus propios videos explicando un concepto, lo cual desarrolla sus capacidades comunicativas científicas.

5. ¿Cómo utilizo la información?

5.1. ¿Qué problemas tengo yo?

¿Has probado alguna vez a pedir a un alumno que cree un problema en el que tenga que utilizar los contenidos aprendidos? El resultado es cuanto menos sorprendente. Al principio los problemas serán muy básicos y algunos sin sentido. Poco a poco los alumnos serán más conscientes de que datos necesitan aportar para que se pueda resolver el problema y esto les ayudará para prepararse para el examen, trabajando la asignatura desde un nivel de más profundo.

5.2. Trabajando por Proyectos:

Hay muchos proyectos para encuadrar las matemáticas en la vida real: búsqueda de fotografía matemáticas, relación entre una metáfora y una proporción matemática, etc. Aquí desarrollo un par como ejemplo de otro enfoque. ¿Qué proyecto crees que podría funcionar en tu clase?

5.2.A Analizando el mundo.

Gracias a la página web gratuita www.gapminded.org los alumnos podrán estudiar dos variables en una población e investigar sobre las causas. Por ejemplo, se puede ver que en España en 1936 la esperanza de vida cayó drásticamente. ¿A qué crees que se debió?

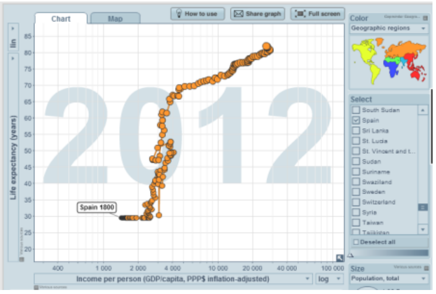


Ilustración 7: Free material from **www.gapminded.org**.

Otra forma de analizar el mundo es mediante su componente artística. Se pueden contrastar el cuadro de las Meninas de Velázquez con las Meninas de Picasso para ver cómo influye la interpretación de la cuarta dimensión en el arte.

Se pueden utilizar metáforas (El cielo es al mar, como mi amor a ti) para ilustrar proporciones. Las posibilidades son infinitas.

5.2.B Analizando ticket compra

Tan fácil como analizar el último ticket de la compra. ¿Han calculado bien los impuestos? ¿Se paga el mismo porcentaje por todos los productos? ¿Cuánto hubiésemos pagado sino hubiese impuestos? ¿Y si los impuestos suben un 1%?

6- ¿Cómo evalúo el proceso de enseñanza-aprendizaje?

ISBN 978-84-945722-3-4

Todos necesitamos feedback para mejorar y trabajar más acertadamente. Hay muchas formas de evaluar el proceso de enseñanza para poder ir adaptándolo.

6.1- Exit Point

¿Imagínese que para poder salir de esta charla le pido que escriba algo que ha aprendido hoy aquí? ¿Qué escribiría? ¿Qué información puede recibir el ponente al leerla?

6.2- ¿Y tú qué sabes?

Cuéntale a tu compañero de al lado algo que hayas aprendido hoy y escucha lo que él ha aprendido. Vas a tener que contar a todos que ha aprendido tu compañero.

6.3) ¿Ha funcionado?

Utilizando herramientas tan sencillas como: www.kahoo.com o www.surveymonkey.com puedes conocer en cada momento como está funcionando las actividades y si se están cumpliendo tus expectativas. No esperes al día del examen para descubrir si tus alumnos aprendieron, pues ya poco puede hacerse ahí.

Eso sí, si se deja libertad de trabajo a los alumnos puede encontrarse con sorpresa, como una alumna que me desarrollo un trabajo completo y con resultados matemáticos impecables para calcular la pendiente de la recta que unía los pezones de una foto de Justin Bieber. ¿Están preparados para correr riesgos?

¡No se olvide de disfrutar del trayecto!

Referencias bibliográficas

Libro

- Jackson, R. (2009). *Never work harder than your students.* Virginia (USA): Association for Supervision and Curriculum Development
- Ritchhart, R. (2011). *Making thinking visible.* New Jersey (USA): Wiley

Artículo en revista

Carrero, N. (2013). Este mundo sí hay quién lo entienda. Revista Materiales 21, 33-36.

Información extraída de una página web

Stanford Graduate School of Education (2016). Task with Number Sense. https://www.youcubed.org

T-102

CREACIÓN DE PROBLEMAS PARA LA GESTIÓN DE DATOS EN LA EDUCACIÓN BÁSICA

Augusta Osorio Gonzales – Elizabeth Advíncula Clemente
arosorio@pucp.edu.pe – eadvincula@pucp.edu.pe
Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) - Perú

Núcleo temático: Formación y actualización docente
Modalidad: T
Nivel educativo: Seleccionar uno de los siete niveles considerados
Palabras clave: creación de problemas, gestión de datos

Resumo
El taller propuesto aborda la creación y variación de situaciones problema para la enseñanza de la gestión de datos en los niveles educativos primaria y secundaria. Esta propuesta se basa en el Pensamiento Estadístico de Wild y Pfannkuch (1999), el cual nos proporciona las características del pensamiento de una persona cuando se enfrenta a un problema que se resuelve mediante la recolección de datos. Consideramos el ciclo de investigación empírica (PPDAC) como el punto de partida del trabajo con datos, al igual que estos autores, ya que nos permite ordenar adecuadamente los contenidos estadísticos a enseñar así como una clara comprensión de sus usos en relación a problemas de la vida cotidiana. El taller pretende que los docentes analicen problemas ya construidos en gestión de datos tomando en cuenta el ciclo PPDAC, propongan variaciones a estos y finalmente creen nuevos problemas. Además, se desea que conozcan otras dimensiones de la propuesta teórica de estos autores. Y finalmente se explicitarán algunas reflexiones a las que se espera arribar.

El Diseño Curricular Nacional DCN (2015) para la enseñanza en el nivel primario y secundario de Perú incluye cuatro competencias relacionadas con el área de Matemáticas. Una de estas competencias, Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de gestión de datos e incertidumbre, busca que los alumnos trabajen con los temas relacionados con la estadística. Esta competencia propone que el estudiante analice datos de un tema de interés o estudio, que le permita tomar decisiones, elaborar predicciones razonables y conclusiones respaldadas en la información producida desde los datos recopilados. Por ello el estudiante debe de desarrollar la capacidad de recopilar, organizar y representar datos. Pero la gestión de datos no solo tiene relación con el manejo de los datos recolectados, sino también con la

ISBN 978-84-945722-3-4

difusión de resultados obtenidos desde los mismos datos mediante el análisis, la interpretación y la inferencia.

Tomando como base todos los elementos ya descritos, nuestro equipo de investigación viene trabajando en el diseño y la aplicación de talleres de fortalecimiento en los contenidos básicos de la Estadística y la Probabilidad, dirigidos a docentes de Educación Básica en ejercicio. Este proyecto de investigación se inició el 2015, al ganar un concurso de investigación del Vicerrectorado de investigación de la PUCP. Lo que nos permitió contar con fondos para poder diseñar y aplicar talleres de fortalecimiento a dos grupos de quince docentes en dos ciudades de nuestro país. En nuestra búsqueda de estrategias para nuestros talleres de fortalecimiento, encontramos a la creación de problemas propuesta por Malaspina (2015) como una alternativa que contribuiría a desarrollar el pensamiento estadístico de los profesores. Este autor nos indica que son muchas las tareas que los docentes tienen que proponer a sus alumnos para desarrollar y evaluar las competencias matemáticas, por lo que los docentes no solo deben ser buenos resolviendo problemas sino, además, deben tener la capacidad de seleccionarlos, modificarlos y crearlos con propósitos didácticos.

El poco dominio teórico de los profesores del nivel primario en aspectos conceptuales de la gestión de datos, nos obligó a buscar propuestas que nos permitieran relacionar: las situaciones problema reales, los conceptos estadísticos y nuestro interés en la creación de problemas. Encontramos en el Pensamiento Estadístico de Wild y Pfannkuch (1999) la propuesta ideal, ya que estos autores investigaron sobre los complejos procesos de pensamiento involucrados en la resolución de problemas de la vida real usando estadística y propusieron una estructura para el desarrollo del Pensamiento Estadístico en la Investigación Empírica.

La propuesta nos dice que el objetivo fundamental de la investigación estadística es el aprendizaje en la esfera del contexto. Pero, ¿cómo entendemos esta expresión?. Podemos decir, que conocer los aspectos de un determinado problema es más que solo recolectar datos sobre este para convertirlos en información, pues también implica conocer adecuadamente la situación contextual que lo rodea. Además, comprende poder sintetizar la información

ISBN 978-84-945722-3-4

recogida sobre el problema, las ideas ya existentes sobre el mismo y las nuevas ideas que se puedan proponer sobre dicho problema durante la investigación. Por tanto, el aprendizaje se da en la reunión de todos estos aspectos que nos llevan a una mejor comprensión del problema.

Wild y Pfannkuch (1999) proponen una estructura de cuatro dimensiones, la cual busca organizar algunos de los elementos del pensamiento estadístico durante la indagación basada en los datos. Estas dimensiones son:

- Dimensión 1: El Ciclo Investigativo. Conformado por las etapas que se siguen en una investigación estadística. Proponiendo como propuesta el modelo PPDAC (Problema, Plan, Datos, Análisis, Conclusiones) de MacKay y Oldford (1994).
- Dimensión 2: Tipos de Pensamiento. Está compuesta por los pensamientos comunes a todo el campo de resolución de problemas y los que son específicos del pensamiento estadístico. Entre estos últimos tenemos: la necesidad de los datos, la transnumeración, la variación, modelación y conocimiento del contexto.
- Dimensión 3: Ciclo Interrogativo. Compuesto por los procesos que aparecen durante el desarrollo de una investigación estadística. Está conformado por los procesos que generan los planteamientos de resolución del problema, o los requerimientos de información; los procesos de búsqueda de información, los procesos de interpretación, por ejemplo, buscando las conexiones entre las información obtenida y los conocimiento previos del problema; los procesos de crítica basados en los puntos de referencia y los procesos de juicio para saber que creer, que continuar estudiando y que descartar.
- Dimensión 4: Disposiciones. Compuesto por las disposiciones personales observadas en una persona mientras desarrolla una investigación estadística. Estas disposiciones son: escéptico, imaginativo, curioso y despierto, abierto, lógico, comprometido y perseverante.

Hay que tener en cuenta que los aspectos vistos en las dimensiones presentadas acontecen de forma simultánea. Por ejemplo, una persona involucrada en un estudio basado en datos puede

ISBN 978-84-945722-3-4

estar planificando sobre la población a trabajar y para ello utiliza el conocimiento adquirido sobre el contexto del problema, toma en consideración el proceso por el que hallará a dicha población y se mostrará abierto a las ideas propuestas por los otros involucrados en el estudio.

En base a nuestra experiencia, el trabajar con los profesores en fortalecimiento de los detalles de esta propuesta no es tarea sencilla por varias razones. La primera de ellas por un tema de falta de conocimiento de los conceptos estadísticos o del dominio de su aplicación. Hemos observado que el profesor del nivel primario tiene un alto desconocimiento de los conceptos estadísticos dada su poca preparación en este tema durante su formación; esto implica que para el profesor de este nivel es complicado hasta el entendimiento del ciclo PPDAC. En el caso del profesor de secundaria, este presenta un mejor conocimiento de los conceptos pero tiene dificultades para aplicarlos adecuadamente en problemas de la vida real. Luego, pueden realizar los cálculos necesarios para determinar una media aritmética pero no pueden explicar adecuadamente cuando la media aritmética no es la mejor medida de resumen.

Por ello decidimos que nuestro trabajo de fortalecimiento se centre en la primera dimensión del Pensamiento Estadístico. Esta decisión está basada en la necesidad que tienen los alumnos de primaria de entender en que consiste en la práctica el trabajo de resolver un problema que requiere la recopilación de datos y se deje de ver la Estadística simplemente como el proceso de organizar datos en una tabla o la construcción de un gráfico de barras.

Pero, ¿cómo es que un profesor puede relacionar las etapas del PPDAC con los conceptos o procedimientos estadísticos?. La relación se da en cada etapa del ciclo PPDAC, que en particular se relaciona con la aplicación de algún concepto o procedimiento estadísticos específico, tal como se muestra en el siguiente esquema (Ver figura 1).

ISBN 978-84-945722-3-4

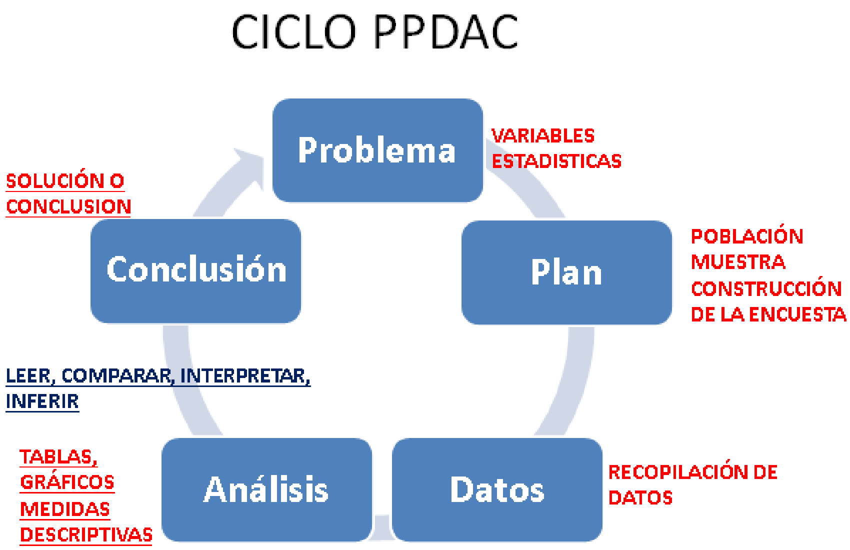


Figura1. Relación entre el ciclo PPDAC y los conceptos o procedimientos Estadísticos.

En la primera etapa, Problema, interesa identificar las variables estadísticas que se deben estudiar para poder obtener información para el análisis del problema propuesto, para luego poder plantear las relaciones existentes entre estas variables. En esta etapa, también, se estudian los elementos del contexto que se requieren tener en cuenta para el desarrollo de las siguientes etapas. En la segunda etapa, Plan, se plantea sobre que individuos es que se centrará el análisis, es decir, de quienes obtendremos los datos mediante las variables estadísticas identificadas. Además, en esta etapa se trabajará la construcción de las preguntas y del instrumento que nos permitirá realizar la recopilación de los datos.

En la tercera etapa, Datos, es donde se aplican los procesos de recopilación de datos y se trabaja la limpieza de los mismos. En la cuarta etapa, Análisis, el fin es el manejo de los datos obtenidos y la búsqueda de información. Y finalmente, en la última etapa, Conclusión, se presenta la solución del problema o las conclusiones a las que se ha llegado. En esta etapa se puede apreciar el aprendizaje realizado dentro del problema propuesto. La lectura, comparación, interpretación e inferencia son los medios que se utilizarán durante la etapa

ISBN 978-84-945722-3-4

Análisis para obtener la mayor cantidad de información posible o en la etapa Conclusión para poder establecer las conclusiones más adecuadas.

Esto implica que el problema ideal para trabajar la competencia matemática relacionada con la gestión de datos a nivel escolar, exige que el profesor proponga una situación problema con las siguientes características: un problema a resolverse con los datos recogidos o sobre el cual se debe concluir mediante la información obtenida; un problema en el cual debe conocerse el contexto donde se desarrolla; un problema en el que dentro de lo posible los alumnos puedan decidir sobre la población a trabajar, las preguntas a realizar y el método para recopilar los datos; un problema donde se procure que los alumnos determinen como trabajar los datos para obtener la información buscada y no que el profesor les indique que hacer con los datos, donde los alumnos tengan libertad para experimentar con la construcción de las preguntas para la obtención de información y no que el profesor les proponga una lista de preguntas a responder desde los datos en una tabla o en un gráfico. Finalmente, es importante que los alumnos puedan distinguir y construir diferentes tipos de pregunta (de lectura, de interpretación y de inferencia), y culminar el ciclo PPDAC respondiendo a la problemática planteada inicialmente.

Una ventaja en la creación de problemas para la gestión de datos es que es posible hacer muchas variaciones a un problema original, lo que resulta completamente novedoso para los alumnos. Esta ventaja se debe a que en la etapa Análisis se tienen múltiples conceptos y procedimientos que pueden combinarse entre sí. Lo que permite que el profesor pueda reutilizar los contextos. Así a continuación mostramos un ejemplo para ilustrar lo mencionado.

Situación problema: Las indicaciones de la Dirección de un colegio es que cada salón prepare solo un acto para la actuación por el día de la primavera. La profesora Edith solicitó a sus alumnos, del primer grado “B” de primaria, propuestas para el acto a presentar en la actuación y obtuvo tres opciones: un baile, una canción y una representación cómica. Como tienen que preparar solo un acto, la profesora Edith pide a los alumnos que la ayuden a decidir cuál van presentar en la actuación.

ISBN 978-84-945722-3-4

La situación problema propuesta no implica el desarrollo de alguna tarea estadística en particular, es de carácter abierto y está dirigida a alumnos de primer grado. El problema consiste en decidir qué acto llevarán a la actuación del día de la primavera, lo que se puede conseguir mediante algunas preguntas puntuales relacionadas con cada etapa del ciclo PPDAC, como mostramos en la siguiente tabla.

Tabla 1. Tres propuestas para resolver la situación problema siguiendo las etapas del ciclo PPDAC.

ETAPA	**PROPUESTA 1**	**PROPUESTA 2**	**PROPUESTA 3**
Problema	Decidir qué acto llevará el primer grado "B" a la actuación del día de la primavera. ¿Qué respuesta debe obtenerse de un alumno para poder resolver el problema?	Decidir qué acto llevará el primer grado "B" a la actuación del día de la primavera. ¿Qué acto prefieres que se presente en la actuación de los tres propuestos, qué respuesta obtendrías?	Decidir qué acto llevará el primer grado "B" a la actuación del día de la primavera. ¿Qué respuesta debe obtenerse de un alumno para poder resolver el problema?
Plan	¿Qué pregunta debo realizar para obtener la respuesta esperada?	¿A quién debo hacer la pregunta indicada?	¿Qué pregunta debo realizar para obtener la respuesta esperada?
Datos	¿Cómo puedo recoger las respuestas de los alumnos?	¿Cómo puedo registrar la respuesta de cada alumno?	¿Cómo realizó la pregunta a cada alumno y cómo

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

			registro su respuesta?
Análisis	Organiza las respuestas obtenidas en una tabla.	Presenta las respuestas obtenidas en un gráfico.	Construye un gráfico de barras en base a los datos organizados en la tabla presentada.
Conclusión	¿Qué acto llevará el aula de la profesora Edith a la actuación? ¿Por qué?	¿Qué acto llevará el aula de la profesora Edith a la actuación? ¿Por qué?	¿Qué acto llevará el aula de la profesora Edith a la actuación? ¿Por qué?

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2009). Retos para la formación estadística de los profesores. II Encontro de Probabilidade e Estatística na Scola. Universidade do Minho, Braga, Portugal. http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Formprofesores.pdf Consultado 5/01/2017

Malaspina, U. (2015). Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemáticas, 2016, Año 11 Número 15, pp 321-331. Costa Rica

Wild, C.J. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. International Statistical Review (1999), 67, 3, 223-265.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-126

REGLA Y COMPÁS

Mª Carmen Casares Antón – Elena Saudinós Hernández
ccasaresanton@educa.madrid.org - elena.saudinos@educa.madrid.org
IES Pedro Duque (Leganés), España – IES Valle Inclán (Torrejón de Ardoz), España

Núcleo temático: II. La resolución de problemas en Matemáticas
Modalidad: Taller (T)
Nivel educativo: Educación Secundaria
Palabras clave: Geometría métrica, regla, compás

Resumen

Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω
Inscripción en el frontispicio de la Academia de Platón

El objetivo del taller es reproducir las construcciones con regla y compás tal y como se enseñaban en la Antigua Grecia en el convencimiento de que la geometría, separada de la aritmética, desarrolla capacidades diferentes como el reconocimiento de figuras o la visión espacial.

En un primer momento se dividirá a los participantes en grupos con uno de los siguientes instrumentos: regla no graduada (trozo de cartón con borde recto), regla no graduada de bordes paralelos (listón de madera) y un compás (cuerda) y se les propondrá el aprendizaje de las construcciones básicas permitidas con cada instrumento y la resolución de problemas o construcciones menos triviales. En un segundo tiempo se reagruparán los participantes de manera que en cada equipo haya al menos alguien ya versado en regla y en compás, y sus componentes se centrarán en las posibilidades geométricas que les concede aunar sus instrumentos. Se incidirá en las construcciones que establecen la equivalencia entre regla finita e infinita y entre compás colapsable y fijo. Por último, y según la disponibilidad del tiempo, se propondrán diferentes ejercicios y problemas de geometría métrica.

Introducción

Las construcciones de regla y compás son trazados de rectas, ángulos y otros objetos geométricos que se pueden realizar con esos dos instrumentos con uso restringido según establecieron los griegos en la antigüedad. En efecto, el compás y la regla de las construcciones clásicas son idealizaciones de sus equivalentes en el mundo real. Se diferencian en que el compás puede abrirse hasta alcanzar cualquier radio y la regla no está marcada. El compás dibuja una circunferencia si se conoce su centro y un punto sobre ella y la regla permite el trazado de la recta que pasa por dos puntos. Como se verá en el taller el

ISBN 978-84-945722-3-4

compás puede mantener el radio tras el trazado de la circunferencia o no y la regla puede ser finita o infinita.

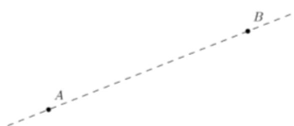
El taller comienza con instrumentos reales que permiten adaptaciones de las normas clásicas. Pero posteriormente se incide en las construcciones con los instrumentos idealizados, según se hacían en la Antigua Grecia. El taller concluirá con algunas de las construcciones más sofisticadas. Como ampliación se ofrecerá un resumen de los teoremas fundamentan teóricamente el taller.

Con regla o compás reales

En la primera parte del taller los participantes se agrupan según tengan la posesión de un instrumento dado: un trozo de cartón con un borde recto o un listón de madera con bordes paralelos a modo de regla o un trozo de cuerda que hará las veces de compás. Con el instrumento y un lápiz o carboncillo deberán ser capaces de realizar sobre papel las operaciones básicas que su instrumento ofrece para combinarlas posteriormente en construcciones más sofisticadas.

Para cada equipo se proponen diferentes ejercicios. Se incluyen la realización de los primeros como pauta de trabajo.

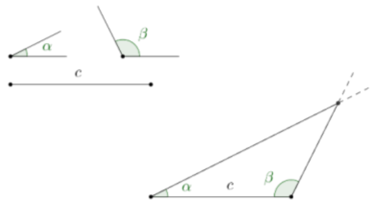
1. Equipo con regla no graduada dada por un cartón con borde rectilíneo
    a. Operaciones elementales
        i. Trazado de una recta por dos puntos: basta apoyar el borde rectilíneo sobre los dos puntos y deslizar el lápiz por el borde.



        ii. Intersección de dos rectas.
        iii. Transporte de un segmento.
        iv. Transporte de un ángulo.
        v. Trazado de una paralela.
    b. Problemas solubles

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

i. Construcción de un triángulo dados un lado y dos ángulos: como la regla de cartón permite el traslado de ángulos, con ella se coloca sobre el lado conocido los ángulo adyacentes a ese lado.

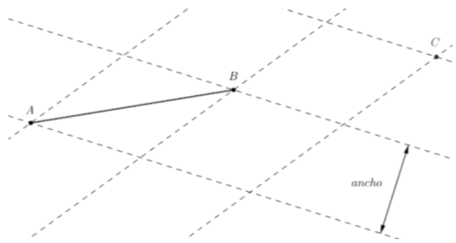


ii. Construcción de un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido.

iii. Corolario: construcción de paralelogramos dados los dos lados (o diagonales) y el ángulo que forman.

2. <u>Equipo con regla no graduada dada por un listón de bordes paralelos</u>
   a. Operaciones elementales
      i. Trazado de una recta por dos puntos: de nuevo se realiza colocando uno de los bordes lisos sobre los dos puntos y deslizando el lápiz sobre el borde.
      ii. Trazado de rectas paralelas con distancia igual al ancho del listón que pasan por dos puntos dados.
      iii. Trazado de paralela a una distancia dada.
   b. Problemas solubles
      i. Duplicación de un segmento mayor que el ancho de la regla: se coloca la regla trasversalmente de modo que apoye cada lado en uno se los puntos diferentes y se dibujan los dos bordes. Se traza una tercera paralela igualmente separada. Se procede de igual manera pero intercambiando el bore en que se apoya cada punto. Se traza la tercera paralela que corta a la anterior en el punto buscado.

ISBN 978-84-945722-3-4



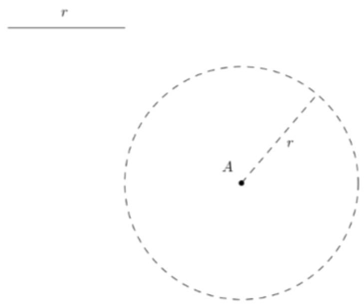
ii. Bisectriz de un ángulo.
iii. Perpendicular a una recta.
iv. División de un segmento en partes iguales.

3. <u>Equipo con compás dado por una cuerda</u>

Con el compás como único instrumento no pueden trazarse segmentos, cuando sea necesario este objeto geométrico se sustituirá por par de puntos.

a. Operaciones elementales

i. Trazado de una circunferencia de centro y radio dado: se forma una lazo con la cuerda de forma que los dos extremos se fijen al centro de la circunferencia a trazar de manera que tensada la cuerda coincida en longitud con el radio. Se deja deslizar el lápiz.



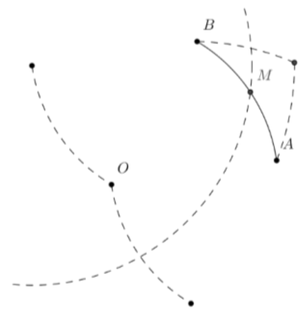
ii. Intersección de dos circunferencias.

b. Problemas solubles con compás

i. Determinación del punto medio de un arco (equivalente al trazado de la bisectriz): se trazan dos circunferencias de centro en cada extremo y radio la distancia al centro, y se marca sobre ellos dos puntos que distan del centro lo que los extremos del arco. Desde ellos se trazan

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

dos nuevas circunferencias que pasen por los extremos del arco. Es sencillo probar que las circunferencias concéntricas a las anteriores con radio igual a la distancia de la última intersección con el rigen del arco original pasan por el punto medio.



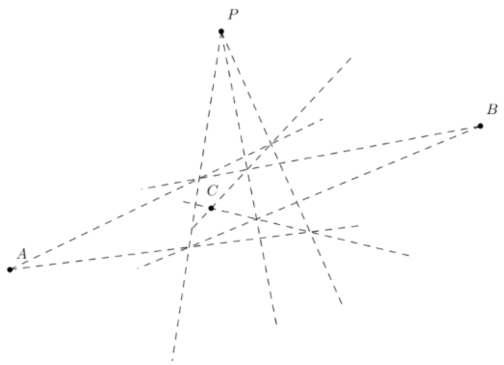
ii. Trazado de un punto alineado con otros dos (equivalente a la prolongación de la recta).
iii. Cálculo del punto de intersección de las rectas que determinan dos pares de puntos, sin el trazado de las rectas (equivalente a la intersección de rectas).
iv. Determinación de un punto alineado con otros dos en un circunferencia dada (equivalente a la intersección de recta y circunferencia).
v. Obtención de un punto alineado con otros dos que diste de uno de ellos una cantidad dada (equivalente a la prolongación de la recta finita).

Cuando concluyan las tareas cada grupo dedicarán 5 minutos para exponer en el grupo grande las posibilidades que ofrece su instrumento.

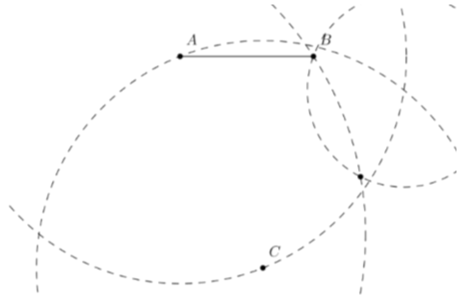
Con regla y compás reales

En un segundo momento se reagrupan los participantes en equipos, de al menos tres personas, que contengan un especialista en cada instrumento diferente. En cada equipo se argumenta y debate para descartar una de las dos reglas.

La primera tarea que realizarán los grupos es comprobar que la recta finita es igual a la recta infinita y que el compás colapsable es igual al compás fijo. En efecto, si se desea trazar el segmento que une dos puntos separados una distancia mayor que el tamaño de la regla, la construcción:



muestra como encontrar un punto colineal a los dados y que dista de ambos menor distancia que los originales. Por otro lado, la construcción



lleva sobre un punto la distancia entre dos originales.

Además se entrenarán en las cuatro operaciones básicas (trazado de una recta por dos puntos, intersección de dos rectas, transporte de un segmento y transporte de un ángulo) que serán en adelante las únicas operaciones permitidas. A continuación se trabajarán en problemas solubles con regla y compás:

- Construcción de un triángulo conocidos tres lados: ahora se utiliza el compás, fijo, para trasladar segmentos.
- Construcción de un triángulo conocidos dos lados y ángulo opuesto.

Y se elaboran construcciones más complicadas:

- Trazado de la mediatriz, bisectriz.

ISBN 978-84-945722-3-4

- Construcción de un triángulo dados sus lados o alguno de ellos y una altura, mediana o bisectriz.
- Tangente de una circunferencia que pasa por un punto: en este caso se utiliza que radio y tangente forman un recto, y que todos los ángulo rectos que puede trazarse sobre dos puntos están sobre una circunferencia.
- Tangentes comunes a dos circunferencias (interiores y exteriores).

Otras construcciones geométricas

La parte práctica del taller concluye con la aplicación de los conceptos trabajados en problemas de geometría plana. En esta sección es conveniente que los participantes dispongan de regla (juego de escuadra y cartabón) y compás moderno, para realizar trazados más cómodos. La idea es abordar problemas de geometría métrica para los que se requiera conocimientos matemáticos básicos (geometría de triángulo y otros polígonos, movimientos en el plano, simetrías, homotecias...)

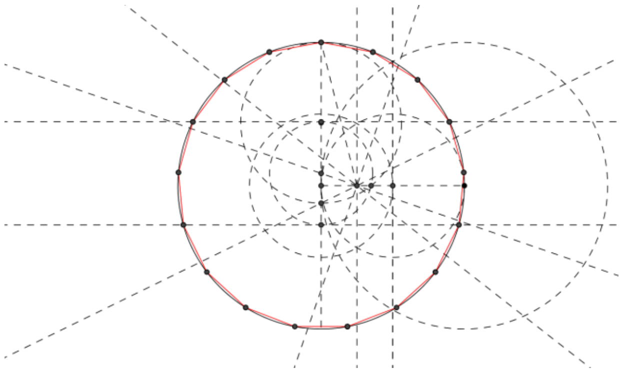
Entre los problemas propuestos estarían los siguientes:

1. Construcción de un rectángulo de base dada de igual área que un polígono dado: se utiliza la proposición 44 de los Elementos de Euclides.
2. Construcción de un cuadrado de igual área que un polígono dado.
3. Cálculo de una figura semejante a una dada doblando el área.
4. Trazado de una recta concurrente a otras dos o el trazado de su bisectriz.
5. Encontrar un segmento que pase por un punto en el interior de un ángulo agudo y que apoye sus extremos sobre ambos lados del ángulo de manera que el punto divida el segmento en dos partes en proporción 1:2.
6. Trazado de un triángulo isósceles dado su lado y su ángulo desigual.
7. Trazado de una circunferencia que pasa por dos puntos y es tangente a una recta o una circunferencia dada.
8. Determinación de una circunferencia tangente a dos rectas y que pase por un punto o sea tangente a otra circunferencia.
9. Construir un triángulo conocidas sus tres medianas.

ISBN 978-84-945722-3-4

10. Trazado de una recta que pase por el punto de intersección de dos circunferencias y corte a ambas circunferencias formando cuerdas iguales.
11. Construir un cuadrado que tenga un vértice en un punto dado y los dos vértices adyacente apoyados en dos rectas que no pasan por el punto.

También se abordará el trazado del heptadecágono en honor a Carl F. Gauss, como ejemplo de los polígonos cuyo trazado es realizable con regla y compás.



Ampliación

El taller como tal es eminentemente práctico y, por tanto, los participantes ocuparán casi todo su tiempo en la realización de construcciones geométrica. Sin embargo no puede desestimarse el fundamento teórico de las operaciones geométricas que se utilizan durante su desarrollo. Este argumento justifica que, concluido el taller, se ofrezca a los participantes una selección de textos originales y materiales elaborados por la profesoras sobre los principales resultados y teoremas que apuntalan las construcciones de la geometría clásica griega (teorema de Poncelet, Mohr-Mascheroni y Poncelet-Steiner, que prueban la mayor versatilidad del compás sobre la regla en las construcciones geométricas).

Sin embargo, tan interesante como mostrar lo que es posible dibujar con regla y compás es mostrar lo que no se puede construir con los mismos instrumentos: duplicación del cubo, la trisección del ángulo, la cuadratura del círculo ente otros y la inscripción de polígonos en la circunferencia.

Se recordarán el teorema de Wantzell sobre números construibles, y se mencionarán los resultados Lambert y Lindemann sobre la irracionalidad y la trascendencia de π. Se incidirá

ISBN 978-84-945722-3-4

en el teorema de Gauss que caracteriza el número de lados que puede tener un polígono inscribible y que da paso a la teoría de grupo finitos que desarrolló Galois.

Se realizará un repaso y se ofrecerá, en su caso, enlaces a la documentación realizada por las profesoras.

Además, y para concluir, se ofrecerán argumentos para rebatir las trisección del ángulo con dobleces de papel o el trazado del heptágono regular con regla marcada dentro del marco clásico de regla y compás.

Referencias bibliográficas

Puig Adam, P. (1970). *Curso de Geometría Métrica*. *Tomos I y II*. Madrid: Biblioteca Matemáticas S.L.

Coxeter H.S.M. (1971). *Fundamentos de Geometría*. México: Ed. Limusa.

Euclides (2000). *Elementos*. Madrid: Ed. Gredos.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-128

ENSEÑANZA POR INVESTIGACIÓN: ESTUDIO DEL CÁLCULO VECTORIAL EN LA UNIVERSIDAD

Viviana Angélica Costa
vacosta@ing.unlp.edu.ar
IMApEC, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, Buenos Aires, Argentina

Núcleo temático: Investigación en Educación Matemática
Modalidad: T
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: Didáctica, Cálculo Vectorial, Enseñanza por Investigación

Resumen

En este trabajo con modalidad de taller, destinado a docentes e investigadores en Didáctica de la Matemática que se desempeñen en especial en el nivel universitario, se abordan los principales lineamientos de la denominada Enseñanza por Investigación (EI) propuesta por Chevallard con el propósito de enfrentar el Paradigma Monumentalista en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). En una primera etapa se trabaja con los participantes en torno a las siguientes preguntas: ¿Cuáles son las problemáticas actuales en la enseñanza de la matemática en la universidad? ¿Por qué es necesario cambiar de una enseñanza Monumentalista a una por Investigación? ¿Cuáles características tiene una EI? ¿Cuáles herramientas proporciona la TAD para desarrollar una EI? Luego, a modo de ejemplo se presenta el diseño, implementación y análisis de una EI implementada en una Facultad de Ingeniería para el estudio del Cálculo Vectorial. Finalmente se propone a los participantes realizar una actividad en grupos con el fin de elaborar una propuesta que permita introducir en una institución la EI para el estudio de un tema a determinar, cerrando el taller con una reflexión sobre las posibilidades actuales de implementar este tipo de enseñanza o algunos gestos característicos de ella.

Introducción

El objetivo general del taller es acercar a los participantes en el conocimiento de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) desarrollada por Yves Chevallard y de la Enseñanza por Investigación (EI) que propone esta teoría, ofreciéndoles herramientas útiles que les permitan analizar y enfrentar varios de los problemas actuales en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática, causados en general por el denominado Paradigma Monumentalista.

ISBN 978-84-945722-3-4

Para esto, en una primera etapa, se presentan las herramientas básicas que proporciona la TAD y las características principales de la denomina EI y cuáles herramientas didácticas permitirían introducir este estilo de enseñanza en el aula (Otero, Fanaro, Llanos, 2013). Seguido a esto y a modo de ejemplo se muestra el diseño, implementación y análisis de una EI para el estudio del Cálculo Vectorial que fue implementada en una Facultad de Ingeniería de una Universidad Argentina a través de un dispositivo didáctico denominado Recorridos de Estudio e Investigación (REI). Finalmente se propondrá a los participantes realizar una actividad que tendrá por objetivo el esbozo de una propuesta que permita introducir la EI para el estudio de un contenido matemático que sea de interés para el grupo, cerrando con una reflexión sobre los temas tratados.

Marco teórico

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) desarrollada por Yves Chevallard (1985, 1999, 2009, 2015) parte de concebir a la matemática y al hacer matemática como una actividad humana antropológica y ha definido con precisión los fenómenos denominados: *monumentalización del saber* y *pérdida de sentido* de las preguntas que se estudian en la escuela o en la universidad. Con *monumentalización* se refiere a la semejanza que tiene el estudio de los contenidos matemáticos en las instituciones educativas, con la visita de monumentos, en el sentido que son objetos ya creados, que se los venera y muchas veces sin sentido. Por *pérdida de sentido* se identifica al fenómeno que refiere al estudio de los contenidos curriculares sin saber muchas de las veces en respuesta a cuales preguntas se estudian, están aislados y sin conexión con otros temas. Con el propósito de enfrentar estos fenómenos la TAD propone un cambio en los modos de enseñar pasando a la denominada Enseñanza por Investigación (EI). Este modo de enseñar pretende introducir en el aula ciertos gestos en los alumnos propios a los de un investigador. Para llevar al aula la EI la TAD propone hacerlo a partir del dispositivo didáctico que denomina Recorridos de Estudio y de Investigación (REI). Los REI se inician con una *pregunta generatriz* (Q) y el proceso de estudio se organiza en torno a ella con el objetivo de aportar una respuesta. La pregunta Q, seleccionada por el profesor deberá poseer la propiedad de generar la formulación de numerosas preguntas derivadas que den sentido y una razón de ser a los contenidos matemáticos a estudiar. Además para la viabilidad de los REI, es necesario que se den cambios en los roles de los alumnos, pasando de una actitud en general pasiva en las clases

ISBN 978-84-945722-3-4

a una actitud activa y colaborativa, donde el saber sea algo por descubrir, en vez de ser una mera información que el profesor les facilita sin debate ni discusión.

Desarrollo

A continuación y a modo de ejemplo se presentan las etapas que dieron lugar a la implementación y posterior análisis de una EI experimentada en una Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata (Argentina) para el estudio del Cálculo Vectorial.

- **Análisis previo**

Antes de la experimentación de una EI mediante un REI es necesario llevar a cabo un análisis previo en el marco de la TAD que debe contemplar varios aspectos.

Uno de ellos es la selección por parte del profesor de la *pregunta generatriz* que iniciaría el REI con el objetivo de darle una razón de ser al estudio de los contenidos matemáticos a los que se pretende dar respuesta. En combinación con esto se analizan los posibles recorridos de estudio e investigación que generaría tal pregunta, construyéndose así una cadena de preguntas y respuestas, que se denomina Modelo Praxeológico de Referencia (MPR).

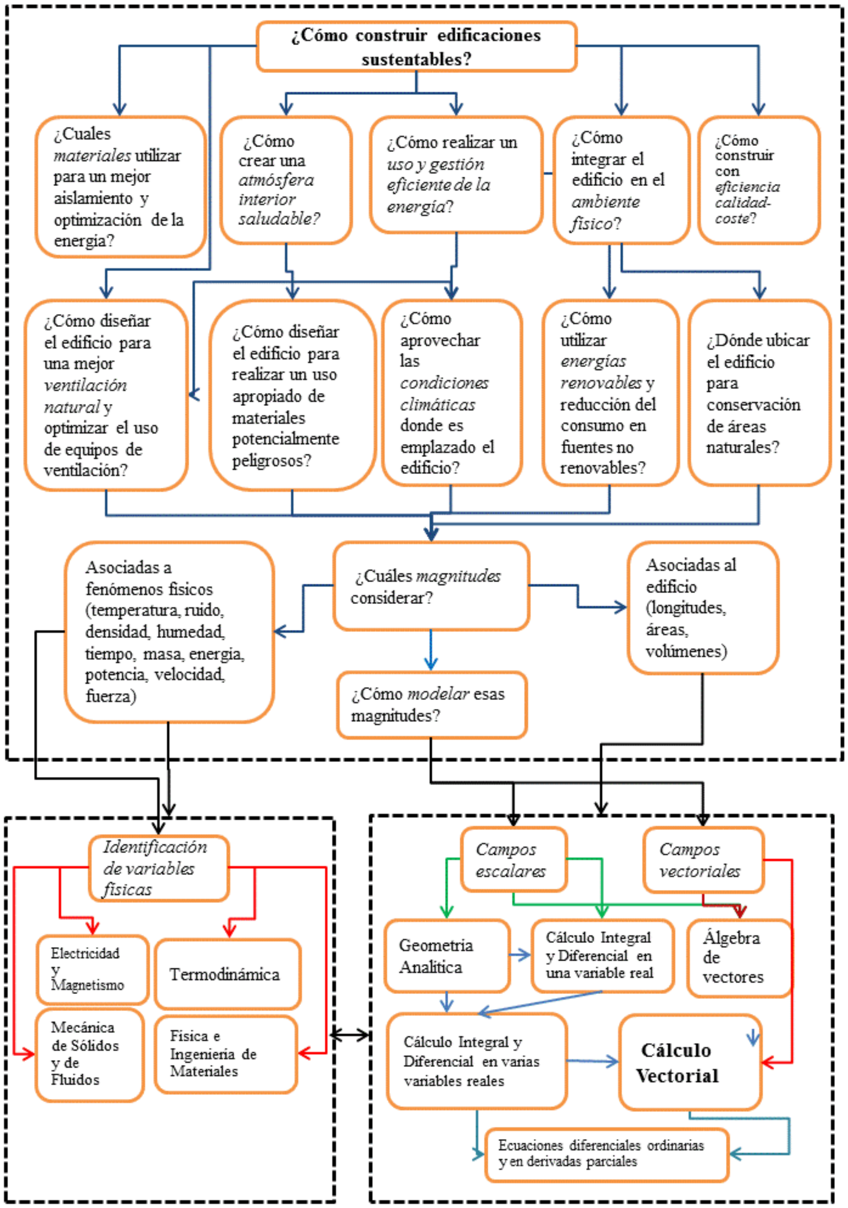
Para el ejemplo que aquí se presenta, los contenidos matemáticos que se esperaban estudiar eran los relativos al Cálculo Vectorial y considerando la estrecha vinculación de este sector de la matemática con la física en carreras de ingeniería se propuso un REI *codisciplinar* en física y matemática, que se inició con la *pregunta generatriz*: ¿*Cómo construir edificaciones sustentables*?

A partir de seleccionar Q, se construye el MPR, conformado por una serie de pares de preguntas y de respuestas relativas a fenómenos físicos y naturales asociados a la optimización y uso racional de la energía y de los recursos naturales en la construcción de edificaciones sustentables (Cuadro 1). Dichos fenómenos serían descriptos por *campos escalares* tales son la temperatura y la densidad, entre otros; y por *campos vectoriales*, como son los campos de gradientes de temperaturas y campos de velocidades de un fluido. Así mismo, el estudio de las variaciones de dichos *campos escalares* y *vectoriales* daría lugar a los conceptos matemáticos de rotor, divergencia, laplaciano y gradiente, y al estudio de tares y técnicas, entre las de modelar, describir, identificar variables, calcular, calcular longitudes, calcular áreas superficiales, calcular flujo y circulación y argumentar, entre otras.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

En esta primera etapa también el investigador debe analizar los condicionamientos que podrían obstaculizar el desarrollo del REI en una institución en particular, según los denominados Niveles de Codeterminación Didáctica establecidos en el marco de la TAD. En la investigación que aquí se presenta se encontró que los condicionamientos más fuertes se hallan en los *niveles* superiores de la escala (sociedad-escuela) donde se encuentran más arraigado el paradigma de la *enseñanza tradicional* y el rol del ingeniero, más técnico que científico. Esto se encuentra en detalle en Costa, Arlego, Otero (2014).

ISBN 978-84-945722-3-4



Cuadro 1: Modelo Praxeológico de Referencia.

ISBN 978-84-945722-3-4

- **Experimentación de una Enseñanza por Investigación**

Luego del análisis previo, se experimentó el REI que se inició a partir de la *pregunta generatriz*: *¿Cómo construir edificaciones sustentables?* en un curso habitual de matemática con estudiantes de primer año (18 a 20 años) de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata en la República Argentina (FI UNLP) de la carrera Ingeniería Aeronáutica que tuvo una duración de 12 encuentros de cuatro horas cada uno.

Los estudiantes dieron inicio al REI a partir de seleccionar un hangar (edificio grande y abierto, de techo sólido, destinado a guardar o reparar aparatos de aviación) y preguntarse sobre su sustentabilidad. En particular se cuestionaron los siguientes aspectos: "*uso eficiente de los recursos naturales*", "*relación costo-beneficio*", "*uso de energías renovables*", "*cuidado del medio ambiente*" y "*aprovechamiento de los fenómenos naturales*", entre otros. Surgieron así, las primeras preguntas derivadas ¿*Qué cantidad de paneles solares se podrían colocar en el techo del edificio y cuál sería la energía que proveerían*? Para dar respuesta, surgen preguntas vinculadas a la geometría del edificio: ¿*Cuáles magnitudes asociadas a la geometría del edificio considerar*? ¿*Cómo calcular esas magnitudes*? ¿*Cómo calcular el área de una superficie*?

Luego surgieron preguntas asociadas a los cuestionamientos sobre la sustentabilidad del hangar: ¿*Cuáles fenómenos naturales considerar*? ¿*Cómo modelar desde la matemática esos fenómenos*? *¿Son magnitudes escalares o vectoriales?* ¿*Cómo describir matemáticamente un campo escalar y vectorial*? Se mencionaron los fenómenos: viento, sol, lluvia, humedad y temperatura, representándolos mediante *campos escalares* o *campos vectoriales*. Esto dio lugar al estudio del concepto central del Cálculo Vectorial como es el de *campo vectorial*.

En la última etapa del REI, a partir de preguntas del estilo: ¿*Cómo "circula" o "fluye" el aire en el interior del edificio*? ¿*Cómo fluye el calor dentro del edificio*? surgieron las nociones de *circulación* y *flujo* y las preguntas derivadas relativas a su cálculo matemático. Además, la introducción de los temas: *fuentes* y *sumideros de fluidos*, *flujo de fluidos*, *conservación de la masa*, *incompresibilidad* y *flujos rotacionales e irrotacionales de fluidos*, permitieron el estudio de aspectos básicas de Mecánica de los Fluidos y de Termodinámica, y de Algebra y Cálculo Vectorial: operaciones algebraicas entre magnitudes escalares y

ISBN 978-84-945722-3-4

vectoriales, operador nabla, comportamiento de un campo vectorial: flujo y circulación, variaciones de un campo vectorial: rotor y divergencia (Costa, Arlego, Otero, 2014).

- **Análisis**

En una etapa posterior a la implementación del REI se realiza un análisis cualitativo que incluyó varios aspectos utilizando las herramientas que ofrece la TAD. La información obtenida durante la implementación del REI mediante la observación participante y la recolección de los protocolos de los alumnos se analizó cualitativamente de modo de interpretar en términos teóricos el fenómeno estudiado. El objetivo es el de investigar la introducción de la EI en el aula a partir de la experimentación de un REI, obteniendo información de su viabilidad, de cuales gestos surgen, cuáles son sus ventajas y desventajas y cuales sus condicionamientos, ya que las experiencias de implementaciones de una EI en el aula de matemática en la universidad aún son pocas y aisladas.

Uno de los aspectos que a analizar es cuales contenidos se estudian a partir de las preguntas derivadas que surgen de la *pregunta generatriz*, es decir, cuál es el recorrido efectivamente realizado. Para el caso que se presenta, el REI permitió el estudio e investigación de elementos centrales del Cálculo Vectorial: campo vectorial, campo escalar, superficies, área de una superficie, curvas: representación paramétrica, operaciones algebraicas entre campos escalares y vectoriales, integrales de superficie, integrales de línea, estudio de las variaciones de un campo vectorial: rotor y divergencia, estudio de las variaciones de un campo escalar: Gradiente y Laplaciano, y los Teoremas de Stokes, Gauss y Green. Conjuntamente con esto, la *pregunta generatriz* permitió el estudio de nociones básicas de: Física de los Fluidos, Mecánica de los Fluidos y Termodinámica. Tal estudio conjunto, matemática y física, permitió generar en el aula un debate en relación al significado físico de las magnitudes escalares y vectoriales calculadas matemáticamente.

Además, la *pregunta generatriz* permitió el estudio de un *problema abierto*, para el cual los alumnos tuvieron que: seleccionar, describir, asignar magnitudes vectoriales o escalares, asignar medidas y unidades a las variables seleccionadas; y además para ello, buscar información, probar, proponer respuestas, defenderlas, modificarlas, discutirlas, comunicarlas y dar conclusiones. Esto contribuiría en la formación de los estudiantes de ingeniería en el desarrollo de competencias necesarias para la identificación y solución de

ISBN 978-84-945722-3-4

problemas abiertos. Además, los tipos de *tareas* que predominaron durante el REI fueron las: de *modelar* situaciones de la "realidad"; *identificar* y *describir variables físicas de carácter escalar o vectorial* (temperatura, humedad, flujo de aire, radiación solar); *establecer* ecuaciones matemáticas que representen los modelos y la de *plantear* y *calcular* (volúmenes, áreas de superficies y longitudes de arco de curva).

El otro aspecto a analizar se vincula con la pregunta ¿Cómo funcionan la *topogénesis*, la *cronogénesis* y la *mesogénesis* durante la implementación de un REI en la universidad? Estas son *funciones didácticas* que intentan explicar ¿Quiénes? ¿Cuándo? y ¿Cómo? se llevan a cabo las interacciones didácticas en una clase. De la EI llevada al aula mediante el REI se observó que el proceso de estudio fue dinámico. Además la descripción *topogenética* de las clases permitió observar que en su gran mayoría los responsables en hacer las preguntas y en aportar respuesta a ellas estuvieron en su mayoría a cargo de los alumnos. El profesor tuvo un rol de observador y colaboró en el estudio de los temas que así lo requería el grupo de alumnos. Este hecho, implicó en la función *cronogenética* una dilatación del tiempo didáctico.

El último aspecto a considerar en el análisis a posteriori al introducir una EI se vincula a la pregunta ¿Cómo se desarrollan las diferentes *dialécticas* que son esenciales para la gestión de un REI codisciplinar? Las *dialécticas* son saberes o saber-hacer, considerados "gestos del estudio y de la investigación", descriptas en la TAD. En la investigación que se presenta se observó de la experimentación que en mayor o menor medida, todas las dialécticas funcionaron durante el REI. Esto se encuentra en detalle en (Costa, Arlego, Otero, 2015).

Conclusiones

En este trabajo con modalidad de taller se presentaron sucintamente algunos aspectos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico y de cómo llevar al aula de clase la Enseñanza por Investigación mediante los dispositivos didácticos Recorridos de Estudio e Investigación. Además el caso expuesto, de un REI implementado en una Facultad de Ingeniería para el estudio del Cálculo Vectorial, serviría de ejemplo para acercar tal conocimiento a otros profesores interesados en proponer cambios en los modos de enseñar, adoptando para sus prácticas docentes, algunas o varias de las herramientas que proporciona tal teoría.

La implementación de los REI en el aula de matemática, tienen limitaciones y condicionamientos que requieren de un proceso de investigación, de realimentación, de

ISBN 978-84-945722-3-4

cambios a nivel institucional, de currículo y de cambios en el rol del profesor, que requiere una remodelación profunda de su relación con el saber matemático, que pasa de ser algo que se sabe por anticipado, a algo por descubrir e investigar.

Finalmente se espera durante el taller reflexionar sobre algunas de las siguientes cuestiones: ¿Cómo podrían los REI ser integrados a los programas de estudio? ¿Se incorporarían como una actividad a realizar "fuera" o "dentro" de la clase? ¿Cuáles condiciones serían beneficiosas para su desarrollo? ¿Cómo adecuar los tiempos académicos al implementar dispositivos didácticos del tipo REI en las clases?

Referencias bibliográficas

Costa, V. A., Arlego, M., & Otero, M. R. (2014). Enseñanza del Cálculo Vectorial en la Universidad: propuesta de Recorridos de Estudio e Investigación. Revista de formación e innovación educativa universitaria, 7(1), 20-40.

Costa, V. A., Arlego, M., & Otero, M. R. (2015). Las dialécticas en un Recorrido de Estudio e Investigación para la enseñanza del Cálculo Vectorial en la Universidad. Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria, 8(3), 146-161.

Chevallard, Y. (1985). La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné. Paris, Francia: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. Recherches en Didactique des Mathématiques, 19(2), 221-266. http://servidor-opsu.tach.ula.ve/profeso/guerr_o/praticamatema/referencias/practica_marcosteoricos3/Chevallard_Teoria_Antropologica.pdf

Chevallard, Y. (2009). La notion de PER: problèmes et avancées. IUFM Toulouse, Francia. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2015). Teaching Mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm. In The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education, 173-187. Springer International Publishing. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/RL_Chevallard.pdf

Otero, M. R., Fanaro, M. D. L. Á., & Llanos, V. C. (2013). La Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo y el Inquiry: un análisis desde la enseñanza de la Matemática y la Física. Revista Electrónica de Investigación en educación en Ciencias, 8(1), 77-89. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=273327598007

T-153

UNA APUESTA AL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO FLEXIBLE. LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES.

Teresa Isabel Pérez Antuña - Nora Ravaioli Rodriguez
tperezan@gmail.com – nravaioli@gmail.com
Instituto de profesores Artigas (IPA) - Uruguay

Núcleo temático: I. Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.
Modalidad: T
Nivel educativo: Medio o Secundario (12 a 15 años)
Palabras clave: aritmética-álgebra, resolución ecuaciones, fluidez procedimental

Resumo

El aprendizaje de la resolución de ecuaciones al inicio de la enseñanza media es un centro de tensiones donde se conjugan numerosas expectativas e ideas previas de los docentes, las familias y los estudiantes.

Como sostiene Kaput, (1996)"El actual fracaso escolar en el campo del álgebra ha demostrado que los intentos por ligar la experiencia de los estudiantes a los formalismos después de haberlos introducido no resultan adecuados. Parece ser que 'si algo carece de sentido cuando se aprende, la sensación permanece a lo largo del tiempo'"

¿Es posible fortalecer la práctica de resolución de ecuaciones a la vez que se construye el concepto de ecuación?

En este taller, nos proponemos compartir actividades que favorezcan la reflexión sobre el significado de método y estrategia de resolución de ecuaciones y sobre posibles alternativas de enseñanza, basadas en una práctica productiva.

Motivación

Desde nuestro lugar de docentes de didáctica y de supervisión hemos podido observar que, al inicio del trabajo con ecuaciones, es común que estas se presenten a partir de situaciones contextualizadas, aunque en muchos casos la traducción al lenguaje algebraico responde a una necesidad del docente y no del alumno. Luego se resuelven unos pocos casos "por tanteo" o haciendo uso de estrategias informales para rápidamente automatizar las "técnicas de pasaje" respondiendo nuevamente a una necesidad del docente. Se da muy poco espacio para que el estudiante experimente en la resolución de ecuaciones, utilizando estrategias artesanales y contextualizadas a cada caso a resolver, sin aplicar un "método estándar".

ISBN 978-84-945722-3-4

Esa introducción prematura, de "métodos", orientada exclusivamente a la resolución de ecuaciones de primer grado, con el propósito de automatizar lo antes posible las "reglas de pasaje" genera, como reacción en el alumno, la necesidad de aplicar mecánicamente reglas y/o a "pasar cosas para un lado y para el otro" sin un criterio claro de prioridad y sin generar mecanismos de control sobre lo que hace. Amerom (2002, p.9) al analizar las dificultades de aprendizaje en relación al álgebra concluye que: "Cuando las ecuaciones surgen de una buena comprensión de las relaciones subyacentes – cuando estas tienen sentido para el alumno – se ha establecido que los estudiantes son más exitosos en su resolución "

El applet cover-up: http://goo.gl/KxhmPP, del Freudenthal Institute, nos inspiró para utilizarlo como espacio de experimentación, en un contexto matemático, permitiendo construir la noción de ecuación, desde el objetivo de su resolución, entendido como "encontrar algún valor que asegure la igualdad" y no como una serie de reglas sin sentido para el estudiante. Favoreciendo, adicionalmente, la consolidación y reflexión sobre las prácticas operatorias de la aritmética, lo que permite revisitar y reconceptualizar las mismas a través de una práctica de carácter productivo (en contraposición a reproductivo)

En este marco es que nos proponemos trabajar en formato taller promoviendo en los participantes la reflexión sobre una propuesta de enseñanza de la resolución de ecuaciones, que en un ambiente de experimentación, permita al estudiante desarrollar estrategias de resolución a la vez que construye la noción de ecuación[1].

Fundamento teórico

Nos ubicamos en el punto vista de Kieran (1992, 2013) quién sugiere desprenderse de la histórica dicotomía entre lo procedimental y lo conceptual, enfocándose en las interrelaciones de estos aspectos, dejando de considerarlos como antagónicos. Según la autora: "Para cubrir la falta de comprensión los estudiantes tienden a recurrir a la memorización de reglas y procedimientos y eventualmente llegan a creer que esta actividad es la esencia del álgebra" (Kieran, 1992, p.1). Esto lleva a que la comprensión se debilite, entrando en un círculo vicioso del cual es difícil salir.

[1] Entendiendo la noción de ecuación en el plano de lo que Chevalard (1991) define como "paramatemático" nociones o herramientas que si bien son útiles para describir y estudiar objetos matemáticos, no son objeto de estudio en sí mismos.

ISBN 978-84-945722-3-4

Creemos importante por lo tanto ayudar a los estudiantes a establecer vínculos entre la comprensión de conceptos y las habilidades procedimentales. Estos vínculos se manifiestan a través de lo que se denomina "fluidez procedimental" caracterizada como:

> *"una componente crítica de la competencia matemática [...] es la capacidad de aplicar los procedimientos de manera precisa, eficaz y flexible; de transferir los procedimientos a diferentes problemas y contextos; de construir o modificar los procedimientos a partir de otros procedimientos; y de reconocer cuál estrategia o procedimiento es más adecuado aplicar"(NCTM, 2014, p. 1).*

En 2015, reafirman este punto de vista, al sostener que:

> *"...La fluidez no es una idea simple. Tener fluidez significa que los estudiantes pueden elegir con flexibilidad métodos y estrategias para resolver problemas matemáticos y contextuales, que entienden y son capaces de explicar sus enfoques y que pueden ofrecer respuestas exactas de un modo eficiente." (NCTM, 20015)*

Kieran (2013), señala dos aspectos relevantes de los procedimientos en el aprendizaje de la matemática. Por un lado resalta su "naturaleza conceptual" durante el periodo de elaboración y por otro las instancias de reestructuración y ampliación a través de elementos conceptuales, aun cuando ya han sido automatizados.

Estas ideas nos llevaron a cuestionarnos, ¿qué hace un estudiante cuando le pedimos que resuelva una ecuación? Creemos poder afirmar, sin temor a equivocarnos, que en la mayoría de los casos comienza a realizar una secuencia de pasos o reglas que en general terminan cuando se obtiene un valor de la incógnita. Pero ¿ese valor obtenido es realmente solución de la ecuación? ¿Podrán existir otros valores que también lo sean? ¿Cuántos? Son preguntas que difícilmente el estudiante se formule y que atañen a nuestra función de docentes generar.

Describimos a continuación el significado que daremos en este taller a: resolver una ecuación, solución de una ecuación, estrategia de resolución, explicación.

<u>Resolver una ecuación</u>

Determinar el o los valores de la incógnita que transformen la ecuación en una identidad numérica.

ISBN 978-84-945722-3-4

Somos conscientes de que esta caracterización no implica la existencia de una estrategia formal y algebraica de determinación de la incógnita. De este modo el aspecto conceptual es el sustento que da sentido al desarrollo de una amplia variación de posibilidades y modos de resolución sin perder de vista la noción de ecuación como igualdad condicionada.

La constatación de que ese valor, sustituido en la ecuación debe transformarla en una identidad numérica, implicaría de alguna forma la necesidad de la verificación. Al explicitar "él o los valores" dejamos abierta la posibilidad de que en ecuaciones cuadráticas los estudiantes den como solución un solo valor y no dos.

Solución de una ecuación

Llamaremos *solución de una ecuación* a cada uno de los valores que se determinan en la resolución y *conjunto solución* al conjunto de todas las soluciones.

Estrategia de resolución

Procedimiento seguido por el estudiante para encontrar alguna solución de la ecuación

Desarrollo del taller

En una primera instancia pediremos a los participantes que anticipen cómo creen que alumnos de ciclo básico (13-15) resolverían ecuaciones como:

$$10-4.\left(1-\frac{x}{2}\right)^2=-26 \qquad \text{ó} \qquad 13-\frac{56}{21+\frac{70}{3+x}}=12\,.$$

A partir de ellos intentaremos hacer visibles las prácticas que los docentes en general priorizamos en la enseñanza de la resolución de ecuaciones.

En segunda instancia propondremos la experimentación con un applet que promueve el uso de estrategias aritméticas y realizaremos su análisis didáctico.

Promoveremos la reflexión sobre las variables didácticas que el docente debe considerar al elegir el tipo de ecuación a proponer a sus alumnos, por ejemplo: el tipo de números con los que se trabaje, el tipo de ecuaciones, la aparición de la variable en la ecuación, el momento del curso en el que se propone, las herramientas que habilita para su resolución, etc.

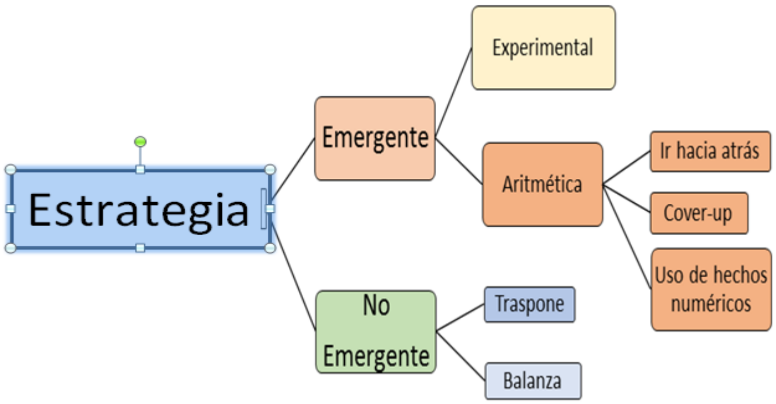
Finalmente compartiremos algunas producciones de alumnos realizadas en el marco de nuestro trabajo final de tesis de Maestría (Pérez & Ravaioli, tutor: Cecilia Calvo, 2015)

En la investigación, se aplicó una secuencia didáctica a alumnos de 13 años que no habían tenido instrucción formal en álgebra. Incluyó el trabajo con el applet de Cover-up. Los alumnos respondieron una prueba en formato papel que fue analizada categorizando las

ISBN 978-84-945722-3-4

producciones de los estudiantes según dos dimensiones: el tipo de estrategias utilizadas y el tipo de explicaciones brindadas.

Las categorías de estrategias que pudimos identificar se resumen en el siguiente esquema:



A modo de cierre

La idea de este taller se origina en el interés de compartir algunos aspectos constatados en el trabajo mencionado:

- aún los estudiantes que no recibieron instrucción en estrategias formales de resolución de ecuaciones, pudieron resolver tipos de ecuaciones que a priori podrían parecer impensables para ese nivel, como cuadráticas, racionales, irracionales, etc.
- las dificultades que surgieron se relacionan más con el tipo de número u operación involucrada que con el tipo de ecuación propuesta.
- ofrecer un espacio de experimentación libre, al inicio del estudio del tema, favoreció elecciones más flexibles en los estudiantes.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Referencias bibliográficas

Amerom, B.A. van (2002). Reinvention of early algebra. Developmental research on the transition from arithmetic to algebra. (Thesis, Utrecht University). ISBN 90-73346-48-7.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: AIQUE.

Kaput, J. (1996). ¿Una línea de investigación que sustente la reforma del álgebra?. Revista UNO, Parte I: 9, 85-97.Parte II: 10, 89-103. Barcelona: Graó.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra, In D.A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: Macmillan, pp. 390-419. (Consultado en: Mesa, V. (1995) Investigar y Enseñar. Una empresa docente. Capítulo 17. Universidad de los Andes)

Kieran, C. (2013). The false dichotomy in mathematics education between conceptual understanding and procedural skills: an example from algebra. En Leatham, K. (Ed.), Vital directions in mathematics education research (pp. 153-171). New York: Springer.

NCTM, (2014). Procedural Fluency in Mathematics. Recuperado de http://www.nctm.org/about/content.aspx?id=42833

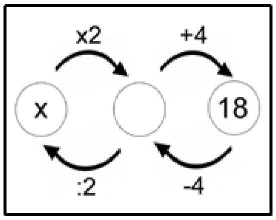
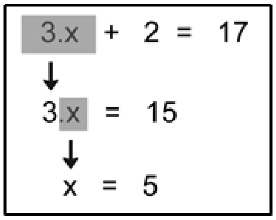
NCTM, (2015). De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos. http://www.nctm.org/

Pérez, T & Ravaioli, N (2015). Las estrategias aritméticas como recurso en el primer acercamiento a la resolución de ecuaciones: la transición de la aritmética al álgebra. (Tesis de Maestría, Universidad Católica del Uruguay, Tutor de Tesis: Dra. Cecilia Calvo). No publicada.

ANEXO

Entendemos por métodos de resolución aritméticos aquellos que evidencian como sustancial el uso de conocimientos aritméticos relacionados con las operaciones involucradas en la ecuación. Por ejemplo:

ISBN 978-84-945722-3-4

Aritmético Hacia Atrás (AHA) El alumno realiza los cálculos necesarios para "deshacer" o "ir para atrás" las operaciones involucradas en la ecuación, planteando o no las operaciones inversas.	Para resolver 2x+4=18 
Aritmético Cover up (ACU) El alumno identifica el valor numérico de "una parte" de *la expresión* en la que aparece la incógnita, evidenciándose explícitamente esta identificación en el registro escrito de su razonamiento.	
Aritmético Hechos Numéricos (AHN) El alumno realiza planteos aritméticos que muestran la puesta en juego de repertorios numéricos conocidos diferentes de los expresados en los dos casos anteriores.	Para resolver 10+4x=2 10-8 es 2 4x debe ser negativo 4x=-8 entonces x=-2

Extraído de:
Pérez, T & Ravaioli, N., (2015). Las estrategias aritméticas como recurso en el primer acercamiento a la resolución de ecuaciones: la transición de la aritmética al álgebra. (Tesis de Maestría, Universidad Católica del Uruguay, Tutor de Tesis: Dra. Cecilia Calvo). No publicada.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-159

UNA HERRAMIENTA DIDÁCTICA PARA EL ANÁLISIS DE CLASES A PARTIR DE LA APROXIMACIÓN INTERACCIONISTA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Daniela Pagés – Mónica Olave
danielapages@gmail.com – monicaolave23@gmail.com
Consejo de Formación en Educación - Uruguay

Modalidad: Taller
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Tema: Formación del profesorado de matemáticas
Palabras clave: patrón de interacción – interacción social – significados– clase de matemática

Resumen

El taller tiene como objetivo presentar a los participantes una herramienta didáctica para el análisis de clases que fue diseñada a partir de los constructos teóricos que proporciona la Aproximación Interaccionista en Educación Matemática (Bauersfeld, Krummheuer y Voigt, 1988). En la primera parte del taller se propondrá a los asistentes la observación de dos videos con grabaciones de episodios de clases de matemática, y se les pedirá que los analicen de acuerdo a un conjunto de indicaciones. Luego se compartirán las observaciones realizadas a los videos. En la segunda parte, se presentará la Aproximación Interaccionista, explicando los supuestos que sostiene en relación a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, así como los patrones de interacción social que dicha aproximación describe. Se presentarán los protocolos de observación de clases diseñados en Pagés (2015) para el análisis de episodios de clase. Luego se invitará a los participantes del taller a analizar otros videos de episodios de clases, ahora bajo el lente de este enfoque teórico.

Introducción

Pensamos que en la actividad profesional del profesor de matemática es necesaria la reflexión acerca de las acciones llevadas adelante, de las decisiones, de las elecciones, entre otras actividades que se realizan en la clase. Para poder llevar adelante este trabajo de reflexión consideramos que una herramienta que resulta idónea es la observación de episodios de clase donde se ponen en evidencia dichas acciones. Surgen entonces algunas preguntas insoslayables: ¿qué observar?, ¿cómo observar?, ¿cómo analizar lo observado? Para ello proponemos este taller que tiene como objetivo principal presentar a los participantes una herramienta teórica para el análisis de clases que fue diseñada a partir de los constructos teóricos que proporciona la Aproximación Interaccionista en Educación Matemática (Bauersfeld, Krummheuer y Voigt, 1988).

ISBN 978-84-945722-3-4

El Interaccionismo Simbólico

La aproximación interaccionista en Educación Matemática tiene base en la microsociología, y surge a partir del interaccionismo simbólico (Blumer, 1969; Mead, 1934, citados por Voigt, 1995, p. 166) y por la etnometodología (Garfinkel, 1967; Mehan, 1979, citados por Voigt, 1995, p. 166). Los conceptos del Interaccionismo Simbólico fueron adaptados a la Educación Matemática por Bauersfeld, Krummheuer y Voigt (1988, citado por Voigt, 1995, p. 166). Según esta aproximación en la investigación sobre el desarrollo cognitivo, el conocimiento matemático se origina y evoluciona con una gran influencia sociocultural (Sierpinska y Lerman, 1996, p. 13). Los autores interaccionistas consideran a la matemática como resultado de los procesos sociales (Lakatos, 1976; Wittgenstein, 1967, citados por Voigt, 1995, p.165), y no como un conjunto de relaciones verdaderas, objetivas e inmutables entre objetos, como lo establecen las teorías platónicas o intuicionistas.

Steinbring (2005) plantea que la concepción predominante de la matemática como la ciencia por excelencia, con un único punto de vista sobre cada cuestión, ha influido en la estructura del conocimiento matemático escolar, cuando en realidad lo esencial para la enseñanza de la matemática sería el proceso por el cual se crea el conocimiento. En palabras de Freudenthal (1973, p.114, citado por Steinbring, 2005):

> Es cierto que palabras como matemática, lenguaje, y arte tienen un doble significado. En el caso del arte es obvio. Existe un arte terminado que es el que estudia el historiador del arte, y existe un arte ejercitado por el artista… Cada matemático sabe al menos inconscientemente que al lado de las matemáticas ya hechas existen las matemáticas como una actividad. Pero este hecho casi nunca se señala, y no todos los no matemáticos son conscientes de ello.[2] (Steinbring, 2005, p. 15)

Generalmente se piensa que los objetos de la matemática y de la clase de matemática tienen un significado único y siempre el mismo. Los interaccionistas, sin embargo, parten de considerar que todos los objetos de la clase de matemática son ambiguos, y por tanto están sujetos a la interpretación de cada participante. Es a través de la interacción social donde se negocian los significados que se compartirán en la microcultura de la clase.

A partir de sus conocimientos de base, cada participante da sentido a los objetos y establece un contexto a partir del que realiza una interpretación. Este proceso le permite al individuo construir conocimiento socialmente compartido y desarrollar estructuras subjetivas para ese conocimiento. Los autores enfatizan en la construcción de la intersubjetividad a través de estos procesos, la que es específica del contexto y la situación. (Bauersfeld et al., 1988, Voigt, 1995).

---

[2] Freudenthal (1973, p.114, citado por Steinbring, 2005, p. 15): It is true that words as mathematics, language, and art have a double meaning. In the case of art it is obvious. There is a finished art studied by the historian of art, and there is an art exercised by the artist… Every mathematician knows at least unconsciously that besides ready-made mathematics there exists mathematics as an activity. But this fact is almost never stressed, and non-mathematicians are not at all aware of it. (Traducción de las autoras)

ISBN 978-84-945722-3-4

Durante la interacción social se desarrollan patrones de interacción, que permiten que la clase transcurra con cierta fluidez. Los autores del marco teórico señalan que muchas veces estos patrones degeneran, cayéndose en modos de interactuar que empobrecen los significados alcanzados en la interacción. Definen el concepto de *patrón de interacción*, y describen algunos que han encontrado en la observación de clases (Cobb y Bauersfeld, 1995; Steinbring, 2005).
De los patrones descritos por Voigt (1985) y Wood (1994) entre otros autores: el extractivo (elicitation), el de discusión, el de embudo (funnel) y el de focalización, en Pagés (2015) se realizó un ensamble de los mismos, a partir de sus características y su momento de aparición en episodios de una clase. Los siguientes cuadros muestran dicho ensamble.

Tabla 1. *Descripción combinada de los patrones extractivo y de embudo*

<table>
<tr><td colspan="2">Patrón extractivo
Fase 1
El docente presenta una tarea (pregunta o problema), los estudiantes plantean respuestas, el docente las evalúa preliminarmente (correctas, incorrectas, útiles, etc.). Esto sigue hasta que el docente encuentra una respuesta útil a sus objetivos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fase 2
Desarrollo guiado de la solución definitiva. El docente, a través de pistas, gestos, nuevas preguntas, va guiando las respuestas de los estudiantes.</td></tr>
<tr><td>Fase 3
El docente realiza una evaluación del método empleado y del resultado obtenido, y se reflexiona sobre el contexto. Esta fase no siempre se da.</td><td>Patrón de embudo

Los estudiantes no logran responder lo esperado por el docente, entonces este interviene de forma más directa, con preguntas que van reduciendo el campo de acción del estudiante, y le van señalando la respuesta esperada.</td></tr>
</table>

Tabla 2. *Descripción combinada de los patrones de discusión y focalización*

<table>
<tr><td colspan="2">Patrón de discusión
Fase 1
El docente propone una tarea, preferentemente para hacer en grupos, pero puede ser individual.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fase 2
El docente pide a los estudiantes que expongan lo que hicieron, y lo justifiquen.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fase 3
Un estudiante (o varios) da su solución, explicando.</td></tr>
<tr><td>Fase 4 (Puede mezclarse con la 3)
El profesor realiza preguntas, comentarios para enfatizar, o para aclarar o profundizar. Pregunta por otras resoluciones.</td><td>Patrón de focalización
Las preguntas del docente tienen como objetivo focalizar la atención de los estudiantes en algún aspecto del problema, que es crucial para el</td></tr>
</table>

	significado que el docente quiere promover, o que no han tenido en cuenta en la resolución.
Fase 5 Otros estudiantes explican su solución.	

A partir de las características de cada patrón, en Pagés (2015) se elaboró una tabla comparativa entre ellos, que permite analizar episodios de clase y decidir qué patrón o patrones se configuran. Esta tabla comparativa incorpora los indicadores (que están en la primera columna) que, en base al Marco Teórico, guiaron el análisis y que permitieron elaborar el protocolo de observación de clase.

Tabla 3. *Protocolo de observación de clases*

	Patrón extractivo	***Patrón de discusión***
Forma predominante de resolución de la tarea	Se resuelve desarrollando el patrón desde el inicio, con la participación de los estudiantes, pero dirigidos por el docente, hacia la solución esperada por él.	Se propone la tarea para ser resuelta por los estudiantes, a los que se los asiste en su razonamiento si ellos lo requieren.
Intención de las preguntas del docente	Averiguar si el estudiante comprendió la información proporcionada. Asegurarse que lo siguen y que todo va por buen camino. Buscar que el estudiante proporcione la respuesta “oficial”, esperada por el docente.	Establecer un diálogo con los estudiantes. Indagar qué está pensando el estudiante cuando da su respuesta, en relación al significado que atribuye al concepto o cuestión tratada. Permitir la aparición de errores que puedan tratarse en la clase.
Objetivo y características de las respuestas de los estudiantes	Los estudiantes intentan averiguar la intención del docente. Sus respuestas son breves, con monosílabos o pocas palabras.	Los estudiantes asumen la respuesta como parte de su responsabilidad de aprendizaje, que incluye comunicarla y justificarla. Respuestas más elaboradas, que incluyen la argumentación.
Esfuerzo cognitivo y metacognitivo que exige en el estudiante	Participa sin necesidad de desarrollar la competencia	El estudiante tiene la responsabilidad de realizar la tarea y justificarla, lo que

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

	necesaria para un proceso individual de solución.	le permite desarrollar estrategias de argumentación, soluciones originales, su pensamiento propio.
Evaluación de las respuestas por parte del docente	Correcta, incorrecta. De las incorrectas, toma las que lo pueden ayudar a continuar el camino a la solución correcta.	Pide justificación. Vuelve a preguntar para que aparezcan nuevos aspectos del problema. Da participación a los otros estudiantes para que evalúen las respuestas de sus compañeros.
Búsqueda de soluciones distintas a la oficial, por parte del docente	No se producen. Aunque se acepten otras soluciones, no son valoradas.	El docente las fomenta, y las respuestas y caminos diferentes se institucionalizan en la clase.
Objetivo de las tareas propuestas	Llegar a la solución o concepto.	La discusión matemática que se produce a partir de la solución.

Tanto el patrón extractivo como el de embudo surgen de una contradicción: entre las recomendaciones que los docentes reciben, de poner a los estudiantes en el centro del proceso educativo, y las divergencias que las intervenciones de estos tienen con lo que el docente espera como respuesta o resolución a las actividades que plantea. La aparición de respuestas discordantes y diversas produce un conflicto, la mayoría de las veces no esperado ni previsto. Esto genera la necesidad de pistas y ayudas para que los alumnos encaucen sus respuestas hacia lo previsto, y la obligación para los estudiantes de seguir estas sugerencias paso a paso hasta la solución. Y si esto no ocurre con facilidad, de forma que la interacción vuelva a ser fluida en relación a lo esperado, esto puede desembocar en ayudas más directas e incluso en el patrón de embudo, en el que la respuesta debe darse, no importando quién lo hace.
Pensamos que la reflexión sobre estos conflictos que se producen en la clase es de gran importancia tanto en la formación de profesores como en el ejercicio de la profesión docente.

El taller
Como ya se dijo, el objetivo principal de este taller es presentar a los participantes una herramienta teórica para el análisis de clases Para ello se proyectarán cuatro videos de clases que fueron especialmente seleccionados de entre los que proporciona TIMSS Video Study (1999). Estos videos no pretenden ser ejemplos de buenas o malas clases, sino que fueron elegidos porque ilustran situaciones que se presentan comúnmente en las clases de

matemática y que nos servirán de marco para, en forma conjunta, comenzar a desarrollar habilidades para el análisis de clases.

Con el propósito de mostrar la potencialidad de este instrumento hemos dividido el taller en tres etapas. En la primera, se propondrá a los asistentes la observación de dos videos con grabaciones de episodios de clases de matemática y se les pedirá que los analicen en base a sus propias creencias y experiencias, y teniendo en cuenta la siguiente pregunta guía: qué aspectos de la clase destacarían y por qué. Luego se compartirán las observaciones realizadas a los videos por los participantes. Pensamos que ante estas primeras observaciones de clase los asistentes pueden poner el foco de atención en diversos aspectos, de acuerdo a sus experiencias anteriores, que probablemente involucren características poco relevantes como lo consignan algunas investigaciones (Fuller y Miller citado en Santagata, Zanonni y Stigler, 2007). Ante esto proponemos, en una segunda etapa, un marco teórico que permita reflexionar acerca de lo que se ve en las clases y comprender la complejidad de las mismas. Se presentará entonces la Aproximación Interaccionista, explicando los supuestos que sostiene en relación a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, así como los patrones de interacción social que dicha aproximación describe. En una tercera etapa, se propondrá la observación de otros dos videos con grabaciones de episodios de clase para ser analizados a la luz del marco teórico presentado. Para ello se entregará a cada participante la transcripción de dichos episodios y los protocolos de observación de clases diseñados en Pagés (2015) para el análisis de episodios de clase. Una vez finalizado esta observación y análisis, se abrirá un espacio para el debate entre todos los participantes con referencia a los patrones de interacción detectados, la potencialidad de este tipo de análisis para describir, examinar y repensar las prácticas de aula de forma tal que la negociación de significados sea efectiva para el aprendizaje de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Bauersfeld, H.; Krummheuer, G. y Voigt, J. (1988). Interactional Theory of Learning and Teaching Mathematics and Related Microetnographical Studies. En H. G. Steiner, *Proceedings of the TME 1985*. Bielefeld: IDM.

Bauersfeld, H. y Cobb, P. (eds.) (1995). *The emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Pagés, D. (2015). *Los profesores de matemática en formación en Uruguay: un análisis de las interacciones en la clase de su práctica docente.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Santagata, R., Zanonni, C. y Stigler, J. (2007). The role of lesson analysis in preservice teacher education: an empirical investigation of teacher learning from a virtual video-based field experience. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*. 123-140. DOI: 10.1007/s10857-007-9029-9

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En A. J. Bishop, M.A. (Ken) Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education.* 1, 827- 876. Dordrecht, HL: Kluwer, A. P.

Steinbring, H. (2005). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction—an epistemological perspective.* Berlin: Springer.

ISBN 978-84-945722-3-4

Voigt, J. (1985). Patterns and Routines in Classroom Interaction. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 6*(1), 69-118.

Voigt, J. (1995). Thematic patterns of Interaction and Sociomathematical Norms. En H. Bauersfeld y P. Cobb (eds.), *The emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Wood, T. (1994). Patterns of Interaction and the Culture of Mathematics Classrooms. En S. Lerman (Ed.). *Cultural Perspectives on the Mathematics Classroom*, 149-168. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

UCLA and The Carnegie Foundation. (1999). TIMSS Video Study. *TIMSS VIDEO.* http://www.timssvideo.com/

ISBN 978-84-945722-3-4

T-171

ENGENDRANDO CONTEÚDOS NO ENSINO SECUNDÁRIO
UMA PROPOSTA METODOLÓGICA

Daniella Assemany
daniella.cap@ufrj.br
Universidade do Porto / Portugal

Núcleo temático: 1 - Ensino e aprendizagem da matemática em diferentes modalidades e níveis educacionais.
Modalidade: T – Taller
Nível educativo: Ensino Médio
Palavras chave: proposta metodológica, ensino secundário, geometria vetorial

Resumo

Diante da fragmentação conteudista curricular da matemática nas escolas brasileiras e portuguesas, em conjunto com as dificuldades proeminentes de alguns conceitos matemáticos na transição do ensino secundário para o ensino superior, apresenta-se o relato de uma prática docente referente à elaboração, aplicação e investigação de uma proposta metodológica para estudantes do ensino secundário. Serão compartilhadas e exploradas atividades nas quais o conceito de vetor foi tomado como ponto de partida para o desenvolvimento da proposta, tendo a geometria vetorial como estrutura, permeada pela ideia de conexão de conteúdos. A proposta metodológica, conceituada como 'fluida' neste estudo, deu-se a partir do engendramento de grande parte dos conteúdos abordados no ensino secundário, nomeadamente pela(o): utilização das transformações no plano para o ensino de trigonometria, visualização geométrica para a resolução de sistemas lineares, equação da reta para o estudo da função afim, conceito de vetor em lR^3 *para o ensino da geometria espacial, geometria plana e os vetores para o estudo de números complexos, etc. Aposta-se que esta metodologia de ensino possa contribuir para ressignificar os conceitos matemáticos na escola secundária, destacando-os com uma nova roupagem. Desafiaremos os participantes a refletir sobre algumas destas ligações entre conteúdos.*

1. Introdução

Os tópicos do currículo do ensino secundário (médio), tanto de Portugal (MEC, 2012) quanto do Brasil (BNCC, 2016), em conjunto com a aprendizagem ineficaz dos alunos da escola secundária, mostradas na transição para o ensino superior (Nasser, 2009; Rezende, 2003), foram elementos motivadores para uma investigação na qual se propusesse uma

ISBN 978-84-945722-3-4

associação dos conteúdos em que o conceito de vetor foi escolhido como base e a Geometria Vetorial como estrutura.

Diversos autores justificam utilização dos vetores nos programas curriculares. Bittar (2013) mostra, através do Registros das Representações Semióticas, que a Geometria Vetorial configura-se para o aluno como ganho de mais uma ferramenta na resolução de problemas já conhecidos quando é apresentada inicialmente como um ente geométrico para resolver problemas de geometria. Harel (1990) desenvolveu um programa de álgebra linear baseado na aritmética dos vetores para resolver problemas geométricos, construindo um processo de abstração gradual para alunos do ensino secundário.

Além disso, a história mostra que o conceito de vetor foi desenvolvido também para explicar geometricamente conceitos que muitos matemáticos não estavam totalmente convencidos de sua existência, os quais eram apresentados através da álgebra pura, sem visualização geométrica (Crowe, 1967, 2002; Dorier, 1995). Estes dados têm um peso significativo no ensino de matemática, uma vez que foi necessário utilizar e conceituar os vetores para desenvolver outras teorias que se apresentaram com algumas deficiências, mas que eram muito importantes na época. Isso destaca o potencial dos vetores na compreensão de outros conteúdos de matemática, uma vez que sua utilização propicia representações e visualizações.

No ano de 1843, Hamilton foi conduzido à descoberta e elaboração conceitual dos Quatérnios (Hamilton, 1837), motivado a estender ao espaço tridimensional a forma como os números imaginários atuam no espaço bidimensional, conectando cálculo com geometria. Sua investigação durou cerca de 20 anos e, pelo caminho, introduziu os princípios basilares do cálculo vetorial, os quais colaboraram posteriormente com o desenvolvimento da teoria dos espaços vetoriais.

Os fatos apresentados anteriormente foram elementos impulsionadores para a elaboração de uma proposta metodológica de engendramento de conteúdos para o ensino secundário, partindo do conceito de vetor, que vem sendo modificada com experimentações práticas e investigações de cunho acadêmico. O objetivo principal da proposta que será apresentada neste workshop foi permitir uma associação consistente entre os assuntos estudados na escola, reconfigurando os conteúdos de matemática das três séries do ensino

ISBN 978-84-945722-3-4

secundário, partindo do conceito de vetor, e promovendo uma forma de relação que denominou-se de ‘fluida’ neste trabalho, a qual será explicada posteriormente na seção 1.

2. Uma Proposta Metodológica

Entre os anos de 2006 e 2013, inclusive, o engendramento de conteúdos de matemática foi sendo cultivado, incentivado, aplicado e reformulado com as turmas de ensino secundário de um colégio público brasileiro, de forma experimental, observadora e analítica, constituindo-se em uma Proposta Metodológica P_o. Primeiramente, a aplicação deu-se no 10º ano e, posteriormente, estendeu-se 11º e 12º anos. Nesse período, as versões da proposta foram sendo testadas e modificaram-se conforme observação e reflexão das respostas dos alunos, postos em atividades sob uma ótica investigativa. Nasser, Souza e Torraca (2012) mostram que esta proposta é uma abordagem metodológica que colabora minimizando as dificuldades dos alunos ingressantes na disciplina de Cálculo I e a destacam como sendo *a possibilidade de um currículo em espiral, no qual os conteúdos são constantemente revisitados* (p. 16).

Para fundamentar a proposta, buscou-se valorizar a visão geométrica dos alunos, incentivando esse olhar aos assuntos abordados em todo o ensino secundário, inclusive àqueles nos quais a interpretação tradicionalmente explorada é exclusivamente algébrica. De maneira concisa, pode-se afirmar que a utilização do conceito de vetor no início do 10º ano do ensino secundário proporciona, dentre outros:

- A construção da representação gráfica de uma circunferência, através do conceito de módulo de vetor.
- A possibilidade de explorar a geometria euclidiana no plano cartesiano.
- A utilização das transformações no plano para o ensino de trigonometria, promovendo: a visualização e compreensão dos arcos no círculo a partir da rotação de um vetor em torno da sua origem; a utilização da geometria euclidiana como uma ferramenta para o estudo da trigonometria; a determinação da equação da reta a partir da translação de um ponto segundo um vetor; a simetria central e axial como ferramentas de localização cartesiana dos vértices de polígonos regulares centrados na origem.
- A determinação da função afim a partir do estudo da equação da reta.

ISBN 978-84-945722-3-4

- A constituição da expressão algébrica de uma determinada função ou de uma cônica, a partir de sua designação mais simples, através do conceito da translação.
- A translação de gráficos de funções ou de cônicas.
- O estudo da geometria espacial – tradicionalmente explorada apenas por suas medidas de comprimento, superfície e capacidade – a partir do conceito de vetor em lR^3 .
- A visualização geométrica e espacial dos planos – cuja representação algébrica constitui um sistema linear – através das relações entre os vetores normais, principalmente nos casos em que o sistema não é possível e determinado.
- A conceituação de matrizes como um conjunto de vetores linha (ou coluna), propiciando a construção de significados de algumas operações matriciais que se equivalem às operações vetoriais já conhecidas[3].
- O auxílio da geometria plana e dos vetores em lR^2 para o estudo de números complexos e suas representações geométrica e trigonométrica.

A partir de 2014, a proposta recebeu um olhar mais investigativo. Com base na Teoria da Aprendizagem Significativa – TAS (Ausubel, 1968), na qual ~~é proposto que~~ uma nova ideia se ~~se~~ relaciona aos conhecimentos prévios (subsunçores), a proposta P_0 de engendramento de conteúdos fornecia o contexto ideal para associar os conteúdos de matemática a partir do conceito de vetor. Segundo a ~~teoria~~TAS, os processos de ensino e aprendizagem dão-se quando o aluno, motivado por uma situação apresentada pelo professor e que tenha sentido para ele, amplia, avalia, atualiza e reconfigura a informação anterior, transformando-a em nova. Assim, acredita-se que o conceito de vetor representa um poderoso subsunçor para interligar os conhecimentos posteriores, presentes nos conteúdos de matemática do ensino ~~médio~~secundário, ressignificando objetos e produzindo novos conhecimentos.

Con formato: Fuente: (Predeterminada) Times New Roman, 12 pto, Color de fuente: Automático, Portugués (Brasil)

Con formato: Fuente: Times New Roman, Sin Resaltar

Juntamente com as orientações curriculares brasileiras, estipuladas atualmente pela BNCC (2016), e as normas e os programas atuais portugueses para o ensino da matemática (MEC, 2012), está em desenvolvimento a Proposta Metodológica P_1.

[3] Apesar do conteúdo Matrizes não ser abordado no ensino médio de Portugal, ele está presente no currículo do Brasil e, por isso, pertence à proposta deste relato.

ISBN 978-84-945722-3-4

Na próxima seção, pretende-se apresentar brevemente um pouco do que será levado à discussão no workshop, sobre o engendramento que se procurou fazer em P_1.

3. Um 'recorte' da Proposta Metodológica P_1

Nesta seção, apresenta-se uma pequena parte da P_1, cujo objetivo é explicitar de forma didático-pedagógica o engendramento de conteúdos para explorar a Trigonometria no círculo, a partir do conceito de vetores.

Partindo do vetor como subsunçor (Ausubel, 1968), é possível produzir conhecimento para as Transformações no Plano, nomeadamente: translações, simetrias, rotações e homotetias. No âmbito das Rotações do Plano, conceitua-se como: uma transformação que produz ~~um~~ o giro de um objeto em torno de um centro fixo, segundo um ângulo determinado. Se esse objeto for um vetor $\vec{v}$ (~~figura~~ Figura 1), a ~~figura~~ Figura 2 representará a rotação de $\vec{v}$, em torno da origem, segundo um ângulo α. O resultado será um vetor $\vec{v}_\alpha$, de modo que a extremidade do vetor $\vec{v}$ descreva um arco de medida α.

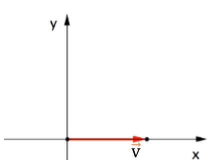


Figura 1

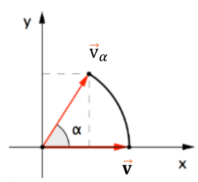


Figura 2

Ao considerar o ângulo α = 360º, a rotação do vetor $\vec{v}$, em torno da origem, segundo um ângulo de 360º, faz com que a extremidade do vetor descreva uma circunferência de raio de medida $|\vec{v}|$. Isto é, a extremidade do vetor percorreu uma distância que representa o comprimento da circunferência de centro em O e raio $|\vec{v}|$, ou seja, $2\pi|\vec{v}|$, conforme a F~~f~~igura 3.

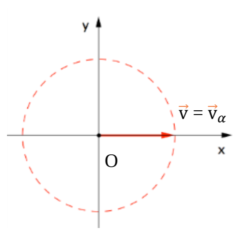


Figura 3

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Partindo dessa ideia, o professor tem a possibilidade de explorar vários outros conceitos:

I) o comprimento do arco, utilizando-se de uma ~~simples~~ regra de três simples;

II) o círculo trigonométrico, quando o vetor é unitário;

III) os arcos múltiplos, através de rotações de mesmo ângulo (12 de 30º ou 8 de 45º ou 6 de 60º ou 4 de 90º ou 2 de 180º, etc.);

IV) as noções de seno e cosseno dos arcos sem precisar recorrer às fórmulas ou regras prontas, que só servem para os alunos memorizarem e depois esquecerem-se (Azevedo, 2013). Para isso, deve-se determinar as novas coordenadas do vetor resultante ao variar o ângulo de rotação.

Para exemplificar alguns desses conceitos, apresenta-se uma ~~atividade~~ tarefa indicada para a introdução da Trigonometria no Círculo, uma vez que os pontos divisores de uma circunferência são extremidades dos vetores canônicos e suas coordenadas são o seno e cosseno dos arcos formados com o eixo positivo.

~~Atividade~~ Tarefa sugerida: Considere uma circunferência determinada pela rotação do vetor (1,0) sobre a origem do plano cartesiano, segundo um ângulo de 360º. Esboce seu desenho no papel milimetrado e divida-a em 12 partes iguais, a partir da interseção com o eixo OX. Em seguida, faça o que se pede:

a) Indique a medida em graus (no sentido positivo) do arco determinado por cada ponto divisor e a origem da circunferência.

~~1.~~b) Localize os pontos divisores dos seguinte arcos: $\frac{\pi}{6}$ rad , $\frac{2\pi}{6}$ rad, $\frac{3\pi}{6}$ rad, $\frac{4\pi}{6}$ rad, $\frac{5\pi}{6}$ rad , $\frac{6\pi}{6}$ rad, $\frac{7\pi}{6}$ rad, $\frac{8\pi}{6}$ rad, $\frac{9\pi}{6}$ rad, $\frac{10\pi}{6}$ rad, $\frac{11\pi}{6}$ rad e $\frac{12\pi}{6}$ rad. O que você observa?

~~2.~~c) Observe os pontos divisores dos seguintes arcos: $\frac{\pi}{6}$ rad , $\frac{5\pi}{6}$ rad, $\frac{7\pi}{6}$ rad e $\frac{11\pi}{6}$ rad. Quais as relações geométricas que você identifica entre estes arcos?

~~3.~~d) Observe os pontos divisores dos seguintes arcos: $\frac{\pi}{3}$ rad , $\frac{2\pi}{3}$ rad, $\frac{4\pi}{3}$ rad e $\frac{5\pi}{3}$ rad. Quais as relações geométricas que você identifica entre estes arcos?

Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)

Con formato ...

Con formato ...

Con formato ...

Con formato ...

Con formato ...

Con formato ...

Con formato ...

Con formato ...

Con formato ...

Con formato ...

Con formato ...

Con formato ...

Con formato ...

Con formato ...

Con formato ...

Con formato ...

Con formato ...

Con formato ...

Con formato ...

Con formato ...

ISBN 978-84-945722-3-4

~~4.~~e) Determine as coordenadas dos vetores cujas extremidades são os arcos $\frac{\pi}{6}$ rad, $\frac{5\pi}{6}$ rad, $\frac{7\pi}{6}$ rad, $\frac{11\pi}{6}$ rad.

~~5.~~f) Determine o seno dos ângulos cujas medidas dos arcos são: $\frac{\pi}{6}$ rad, $\frac{5\pi}{6}$ rad , $\frac{7\pi}{6}$ rad, $\frac{11\pi}{6}$ rad. (Utilize o triângulo retângulo que se forma pelo vetor e sua projeção ortogonal no eixo.)

~~6.~~g) Determine o cosseno dos ângulos cujas medidas dos arcos são: $\frac{\pi}{6}$ rad, $\frac{5\pi}{6}$ rad , $\frac{7\pi}{6}$ rad, $\frac{11\pi}{6}$ rad. (Utilize o triângulo retângulo que se forma pelo vetor e sua projeção ortogonal no eixo.)

~~7.~~h) Observe suas respostas aos itens f) e g) e compare com as coordenadas indicadas no item e). O que você pode inferir?

~~8.~~i) Discuta com os colegas e o professor sobre suas reflexões.

Essa ~~atividade~~ tarefa tem o objetivo de conduzir o aluno às seguintes percepções:

- Identificação dos vetores simétricos em relação aos eixos e/ou origem.
- Reconhecimento de que cada uma das 12 partes de 30º representa uma fração de $\frac{\pi}{6}$ rad, o que auxilia na determinação da medida do ângulo em radianos, assim como as 8 partes de $\frac{\pi}{4}$ rad ou 6 partes de $\frac{\pi}{6}$ rad, etc.
- Estímulo à geometria analítica, especialmente ao plano cartesiano e aos recursos da geometria plana e trigonometria no triângulo retângulo, para o desenvolvimento de conceitos e habilidades em matemática e nos conteúdos posteriores.
- Correlação das coordenadas dos vetores aos valores do seno e cosseno dos arcos, sem recorrer a fórmulas e regras de sinais.

Acerca da Proposta P_1, este breve 'recorte' apresenta-se em forma de fluxograma 'fluido', indicando para um mapa conceitual (Novak, 1992), sob a forma da ~~figura~~ Figura 4:

Con formato: Fuente: 12 pto, Portugués (Brasil)

ISBN 978-84-945722-3-4

4. Conclusões

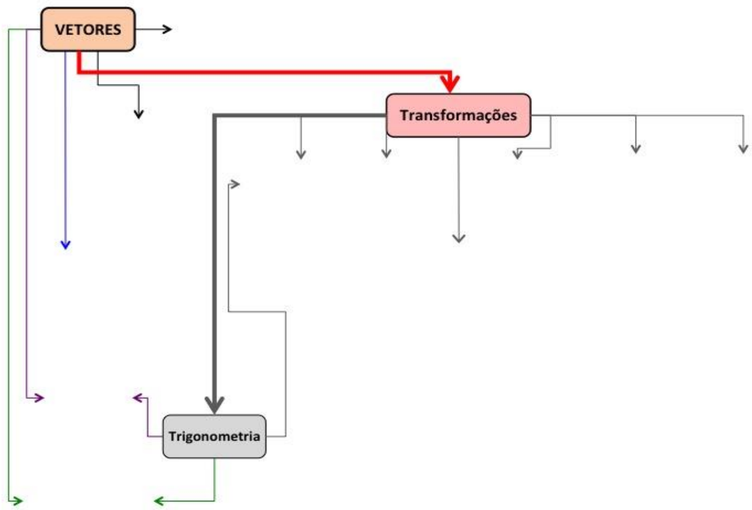


Figura 4

Na continuidade das investigações da Proposta Metodológica P_1 e contando com a discussão e reflexão que este workshop propiciará entre os participantes, pretende-se elaborar outras versões mais densas e aderentes às orientações curriculares e aos manuais escolares. Espera-se que no próximo encontro se tenha uma Proposta Metodológica P_n apropriada e condizente com o apoio dos professores de matemática da escola secundária brasileira, portuguesa e ibero-americana.

5. Referências bibliográficas

Azevedo, C.A.M. (2013). *A Contribuição dos Vetores na Reestruturação Curricular do Ensino Médio: Um Estudo de Caso.* (Monografia de graduação, não-publicada, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil).

Ausubel, D. (1968). *Educational Psychology: a cognitive view*. (1ª ed.). New York: Holt, Rinehart and Winston.

Base Nacional Comum Curricular – BNCC (2016). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular (Proposta Preliminar – 2a versão revista).* Brasília: MEC/SEB. Recuperado em 14 de agosto, 2016 de <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/inicio>.

Bittar, M. (2013). O Ensino de Vetores e os Registros de Representação Semiótica. In S.D.A. Machado (org.), *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica* (pp. 71-94). 8ª ed (1ª reimpressão). São Paulo: Ed. Papirus.

ISBN 978-84-945722-3-4

Crowe, M.J. (1967). A History of Vector Analysis. The Evolution of the Idea of a Vectorial System. (1ª ed.). London: Notre Dame.

Crowe, M.J. (2002). *History of Vector Analysis*. Recuperado em 19 de novembro, 2014 de <https://www.math.ucdavis.edu/~temple/MAT21D/SUPPLEMENTARY-ARTICLES/Crowe_History-of-Vectors.pdf>.

Dion, S.M. Pacca, J.L.A. & Machado, N.J. (1995). Quaternions: Sucessos e Insucessos de um Projeto de Pesquisa. *Estudos Avançados, 9 (25*). Recuperado em 19 de novembro, 2014 de <http://dx.doi.org/10.1590/S0103-40141995000300019>.

Dorier, J.L. (1995). A General Outline of the Genesis of Vector Space Theory. *Historia Mathematica*, *22*, 227-261.

Hamilton, W.R. (1837). Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time. *Transactions of the Royal Irish Academy,17*, 293-422.

Harel, G. (1990). Using geometric models and vector arithmetic to teach high- school students basic notions in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *21 (3)*, 387-392). Recuperado em 11 jul, 2016, de <http://dx.doi.org/10.1080/0020739900210306>.

Ministério da Educação e Ciência (2012). *Programa de Matemática A – Ensino Secundário.* Lisboa: Direção Geral de Educação. Recuperado em 06 de setembro, 2015 de <http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Secundario/Documentos/Documentos_Disciplinas_novo/Curso_Ciencias_Tecnologias/Matematica_A/programa_metas_curriculares_matematica_a_secundario.pdf>.

Nasser, L. (2009). Uma Pesquisa sobre o Desempenho de Alunos de Cálculo no Traçado de Gráficos. In M.C.R Frota & L. Nasser (org.), *Educação Matemática no Ensino Superior – Pesquisas e Debates*, *5*, 43-58.

Nasser, L., Souza, G.A & Torraca, M.A. (2012, outubro). *Transição do Ensino Médio Para o Superior: Como Minimizar as Dificuldades Em Cálculo?*. Atas do V Seminário Internacional de Pesquisas em Educação Matemática, Petrópolis, Brasil. Recuperado em 27 dezembro, 2015, de <http://www.lematec.no-ip.org/CDS/VSIPEM/PDFs/GT04/CC18595006768_A.pdf>

Novak, J.D. (1992). *A Theory of Education.* (1.ª ed). Ithaca, N.Y.: Cornell University Press.

Rezende, W. (2003). *O ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica*. (Tese de Doutoramento, Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, Brasil). Recuperado em 8 setembro, 2016 de <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-27022014-121106/pt-br.php>.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-181

PROBLEMAS DE MATEMÁTICA RECREATIVA POR ARTE DE MAGIA

Pedro Alegría Ezquerra
pedro.alegria@ehu.es
Universidad del País Vasco, UPV/EHU
José Muñoz Santonja
josemunozsantonja@gmail.com
IES Macarena, Sevilla

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Modalidad: T
Nivel educativo: 5
Palabras clave: matemática, magia, didáctica, recreativa

Resumo

Muchos y muy variados problemas de matemática recreativa y juegos matemáticos se encuentran una y otra vez en libros de muy diversos autores, tanto antiguos como modernos. Son muy conocidas las obras de Bachet, Ozanam, Gergonne, Lucas y Rouse-Ball, pero la historia nos ayuda a descubrir otros tratados que han permanecido ocultos o no han sido ampliamente difundidos, como los de Chuquet, Pacioli, Leurechon, Guyot y otros.

Quizá muchos de estos libros antiguos de matemática recreativa se escribieran con intención de proponer ejercicios diversos a los estudiantes, algo que fuera atractivo y no repetitivo y aburrido. Por eso no es extraño encontrar entre estas recreaciones algunos juegos de magia matemática planteados como problemas. De hecho, muchos trucos clásicos de magia se pueden encontrar allí.

En este taller se plantean problemas matemáticos elementales a partir de dichos juegos. Con ello se pretende llamar la atención sobre dichos libros y la vigencia de algunos de sus contenidos pero también extraer y seleccionar juegos de magia que allí aparecen, desarrollando sus propiedades matemáticas y tratando de generalizarlos, cuando sea posible. Una mirada a los clásicos también nos permite observar los distintos modos de afrontar la educación matemática a lo largo de la historia.

Introducción

La magia es una actividad tremendamente atractiva para personas de todo nivel cultural y educativo. Tras asistir a un espectáculo de magia, los espectadores suelen quedar asombrados, ilusionados, sorprendidos y, en la mayoría de los casos, con ganas de más y, sobre todo, con deseos de aprender cómo se ha realizado ese truco.

ISBN 978-84-945722-3-4

Aunque a simple vista no lo parezca, muchos trucos de magia tienen un fundamento matemático detrás que asegura que, si no hay equivocaciones, el truco salga sin problemas. Es decir, a diferencia de otros trucos que consisten en despistar al espectador o escamotearle información, los trucos de magia matemática funcionan siempre y, por ello, pueden ser a veces realizados por los espectadores con la guía precisa del mago.

Si unimos los dos conceptos anteriores: trucos que promueven el deseo de aprender cómo se realizan y trucos cuyo fundamento es la matemática, no cuesta mucho intuir que la magia matemática puede ser un buen recurso para utilizarlo en nuestras clases de matemáticas para, primero captar la atención del alumno y, posteriormente, trabajar los conceptos matemáticos que existen detrás del truco.

Por ello, no es extraño que en los libros de texto no universitarios de matemáticas, especialmente de Primaria y ESO, se encuentren actividades presentadas como trucos de magia. Pero esto no es algo reciente.

En muchos libros antiguos de matemáticas recreativas de personas tan famosas como Leonardo Pisano (Fibonacci), Luca Pacioli o Gerolamo Cardano, podemos encontrar los mismos trucos de magia matemática que se han ido repitiendo siglo tras siglo en los libros correspondientes a esa materia.

El trabajo que presentamos en esta comunicación consiste en rastrear en la bibliografía antigua, para intentar encontrar cuáles fueron los primeros textos donde se citaron determinados trucos matemáticos. Pero también queremos plantear las posibilidades de ampliar esos trucos y, especialmente, estudiar las posibilidades de utilizarlos en clase de matemáticas para que sirvan como motivación para un estudio didáctico posterior.

En estas páginas vamos a presentar algunos trucos aislados del amplio abanico disponible para llevar al aula. Estos y otros juegos serán desarrollados a lo largo del taller, según el siguiente esquema:

I. Realización del truco en su versión original.
II. Estudio del fundamento matemático en el que se basa el truco.
III. Planteamiento de posibles generalizaciones basadas en el mismo principio.
IV. Discusión de los aspectos didácticos sugeridos por el truco.

1- Los tres objetos

ISBN 978-84-945722-3-4

Este truco aparece por primera vez en (Pisano, 1202), y a partir de ahí suele aparecer de forma sistemática en la mayoría de libros de matemática recreativa de distintas épocas, pero también en publicaciones de magia como en el ya clásico (Gardner, 1956).

El truco consiste en lo siguiente:

1) El mago coloca sobre la mesa 24 monedas del mismo valor y tres objetos diferentes –digamos que son un anillo, un billete y una cartera–.
2) Entrega una moneda al primer espectador, dos monedas al segundo y tres monedas al tercero.
3) Con el mago de espaldas, cada espectador escoge uno de los tres objetos y lo oculta. A continuación, quien ha escogido el anillo, toma tantas monedas como tenía inicialmente; quien ha escogido el billete, toma el doble de monedas de las que tenía inicialmente y quien ha escogido la cartera toma cuatro veces el número de monedas que tenía inicialmente.
4) El mago se vuelve de cara y, después de un rápido vistazo al número de monedas que quedan sobre la mesa, adivina qué objeto ha escogido cada espectador.

El problema que se plantea es: *¿De qué manera puede saber el mago qué objeto ha escogido cada espectador?*

Haciendo un estudio del problema, vemos que solo hay seis posibles elecciones de objetos entre los tres espectadores, que son precisamente las permutaciones de tres elementos. La siguiente tabla resume los distintos resultados (donde numeramos con 1, 2 y 3 a los espectadores, según el número de monedas que tienen inicialmente, y representamos por A el anillo, por B el billete y por C la cartera):

1	2	3	Monedas utilizadas	Monedas sobrantes
A	B	C	1x2+2x3+3x5=23	1
B	A	C	1x3+2x2+3x5=22	2
A	C	B	1x2+2x5+3x3=21	3
B	C	A	1x3+2x5+3x2=19	5
C	A	B	1x5+2x2+3x3=18	6
C	B	A	1x5+2x3+3x2=17	7

ISBN 978-84-945722-3-4

Así, por ejemplo, si en la mesa quedan 5 monedas, el espectador que recibió una moneda tiene el billete, el que recibió dos monedas tiene la cartera y el que recibió tres monedas tiene el anillo.

El estudio anterior puede hacerse tanto en Primaria como en secundaria, sustituyendo las monedas por fichas de cualquier juego de tablero.

A lo largo de la historia se han utilizado reglas mnemotécnicas para, sin más que observar el número de objetos resultantes, adivinar qué sujeto tenía cada uno de los objetos. También ha variado la forma de presentación. El objetivo ha sido siempre conseguir que el número final de monedas permita distinguir de forma unívoca quién posee cada objeto.

La versión original que aparece en (Pisano, 1202) pide multiplicar por 2 el número de monedas que tiene quien ha elegido A, por 9 el número de monedas que tiene quien ha elegido B y por 10 el número de monedas que tiene quien ha elegido C y sumar las tres cantidades. Luego, el mago debe realizar mentalmente las siguientes operaciones:

- Restar de 60 la suma obtenida.
- Dividir por 8 el resultado anterior.

El cociente indica el espectador que tiene el objeto A y el resto indica el espectador que tiene el objeto B. Basta realizar una tabla similar a la anterior para llegar a los resultados que permiten adivinar exactamente quién tiene cada objeto.

En (Pacioli, 1509) se propone un problema equivalente planteado de forma inversa: el mago entrega 12, 24 y 36 monedas a tres espectadores. Cada uno de ellos elige uno de los tres objetos, digamos A, B y C. El espectador que tiene el objeto A debe descartar la mitad de sus monedas, el que tiene el objeto B debe descartar dos tercios de sus monedas y el que tiene el objeto C debe descartar tres cuartos de sus monedas. El número total de monedas restantes permite al mago saber qué objeto tiene cada espectador.

De nuevo proponemos como actividad hacer el estudio de las seis posibilidades y ver qué números de objetos se recogen en cada caso.

Como pasa con las matemáticas en general, el interés es estudiar una generalización. En este caso, en (Bachet, 1612) se demuestra que no es posible una versión como la anterior para cuatro objetos, aunque se describe una variante del juego que sí es válida y se propone una regla mnemotécnica que permite distinguir los 24 posibles resultados. Más aún, en (Rouse

ISBN 978-84-945722-3-4

Ball, 1892) se presenta una generalización de este truco utilizando n objetos y n espectadores, utilizando una ingeniosa aplicación del sistema de numeración en base n.

2- El juego del novenario

Nicolas Chuquet (1445-1488) es considerado como el mejor matemático francés del siglo XV. Sin contar el libro de Fibonacci, parece que uno de los primeros libros en los que aparecen juegos de matemática recreativa que pueden considerarse como magia matemática es el titulado *Triparty en la science des nombres*, escrito en 1484 por Chuquet, aunque no fue oficialmente publicado hasta 1881, y a pesar de ello, el manuscrito tuvo una gran influencia en textos posteriores. El libro compendia todos los conocimientos matemáticos de esa época –resolución de las ecuaciones de segundo grado, progresiones aritméticas y geométricas – e, incluso, constituye el germen de la teoría de logaritmos desarrollada 100 años después por John Napier.

El capítulo del libro titulado *Jeux et esbatements qui par la science des nombres se font* contiene entretenimientos matemáticos que pueden presentarse como juegos de adivinación. Vamos a ver uno de ellos.

El mago pide a un espectador que realice las siguientes operaciones:

1) Piensa un número.
2) Multiplícalo por tres y divide el resultado por dos.
3) Vuelve a multiplicar por tres el resultado obtenido.
4) Al resultado final réstale nueve mientras puedas (es decir, mientras no salga un número negativo).
5) Por último, si es posible, resta al resultado final cualquier número entre 1 y 8.

La cuestión que se plantea en este momento es: *¿Qué datos necesita el mago para adivinar el número pensado?*

Vamos a ver el estudio que se podría realizar en clase como aplicación lúdica del álgebra elemental. Tenemos dos posibles resultados según sea el número pensado par o impar.

- Si el número pensado es par, digamos 2x, las primeras operaciones llevan al resultado 9x. El número de veces al que se puede restar nueve de este número corresponde al cociente de su división por nueve, es decir el propio x. Al multiplicarlo por dos, se obtiene el número pensado.

ISBN 978-84-945722-3-4

- Si el número pensado es impar, digamos 2x+1, las primeras operaciones llevan al resultado (18x+9)/2=9x+9/2. El número de veces al que se puede restar nueve de este número vuelve a ser el propio x. Como el resto es 4.5, es posible realizar la resta final, de modo que, para recuperar el número pensado, basta multiplicar x por 2 y sumar uno.

Resumiendo los dos casos, para que el mago adivine el número debe saber cuántas veces ha restado 9 del número resultante de las operaciones. Debe multiplicar ese número por 2 y sumar uno si ha podido restar algo al final.

Este truco, sin embargo, no es original de Chuquet pues es también conocido en la tradición oriental ya que aparece descrito por Ahmad al-Antaki (~987) en sus *Comentarios sobre la aritmética de Nicómaco* y todavía un siglo antes por Abu Yusuf al-Kindi.

3- La matriz de cartas

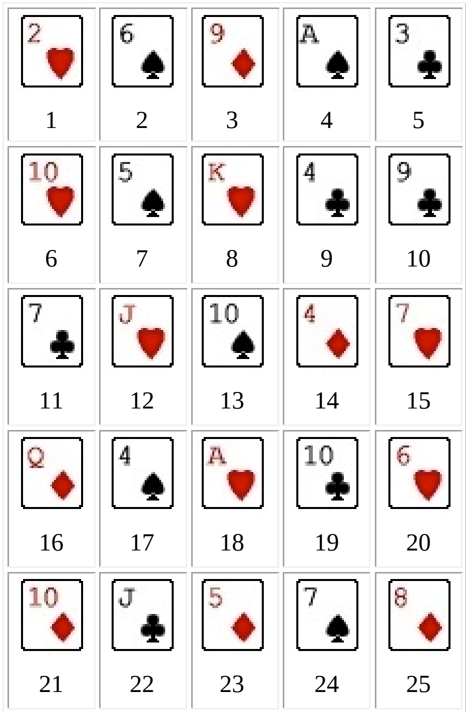
Una referencia básica de este juego es la de Angelo John Lewis, de nombre artístico profesor Hoffmann, de quien se afirma que fue el primero de la historia moderna en recopilar la magia de forma enciclopédica, a través de la trilogía *Modern Magic*, *More Magic* y *Later Magic* publicados entre 1876 y 1903, y su posterior secuela *Latest magic*, publicado en 1918.

En el capítulo III de (Hoffmann, 1876) aparece el juego que vamos a describir, bajo el título "Another mode of discovering a card thought of".

1) El mago reparte sobre la mesa 25 cartas, caras arriba, formando un cuadrado con cinco filas y cinco columnas.
2) Invita a una persona que piense una de las cartas y le indique solamente en qué fila se encuentra.
3) El mago recoge ahora todas las cartas del modo siguiente: coloca la última carta de la última fila sobre la última carta de la cuarta fila; coloca estas dos cartas sobre la última carta de la tercera fila, y así sucesivamente; al terminar de recoger la última columna, coloca las cinco cartas sobre la última carta de la quinta fila, el grupo de cartas sobre la última carta de la cuarta fila, siempre de la misma forma, hasta recoger todas las cartas.

Por ejemplo, si imaginamos que las cartas están dispuestas según el siguiente esquema,

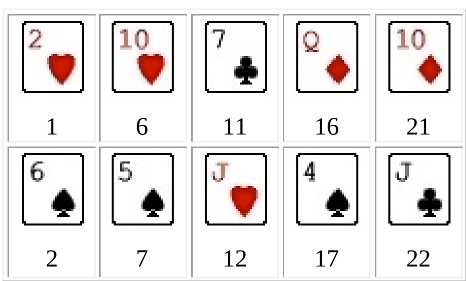
VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



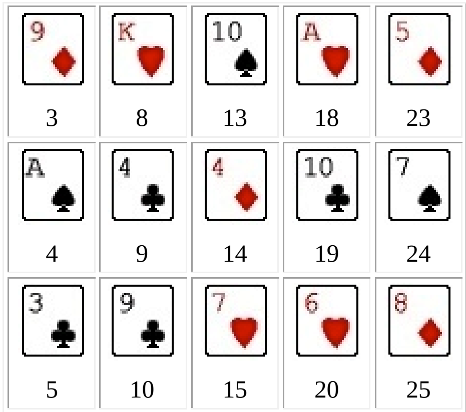
el orden de recogida es 25-20-15-10-5-24-19-14-9-4-23-...-2-21-16-11-6-1.

4) A continuación, el mago vuelve a repartir todas las cartas en cinco filas de cinco cartas cada una, en el orden "habitual": las cinco primeras cartas formarán la primera fila, las cinco siguientes se colocarán bajo las anteriores, y así sucesivamente.

Según el esquema anterior, las cartas quedarán colocadas en el orden siguiente:



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



5) El mago pregunta de nuevo al espectador en qué fila se encuentra ahora su carta. Inmediatamente adivina la carta elegida por el espectador.

La forma en la que el mago descubre cuál es la carta del espectador se basa en un principio de localización tan obvio como el siguiente: *“si un conjunto de n² cartas se distribuye en un cuadrado de n filas y n columnas, cualquier carta está determinada de forma única por la fila y la columna en las que se encuentra.”*

La forma de aplicar este principio en el juego se ve claramente en el proceso de recoger y repartir las cartas sobre la mesa, consiguiendo que todas las cartas hayan intercambiado la fila con la columna. Así pues, si una carta estaba en la fila A y columna B, ahora está en la fila B y columna A. Por ejemplo, si la carta estaba primero en la fila 4 y luego en la fila 2, se trata del cuatro de picas, pues es la cuarta carta de la segunda fila.

En matemáticas se dice que la nueva matriz es la traspuesta de la matriz inicial. Y este truco puede utilizarse en clase para ejemplarizar lo que es la matriz traspuesta o también en la ESO para trabajar con coordenadas. Cuando se comienza con los ejes de coordenadas siempre se plantea el problema de que los alumnos confunden la abscisa con la ordenada y el punto (3, 2) lo dibujan en los ejes como el punto (2, 3). Estudiando la distribución de este truco se puede ver claramente la diferencia entre uno y otro, ya que al cambiar los órdenes cambia la ubicación de la carta.

Una simple consecuencia de este principio es que el juego puede realizarse con 9, 16, 25, 36 o, en general, con cualquier número cuadrado de cartas. Sin embargo, no hay ninguna limitación matemática que impida realizar el juego con n x m cartas, siendo n y m distintos.

ISBN 978-84-945722-3-4

Bastará que, en el primer reparto, se formen n filas y m columnas y, en el segundo reparto, se formen m filas y n columnas. En la práctica, esta distribución asimétrica no es natural y hace sospechoso el proceso, por lo que es más fácil que descubran el truco.

Si utilizamos un número cuadrado, es posible realizar el juego a varios espectadores simultáneamente. Un juego clásico que conjuga estas dos particularidades corresponde al problema 64 del libro *Plusieurs cartes estans proposées à plusieurs personnes, deviner quelle carte chaque personne aura pensé* publicado en 1624 por Jean Leurechon.

Referencias bibliográficas

Bachet, C. (1612). *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres*. Lyon.

Chuquet, N. (1484). *Triparty en la science des nombres.* Lyon.

Gardner, M. (1956). *Mathematics, magic and mystery.* Dover, New York.

Hoffmann, P. (1876). *Modern magic*. London.

Leurechon, J. (1624). *Récréation mathématique, composée de plusieurs problèmes plaisants et facétieux en faict d'arithmetique, geometrie, mechanique, optique et autres parties de ces belles sciences*. Pont-à-Mousson.

Pacioli, L. (1509). *De viribus quantitatis.* Bologna.

Pisano, L. (1202). *Liber abaci.*

Rouse Ball, W.W. (1892). *Mathematical recreations and essays.* London.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-182

AFIANZAR LA TRIGONOMETRÍA CON JUEGOS Y PASATIEMPOS

Ana García Azcárate
anagazcarate@gmail.com
Grupo Azarquiel. España

Núcleo temático: **Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.**
Modalidad: Taller (T)
Nivel educativo: Terciario o Bachillerato
Palabras clave: Trigonometría, juegos, motivación, refuerzo

Resumen
Cada vez más profesores de matemáticas, incorporan en su quehacer diario, materiales lúdicos para aumentar la motivación y por lo tanto la implicación de los alumnos. La trigonometría escolar, correspondiente a los cursos de 4º de ESO y Primero de Bachillerato en España, incorpora una parte de memorización que, junto a unos razonamientos sencillos, permiten recordar los valores más importantes de las razones trigonométricas, las relaciones que unen las diversas funciones trigonométricas etc. Los juegos y pasatiempos nos pueden servir para reforzar estos conocimientos memorísticos y conseguir que se incorporen al bagaje cultural de los alumnos de secundaria. Una parte del profesorado de Matemáticas sigue pensando que los alumnos de 15-16 años son mayores para "jugar". Sin embargo he podido comprobar en múltiples ocasiones que el juego y la competición, el afán de ganar, estimula a todas las edades.
Durante las 2 horas del taller, los profesores van a experimentar "jugando" con todo tipo de materiales lúdicos "trigonométricos", desde un sudomates, un juego de la Oca, una baraja, diversos puzles, un cuatro en raya, un cuadrado mágico, un Bingo o un dominó.

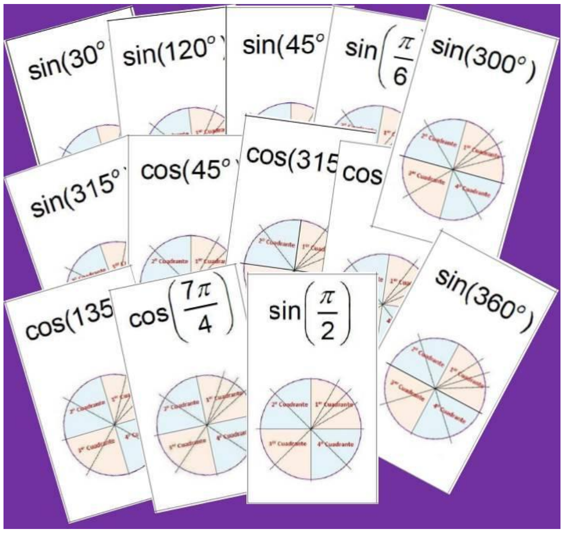
Quién de nosotros no ha observado con sorpresa a nuestros alumnos de 4º de la ESO o Primero de Bachillerato, al iniciarse un examen de Trigonometría, lanzarse a escribir en una esquina, una misteriosa tablilla que, según ellos, les iba a permitir obtener los valores de las razones trigonométricas que les estábamos preguntando. Sin embargo, todos los que enseñamos trigonometría, sabemos que con la ayuda de pequeños razonamientos, el recordar las razones de los principales ángulos notables de la circunferencia goniométrica es una tarea sencilla. Para ayudar a esta tarea, presentamos aquí unos juegos donde para tener éxito, los jugadores y jugadoras deben utilizar estos valores para ganar por ejemplo, una partida de cartas o de dominó o otros donde deben recurrir para salir vencedores, a las fórmulas y relaciones trigonométricas más sencillas..

ISBN 978-84-945722-3-4

1. La baraja de los senos y cosenos

Material necesario:

- Una baraja con 66 cartas con senos y cosenos para cada equipo.



- Una circunferencia trigonométrica por jugador. Dependiendo del grupo, el profesorado puede optar por entregar una circunferencia trigonométrica con todos los ángulos notables indicados, o que tenga sólo los valores de las razones de los ángulos notables del primer cuadrante. Puede también, por el contrario, pedirse a los alumnos que, previamente al juego, dibujen y rellenen en su cuaderno, su propia circunferencia trigonométrica.

Reglas del juego:

- Juego para dos, tres o cuatro jugadores.
- Se reparten todas las cartas. Si hay cuatro jugadores, se descartan dos cartas al azar.
- Cada jugador coloca sus cartas en un montón boca abajo.
- En cada jugada, los jugadores descubrirán la carta que se encuentra encima de su montón.
- La baza se la llevará el jugador que haya sacado la carta con el mayor valor. El ganador recoge todas las cartas y las coloca cerca de él.

ISBN 978-84-945722-3-4

- Cuando se tiran dos cartas o más que tienen el mismo valor máximo, se dice que hay "***batalla***". En este caso, los jugadores con los valores iguales tirarán sobre su carta, la carta siguiente de su montón para desempatar. El ganador de la baza se lleva todas las cartas.

- La partida termina cuando se acaban las cartas de los montones de cada jugador.

- Gana el jugador que ha conseguido más cartas.

2. Un "Sudomates" de trigonometría

2.1 Qué es un "Sudomates"?

Combinando un sudoku tradicional con unas preguntas de matemáticas, conseguimos reforzar los contenidos de clase que necesitamos, de una forma mucho más lúdica. Un Sudomates se compone de dos partes:

Por un lado una rejilla completamente vacía con el formato habitual de los Sudokus.

Por el otro lado unas preguntas de cualquier tema que van a permitir ir rellenando las casillas del sudoku, colocando los resultados de las preguntas en las casillas asignadas de la rejilla.

2.2 Un Sudomates de Trigonometría

Debes primero rellenar algunas de las casillas de este tablero de Sudoku completamente vacío, contestando a las preguntas que se hacen en la siguiente tabla. El resultado se debe colocar en la casilla correspondiente.

ISBN 978-84-945722-3-4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A									
B									
C									
D									
E									
F									
G									
H									
I									

De esta forma conseguirás colocar 33 números, todos del 1 al 9 en las casillas del SUDOKU

TABLA DE PREGUNTAS

ISBN 978-84-945722-3-4

A3 : $\frac{\pi}{30}$ radianes en grados

B1 : $5+\sin(\pi)$

B6 : $\frac{2\pi}{45}$ radianes en grados

B8 : $\frac{1080}{\pi}$ grados en radianes

B9 : $\frac{\pi}{45}$ radianes en grados

C4 : $12\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

C5 : $5\cos(8\pi)$

C6 : $\frac{\pi}{180}$ radianes en grados

C7 : El inverso del cuadrado de $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

C9 : $2+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

D2 : $\frac{720}{\pi}$ grados en radianes

D3 : $\frac{\pi}{90}$ radianes en grados

D4 : $7\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

D7 : $4+2\cos(0)$

E1 : $\frac{1620}{\pi}$ grados en radianes

E4 : $4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2$

E6 : $7\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

E8 : $\frac{1440}{\pi}$ grados en radianes

E9 : $\frac{\pi}{36}$ radianes en grados

F3 : $\frac{1260}{\pi}$ grados en radianes

F6 : $\frac{7\pi}{180}$ radianes en grados

F9 : $\frac{360}{\pi}$ grados en radianes

G3 : $2\cos(4\pi)+2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

G4 : $2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

G5 : $7\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)$

G8 : $\frac{900}{\pi}$ grados en radianes

H1 : El inverso de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

H2 : $14\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

H5 : $12\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

H6 : $\frac{\pi}{60}$ radianes en grados

H9 : $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+1$

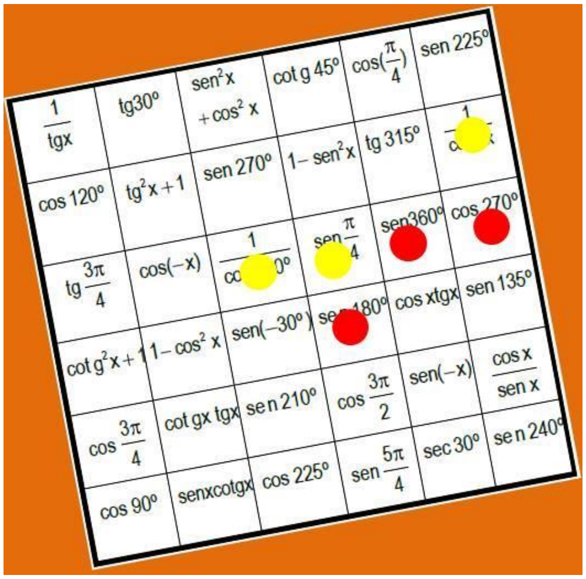
I3 : $\frac{\pi}{20}$ radianes en grados

I4 : $8\left(\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)^2$

Después debes acabar de rellenar las casillas, siguiendo las reglas clásicas de los Sudokus.

3. Cuatro en raya trigonométrico

ISBN 978-84-945722-3-4



Material necesario:

- Un tablero como el de la figura adjunta.
- 10 fichas por jugador/ - un dado para establecer el orden.
- Un tablero solución para el jefe del equipo.

El juego consiste en hacer Cuatro en raya en el tablero.

Reglas del juego:

- Juego para dos o tres jugadores.
- Se tira un dado. El que saque el resultado mayor será el jefe del equipo que custodiará las soluciones de las casillas y jugará el primero.
- El primer jugador elige una casilla del tablero. Para ocuparla debe hallar el valor de la razón que aparece o en su caso debe simplificar la expresión trigonométrica de la casilla. Por ejemplo si aparece: $\text{sen}x \cdot \cot gx$ el jugador deberá sustituirlo por **cos x** pues:

$$\text{sen}x \cdot \cot gx = \text{sen}x \cdot \frac{\cos x}{\text{sen}x} = \cos x$$

- El jefe de equipo, si hay alguna duda, consulta el tablero de soluciones:
- Si la respuesta es correcta, el jugador ocupa la casilla.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

- Si la respuesta no es correcta, el jugador pierde su turno.

- Gana el que consigue hacer "C*uatro en raya*"

4. Crucigrama trigonométrico

Utilizando las definiciones que te damos para las casillas tanto horizontales como verticales, rellena estas palabras cruzadas sobre trigonometría.

Cuando la respuesta tenga varias palabras, debes dejar entre ellas una casilla vacía.

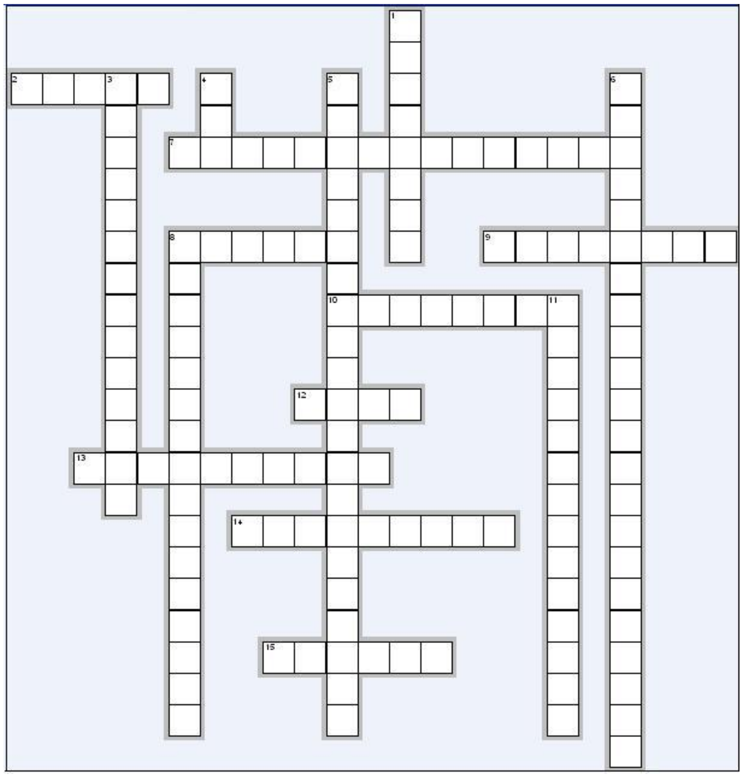
Horizontales

2. EL VALOR DE SEN(-X)
7. DOS ÁNGULOS TALES QUE EL SENO DE UNO ES EL COSENO DEL OTRO
8. EL COCIENTE ENTRE EL CATETO CONTIGUO Y LA HIPOTENUSA
9. EL COSENO DE UN ÁNGULO DE TRESCIENTOS GRADOS
10. DOS ÁNGULOS ASI TIENEN EL MISMO COSENO
12. EL CATETO OPUESTO PARTIDO POR LA HIPOTENUSA
13. INVERSA DE LA TANGENTE
14. EL SENO DE 330º
15. LA UNIDAD MATEMÁTICA DE ÁNGULO

Verticales

1. EL COCIENTE ENTRE SENX Y COSX
3. EL ÁNGULO MAS PEQUEÑO CUYA TANGENTE NO EXISTE
4. LA SUMA DEL CUADRADO DEL COSENO DE UN ÁNGULO Y EL CUADRADO DE SU SENO
5. EL COSENO DE ESTE ÁNGULO ES -1 Y SU SENO ES CERO
6. EL ÁNGULO DEL TERCER CUADRANTE CON SU SENO IGUAL A SU COSENO
8. EL ÁNGULO DEL PRIMER CUADRANTE CUYA TANGENTE ES UNO
11. DOS ÁNGULOS DEL PRIMER Y SEGUNDO CUADRANTE CON EL MISMO SENO

ISBN 978-84-945722-3-4



5. Cuadrando el dodecágono

Este es un puzle formando con seis piezas recortadas de un dodecágono. Estas piezas tiene la curiosa propiedad de poder juntarse para formar un cuadrado.

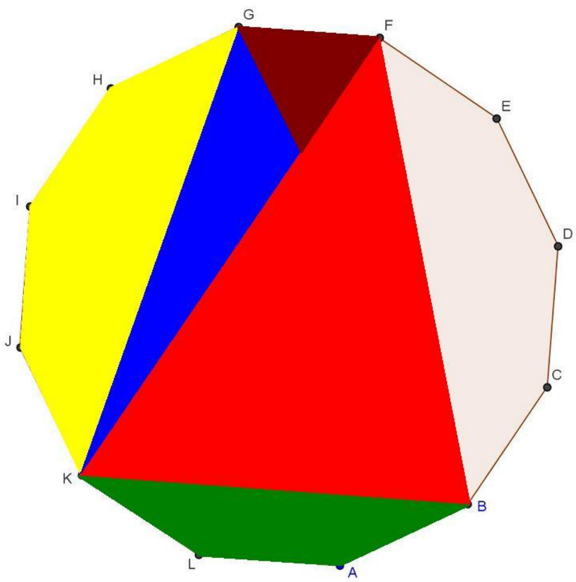
Esta propiedad, es debida entre otras cosas a los ángulos de cada una de las seis piezas.

Investiga entonces ¿qué ángulos tienen las piezas del puzle? Para eso, debes recordar que se trata de un polígono regular, que se puede inscribir en una circunferencia.

Cuando conozcas todos los ángulos, intenta obtener los cuatro ángulos rectos del cuadrado e intenta formar el cuadrado.

Gracias a la trigonometría, si nos dicen que el dodecágono inicial tiene de lado 10 cm, vas a poder hallar el lado del cuadrado final.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



6. Cuadrado mágico

Comprueba que este cuadrado 3x3 es efectivamente un cuadrado mágico.

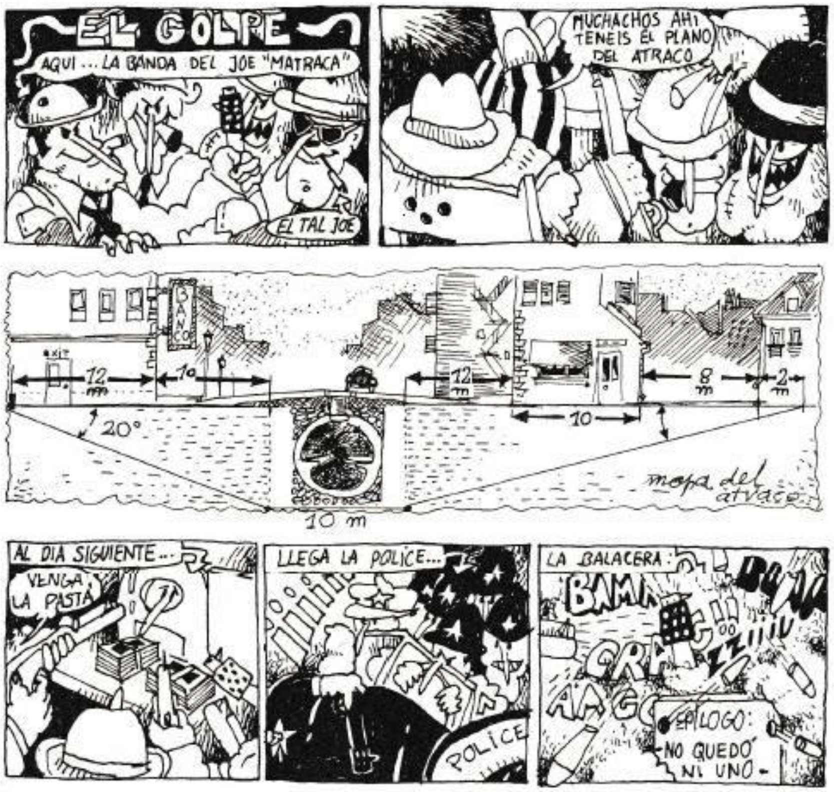
$1+\dfrac{\cot ga \bullet sen2a}{2}$	$1-\cos^2(-a)$ $-\cos^2(\dfrac{\pi}{2}-a)$	$1+\dfrac{tga \bullet sen2a}{2}$
$1-\cos 2a$	1	$2-2sen^2(-a)$

ISBN 978-84-945722-3-4

$1-\text{sen}^2 a$	$1+\cos^2(\pi-a)$ $+\text{sen}^2(\pi+a)$	$1-\dfrac{1}{1+\text{tg}^2 a}$

7. El atraco del banco: Homenaje al Grupo Cero de Valencia

Una banda decide atacar un banco. Para introducirse en él, decide construir un túnel. ¿Qué longitud tiene el túnel¿ ¿Hasta qué profundidad llegan a penetrar?



8. Bingo Trigonométrico

Hemos adaptado las reglas tradicionales del Bingo para repasar las razones trigonométricas de los ángulos notables en toda la circunferencia trigonométrica.

ISBN 978-84-945722-3-4

Material necesario:

- Un cartón de Bingo para cada equipo.

- Una baraja de 48 cartas, marcadas con las expresiones de los cosenos, senos o tangentes de los ángulos notables de los cuatro cuadrantes.

Bibliografía

García Azcárate Ana C. (2013). *Pasatiempos y juegos en clase de matemáticas: geometría*. Madrid: Editorial Aviraneta.

Grupo Cero (1982) *Matemáticas de Bachillerato: 2º Curso.* Barcelona: Editorial Teide

Juegos y Matemáticas**:** http://www.anagarciaazcarate.wordpress.com

ISBN 978-84-945722-3-4

T-208

METODOLOGÍA FLIPPED EN EL ÁMBITO DE LAS MATEMÁTICAS

Juan Francisco Hernández Rodríguez
juanfisicahr@hotmail.com
Colegio Hispano Inglés Santa Cruz de Tenerife. España

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
Modalidad: CB
Nivel educativo: E.S.O., bachillerato
Palabras clave: flipped, app, móvil, innovación

Resumo
Explicaré, por un lado, cómo esta metodología ha cambiado la forma de impartir clases en el aula y ha convertido a ésta en un espacio en el que se llevan a cabo dinámicas y actividades atractivas de matemáticas; y por otro, qué herramientas digitales han propiciado este cambio en el Colegio Hispano Inglés y cómo usarlas.

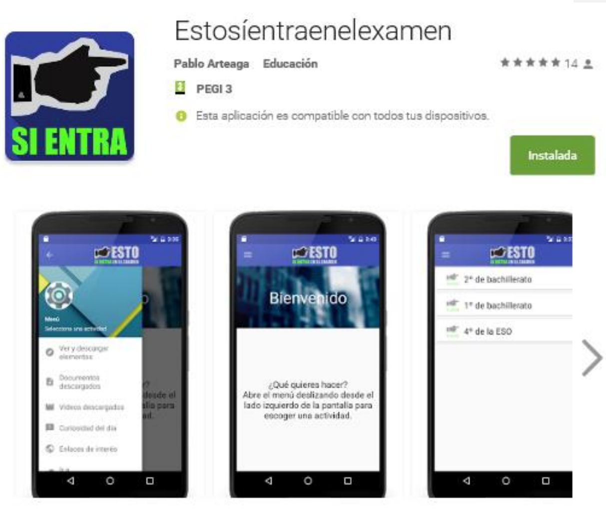
Todas las imágenes son interactivas

Desde hace cuatro años y para apoyar las explicaciones en el aula, he hecho más de 600 videos educativos que están alojados aquí y que son de gran ayuda para los alumnos. De hecho, me piden constantemente que grabe las clases para volverlas a ver cuando llega la época de exámenes y se ha convertido en una herramienta fundamental cuando un alumno falta porque está enfermo o de viaje. Por ejemplo, el año pasado los alumnos del cole que

ISBN 978-84-945722-3-4

estuvieron dos meses en Canadá seguían las explicaciones en matemáticas gracias a los videos.

Cada evaluación envío a los alumnos un cuestionario de Google para que evalúen mi forma de trabajar y aporten sugerencias. Hace dos años recogí muchas referidas a que se ***facilitara*** el uso de la web en el móvil. Así, con la ayuda de un amigo, se puso una app a disposición de los alumnos que facilitase el uso en el móvil.



Mes	Megabytes	Peticiónes
2016-04	42.829,2	19.407
2016-03	483.006,4	[illegible]
2016-02	149.490,3	276.923
2016-01	402.818,8	331.130
2015-12	223.202,2	294.768
2015-11	318.057,7	296.470
2015-10	180.707,8	287.669
2015-09	94.946,1	272.856
2015-08	19.706,7	197.934

El éxito ha sido total. Casi todos los alumnos a los que imparto clase la tienen descargada en el móvil o Tablet y están muy contentos. En la siguiente imagen se puede comprobar que el nivel de descargas se ha multiplicado por cuatro desde que se introdujo la app (octubre-15). Para hacernos una idea, 100 gb equivalen a 2000 descargas de videos y, por tanto, actualmente superamos las 9500 descargas de videos. Esto ha repercutido que en clase podamos dedicar tiempo al trabajo cooperativo como podrán ver si pinchan en la imagen derecha.

Conclusiones: Nada mejor que ver que dicen los alumnos y padres con esta nueva forma de trabajar:

ISBN 978-84-945722-3-4

Por tanto, el hecho de que los alumnos vean la explicación en casa, deja tiempo, mucho tiempo para conocer y usar nuevas herramientas digitales, hacer actividades atractivas de matemáticas en el aula, y para que los alumnos generen nuevos contenidos de matemáticas.

Webs de referencia:

The flipped classroom, de la que soy editor. En el enlace podrán ver algunas de las entradas que he publicado en la misma.

Estonoentraenelexamen.com, mi otro blog junto con Estosientraenelexamen.com pero éste dedicado a comentar las experiencias de aula.

Mi Canal de Youtube. .En el mismo público, entre otros muchos, los tutoriales sobre las herramientas que usamos para hacer flipped: Socrative, Kahoot, EDpuzzle, Moodle, Padlet, Geogebra,……. y de las que ***hablaré en mi taller***

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

T-213

Entornos llenos de Matemáticas: el caso de la Sagrada Familia, en Barcelona

Xavier Vilella, Manel Sol, Ampar López de Briñas,
Charo Martin, Vanessa Queralt, Imma Garcia

Grup Vilatzara (ICE – Universitat Autònoma de Barcelona)

España

Núcleo temático: Matemáticas y su integración con otras áreas
Modalidad: T
Nivel educativo: Medio o Secundario
Palabras clave: Contextos, poliedro, superficie, reglada.

RESUMEN

En general, las matemáticas están presentes en multitud de elementos de nuestro entorno, de una manera más o menos explícita. En el caso de edificios como la Sagrada Familia, hay elementos matemáticos evidentes y otros cuya interpretación parece reservada a un reducido grupo de personas eruditas. Con este taller el Grup Vilatzara quiere mostrar que todos tenemos la posibilidad de comprender (y admirar) los secretos guardados en piedra en este templo de Antoni Gaudí.
Nos centraremos en cuatro aspectos: poliedros estrellados, simbolismo numérico, superficies regladas y diseño del entorno del templo. Las personas asistentes podrán construir algunos de estos elementos.
A su vez, deseamos animar al profesorado a utilizar las muestras artísticas de todo tipo que se encuentren en su entorno para ayudar a desarrollar las competencias matemáticas de su alumnado. Observar el entrono con mirada matemática nos permite descubrir estos recursos para el aula.

1a Parte: El entorno de la Sagrada Familia

El arquitecto Antoni Gaudí, cuando diseñó la Sagrada Familia, también tuvo en cuenta como sería observada por los peatones. Quería que su obra fuese un foco de atracción turística. Por eso quería que el entorno del templo realzara la monumentalidad y belleza de su proyecto. Esta idea quería decir un entorno sin casas y que hubiera espacio para que se pudiera contemplar toda su magnitud desde diferentes puntos de vista. Inicialmente la plaza tenía que ser de 8 puntas. Su objetivo era que cualquier persona pudiera observar desde su

ISBN 978-84-945722-3-4

ángulo de visión (30 grados en horizontal y en vertical) el cimborrio central de 170 metros de altura y dos fachadas al mismo tiempo. Pero también era consciente de que para hacerlo se tendría que expropiar los terrenos del entorno del templo y esto suponía un gasto importante que en aquellos momentos las autoridades municipales no podían admitir. Para hacer posible su idea de un entorno que agrandara su proyecto y al mismo tiempo que fuera realizable económicamente diseñó el entorno de la Sagrada Familia con una plaza estrellada de 4 puntas, que tampoco llegó a realizarse.

Desarrollo del Taller

En el taller trabajaremos sobre parte de un mapa de Barcelona, centrado en el templo, para estudiar las zonas del mismo en las que se cumplían las condiciones de Gaudí.

2ª Parte: Poliedros Estrellados

Gaudí se inspiraba en la Naturaleza para realizar muchos detalles de sus obras. Uno de estos detalles es la representación de las estrellas de las constelaciones representadas en la Escena de la Anunciación.

Dicha escena está situada en la zona central de la Fachada del Nacimiento, en la parte superior de la Estrella de Belén y en ella se representa el momento en que el Arcángel Gabriel le comunica a la Virgen María que será la madre de Jesús.La escena está enmarcada bajo un arco en el que se representan las constelaciones del zodíaco que son visibles en el cielo nocturno en la posición exacta en que se encontraban la noche del nacimiento de Jesús, y que son: Virgo, Leo, Cáncer, Géminis, Tauro y Aries.

La representación de las constelaciones ha evolucionado a lo largo del tiempo y actualmente sólo consta de las estrellas y aquellas líneas imaginarias que se trazan para localizarlas con más facilidad, recordando vagamente aquella figura a la que su nombre hace referencia.

Sin embargo, en la Sagrada Familia, se realiza mediante las figuras que representan los nombres de las constelaciones, como se hacía antiguamente.

Desarrollo del Taller

El taller consiste en identificar los poliedros estrellados en las estrellas de la constelación de Géminis del templo y conseguir la misma representación de líneas tal y como aparece en los mapas estelares actuales.

ISBN 978-84-945722-3-4

3ª parte : Secretos guardados en piedra

En la fachada de la Pasión, realizada por Josep María Subirachs (siguiendo los dibujos que se encontraron entre los papeles de Antoni Gaudí) podemos observar un cuadrado mágico. La suma de todas las filas, columnas y diagonales es la misma. Se la llama la suma mágica. Lo primero que nos planteamos es calcularla y la compararemos con la suma mágica de uno de los cuadrados mágicos más conocidos, el de Albercht Durero (1471-1528). Este realizó un grabado sobre madera titulado ***La melancolía***, datado en 1514 en el que puede observarse un cuadrado mágico. En él aparecen los números del uno al dieciséis en un cuadrado de 4x4 casillas. Todas las filas, columnas y diagonales suman 34. El de Durero se considera perfecto y en cambio el de la Sagrada Familia no lo es. Deduciremos el por qué y qué significado tiene la suma mágica de la fachada de la Pasión.

Hay muchas actividades que pueden realizarse en clase a partir de los cuadrados mágicos, pudiendo desarrollar significados de propiedades de los números naturales, que incluyen patrones de simetría. También puede plantearse si es posible un cuadrado mágico con fracciones o con decimales, o con números enteros.

Desarrollo del Taller

Estudiaremos el cuadrado mágico que aparece en la Fachada de la Pasión, lo compararemos con el de Durero y deduciremos las propiedades de estos cuadrados.

4ª parte: Superficies regladas en la Sagrada Familia de Antoni Gaudí

En la Sagrada Familia se reconocen algunas superficies regladas. También podemos observarlas en muchos objetos de la vida cotidiana y en edificios, obras de arte, etc.

Aunque las superficies regladas ya eran conocidas en su época, Antoni Gaudí fue el primero en utilizarlas en Arquitectura. Como él mismo dice "Me ha dado mucho a pensar el que no hayan sido aplicadas antes y que deba ser yo el primero en hacerlo. Eso sería lo único que, en todo caso, me haría dudar. No obstante, creo que, convencido del perfeccionamiento que representan, tengo el deber de aplicarlas" ¿Por qué su interés por dichas superficies? La respuesta nos la da él mismo cuando afirma: "El uso de las superficies regladas es lógico por su superioridad plástica y su facilidad constructiva".

En el taller, procederemos como haría el propio Gaudí, es decir, construyendo y experimentando. Así, por ejemplo, se verifica que el hiperboloide puede ser, de hecho, una

ISBN 978-84-945722-3-4

superficie doblemente reglada y, además, mucho más resistente que el cilindro del mismo diámetro; hecho que justifica el por qué las torres de refrigeración o algunos huesos como el fémur tienen forma de hiperboloide. Del paraboloide hiperbólico, que también es doblemente reglado, se puede destacar, por ejemplo, que es la superficie mínima capaz de unir dos rectas a diferente altura y con distinta inclinación, que todos los puntos tienen la misma tensión, o que tres puntos nunca están alineados; propiedades ideales para la construcción de lonas que tengan que soportar las inclemencias del tiempo (viento, agua, ...). Las paredes en forma de conoide de las Escuelas Provisionales de la Sagrada Familia permiten hacer una estructura resistente con muy poco material constructivo y, por tanto, ahorrar dinero.

Nuestra propuesta consiste en aprovechar un edificio significativo cercano al alumnado para desarrollar competencia matemática de alto nivel, para hacer y pensar las Matemáticas de una manera distinta. Todos los edificios (más aún si son singulares), si se observan con ojos matemáticos, permiten reflexionar sobre aspectos matemáticos contextualizados, incluso en el aspecto histórico. No sería difícil, en el caso de la Sagrada Familia, llegar a acuerdos con otros departamentos del centro de secundaria para establecer cierta interdisciplinariedad: por ejemplo, características del modernismo, diseño de envases, propiedades estructurales de las cubiertas de diferentes materiales, etc.

Desarrollo del Taller

En este taller trabajamos algunas propiedades de las superficies regladas, pero todavía podríamos formular muchas más preguntas matemáticas interesantes: ¿Por dónde es más fácil subir una escalera de caracol, por la parte interior o por la parte exterior? ¿Por qué? ¿Por dónde recorremos más distancia? ¿Por qué los cilindros se utilizan con frecuencia como recipientes? ¿Qué otra propiedad tienen en común el cilindro, el cono y el hiperboloide y no comparte, por ejemplo, el paraboloide hiperbólico? Todas estas preguntas y muchas más que se nos pueden ocurrir, permiten la conexión entre diferentes temas de matemáticas y también con otras asignaturas.

Referencias Bibliográficas

- Alsina i Català, C., Buxadé, C., & Margarit, J. (2002). *Gaudí. La búsqueda de la forma.* Barcelona: Ayuntamiento de Barcelona. Institut de Cultura.

ISBN 978-84-945722-3-4

- Bonet i Armengol, J. (2000). *L'últim Gaudí*. PORTIC.
- López de Briñas Ferragut, M.D., (2016). *Estrellas en la Sagrada Familia.* FESPM, Badajoz.
- Pickover, Clifford (2003): *The Zen of Magic Squares, Circles, and Stars*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-258

CORES, ARTE E… MUITA MATEMÁTICA!!!

Cleber Gouvêa Fernandes
cleber.fernandes@ifrj.edu.br
Instituto Federal do Rio de Janeiro - Brasil

Núcleo temático: V – Recursos para o ensino e aprendizagem das matemáticas
Modalidade: T
Nível educativo: 5. Formação e atualização de ensino
Palavras chave: Análise Combinatória; Arte; Recursos; Oficina

Resumo
Análise Combinatória é o ramo da Matemática que analisa estruturas e relações discretas. Para solucionar uma situação-problema de Análise Combinatória, em geral, são exigidas altas doses de engenhosidade e criatividade específicas, além da compreensão plena da situação descrita. Porém, nota-se que, em grande maioria, seu ensino é realizado de forma mecânica, apoiada em situações padronizadas e com certa dependência de fórmulas para a resolução, não oferecendo aos educandos uma experiência minimamente satisfatória, desvendando a dificuldade dos docentes na compreensão desta temática, justificada pela pouca ou má abordagem em suas formações e, principalmente, pela falta de recursos diferenciados disponibilizados. Através de atividades sequenciais, proporemos uma nova via para o ensino deste tema, valendo-se da manipulação de tintas de cores diversas para pintar figuras onde, a escolha de cores de diferentes regiões juntamente com a possibilidade de misturar ou não essas cores darão o tom característico dos grupamentos – ordenados ou não ordenados. Esta via diferencia-se do previsto em livros didáticos e possibilita a introdução deste tema a partir dos anos iniciais, sendo gradativamente ampliados nos anos seguintes, como sugerem as indicações curriculares. Com isso, objetiva-se socializar com professores uma experiência que possibilite-os melhorar o ensino e, consequentemente, a aprendizagem desta temática.

1. A Análise Combinatória

Historicamente, o objetivo da Análise Combinatória é o de solucionar os problemas de contagem, ou seja, "encontrar o número de caminhos existentes com algumas operações pré-definidas" (Vazquez & Malagutti, 2010). De uma maneira geral, Análise Combinatória define-se como a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas. Para muitos alunos, e até mesmo professores, esta definição abarcaria necessariamente conceitos como arranjos, combinações e permutações, embora estes sejam conceitos através dos quais se resolve um tipo de problemas, comumente os mais abordado no ensino de Análise

ISBN 978-84-945722-3-4

Combinatória na Educação Básica: os de contagem de certos tipos de subconjuntos de um conjunto finito sem a necessidade de enumerar os seus elementos (Morgado, Carvalho, Carvalho & Fernandes, 1991).

As soluções dos problemas de Análise Combinatória exigem técnicas específicas, geralmente bastante engenhosas e embasadas em plena compreensão da situação-problema em que se apresenta (Morgado et al., 1991), fazendo com que problemas fáceis de enunciar exijam soluções estrategicamente criativas (Carvalho, 2015).

2. Por que ensinar e aprender Análise Combinatória?

De uma maneira bem geral, Silva, Fernandes e Soares (2004) definem a aproximação entre a Matemática e o educando como o ato de mostrar-lhe a possibilidade de aplicação desta ciência na sua própria vida. Nesta vertente, temos a Análise Combinatória como um dos temas essenciais da Matemática, estando presente em diversas áreas do conhecimento científico, viabilizando diversas aplicações em problemas reais (Brumano, 2013, Pinheiro & Sá, 2007), além de outras áreas da própria Matemática, como a teoria de grupos, a teoria dos números, a probabilidade, a topologia entre outras (Costa, 2013). As habilidades matemáticas necessárias à Análise Combinatória exigem características específicas como "flexibilidade de pensamento, construção de conjecturas e discussão de ideias" (Costa, 2013, p.21), constituindo-se como uma ferramenta fulcral ao desenvolvimento cognitivo dos alunos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) alocam os conteúdos de Análise Combinatória na parte de "Tratamento da Informação" baseado numa demanda social. Todos os conteúdos desta parte poderiam estar distribuídos em outras partes integrantes dos PCN, mas criou-se esta nova com o objetivo de evidenciar sua importância, consequência de seu uso na sociedade. Este documento orientador indica que sua abordagem seja feita logo a partir das séries iniciais e de forma gradativa e contínua ao longo dos anos seguintes, aprofundando, adequadamente, nível após nível de ensino.

Mas o que acontece com o ensino e a aprendizagem da Análise Combinatória?

3. O ensino e a aprendizagem de Análise Combinatória: dificuldades e estratégias

Diversas pesquisas educacionais revelam dificuldades no ensino e na aprendizagem de Análise Combinatória (Pinheiro e Roza, 2006, Correia & Fernandes, 2007, Duro, 2012, Silva & Penteado, 2011) e outras que revelam propostas de ensino para este tema (Costa, 2013, Gonçalves, 2014, Vazquez & Malagutti, 2010, Almeida & Ferreira, 2009, Malagutti, 2011,

ISBN 978-84-945722-3-4

Brumano, 2013). Entre as dificuldades na aprendizagem deste tema, destacam-se a não compreensão da situação descrita pelo problema (Pinheiro & Roza, 2006) bem como a dificuldade na classificação do grupamento – ordenado ou não ordenado (Pinheiro & Roza, 2006, Silva & Penteado, 2011).

No curso da Análise Combinatória, privilegiam-se os estudos das permutações, arranjos e combinações e este fato se deve a abrangência dos problemas que com estes conceitos se solucionam. Além disso, é através destes conceitos que se resolve grande parte de problemas de probabilidades finitas, assunto também presente na Educação Básica. Mas o que se percebe é a mecanização com que tanto o ensino quanto a aprendizagem destes conceitos é concebida, limitando seu uso a situações padronizadas, não possibilitando ao aprendiz a análise pormenorizada e individual que cada problema revela. Desta forma, a Análise Combinatória resume-se a "um jogo de fórmulas complicadas" (Morgado et al., 1991, p.3) quando as técnicas necessárias à resolução restringem-se apenas às operações aritméticas elementares, nomeadamente, de soma, subtração, multiplicação e divisão (Carvalho, 2015). A não mecanização das estratégias de confecção dos grupamentos a partir dos anos iniciais pode facilitar a abordagem deste tema nos anos subsequentes (Guzmán, Bernabeu & Godino, 2003). Caso contrário, este tema simples e acessível aos alunos desde as séries iniciais acaba por assim não ser considerado por alunos e nem mesmo por professores.

Segundo Carvalho (2015), para resolver problemas de Análise Combinatória é preciso estar atentos a algumas orientações. São elas:

- ✓ **Postura**: O respondente deve sempre se colocar na posição da pessoa que deve exercer a ação descrita pelo problema e verificar que decisões devem ser tomadas.
- ✓ **Divisão**: Sempre que possível, as decisões a serem tomadas devem ser divididas em decisões mais simples, correspondentes às diversas etapas do processo de decisão.
- ✓ **Não adiar dificuldades**: Dentre as decisões a serem tomadas, estas devem ocorrer da mais restrita para a mais simples, em ordem decrescente de restrições que as mesmas detêm. Em problemas de Análise Combinatória, dificuldades adiadas comumente transformam-se em grandes dificuldades.

4. A concepção deste *workshop*

Depois de muita busca na *web* e em alguns livros que tratam deste tema, ficou fácil perceber a carência de recursos desenvolvidos até então para seu ensino. Muitos deles são repetitivos,

ISBN 978-84-945722-3-4

apresentando "problemas disparadores" do tipo "*De quantas formas uma pessoa pode se vestir dispondo de 'tantas' calças e 'outras tantas' blusas?*" ou "*Quantos anagramas tem a palavra...?*". Eu queria – e percebia a necessidade disso – desenvolver algo diferente e que, principalmente, pudesse ir mais além do que o provável. Alguma prática que pudesse ser flexível consoante às dificuldades esperadas dos alunos. A escola Geração Fórum Cultura CELART traz em sua proposta pedagógica, princípios de Vigotsky, Wallon e Piaget, adotando uma perspectiva de ensino voltada para competências, direcionado à capacidade de o sujeito – neste caso, o educando – mobilizar recursos de diferentes ordens – cognitiva, intelectual, emocional. Assim, os professores do Fórum Cultural são incentivados a desenvolverem instrumentos criativos e adequados aos mais diversos níveis de capacidades em que os alunos se encontrem. Este incentivo reflete em autonomia e desafio em desenvolver ferramentas eficazes em favor do ensino e da aprendizagem. Como professor dessa escola, e juntamente com ela, desenvolvemos a Oficina "*Cores, Arte... e MUITA MATEMÁTICA!!!*" – a qual apresentaremos aqui na forma de um *workshop*, direcionado a docentes.

4.1. Público-alvo

Docentes da Educação Básica e do Ensino Secundário.

4.2. Proposta

Apresentar aos docentes uma alternativa para o ensino de Análise Combinatória através de uma sequência de atividades em ordem gradual crescente de dificuldades e abrangência dos conceitos inerentes ao tema.

4.3. Objetivo geral

A partir da escolha de uma ou mais tintas de cores diferentes, determinar e apresentar as diversas possibilidades de se pintar uma dada bandeira, misturando ou não as tintas escolhidas, de acordo com as orientações de cada atividade.

4.4. Objetivos específicos

- Escolher um procedimento e calcular todas as possibilidades de proceder.
- Perceber situações onde a ordem da escolha altera, ou não, a quantidade de possibilidades.

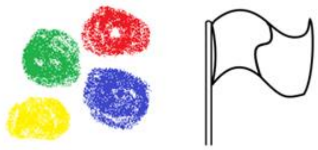
- Reconhecer concretamente grupamentos ordenados e não ordenados, enumerando-as quando pertinente.

4.5. Dinâmica e Notas

Os docentes serão separados em grupos de quatro participantes que estarão dispostos ao redor de uma mesma mesa. No centro da mesa estarão disponíveis pincéis, oito pequenos recipientes com tintas de cores diferentes e três cartelas de adesivos. Todos os participantes receberão a mesma sequência de atividades (parte desta está no Anexo 1). A partir do **Objetivo geral** e dos **Objetivos específicos** os docentes darão início à resolução das atividades. As primeiras atividades são bem simples, necessitando apenas de conhecimentos básicos do Princípio Fundamental da Contagem. Nestas atividades ainda não é permitida a mistura de tintas e as bandeiras apresentadas contêm apenas uma região a ser pintada. Mais adiante, o aumento na quantidade de listras das bandeiras apresentadas permite aferir os conhecimentos dos respondentes acerca de grupamentos ordenados. Na sequência, as atividades passam a contar com a possibilidade de misturar tintas de cores diferentes para a obtenção de outras cores não disponibilizadas, abrangendo então os conhecimentos de grupamentos não ordenados. Em algumas atividades é possível verificar se o respondente é capaz de diferenciar grupamentos ordenados de não ordenados numa mesma situação-problema. A mais-valia no uso de tintas é exatamente a possibilidade de misturá-las, levando o respondente a perceber que a ordem na qual as cores são misturadas não influencia a cor originada. Esta característica não é possível em problemas de quantidade de roupas ou anagramas, por exemplo.

O objetivo das cartelas de adesivos (Anexo 2) é não apresentar previamente o total de possibilidades de pintar a bandeira de acordo com as orientações de determinadas atividades, permitindo que o próprio respondente obtenham esse total através da manipulação dos materiais disponíveis. Ilustraremos este objetivo com a atividade a seguir:

Considere as quatro cores apresentadas. Escolha duas dessas cores e pinte cada uma das listras da bandeira com apenas uma delas.



ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 1: quatro cores e bandeira de três listras

*a) Quantas bandeiras distintas podemos obter utilizando **QUAISQUER** duas cores distintas escolhidas dentre as quatro cores disponíveis?* __________________.

- *Para auxiliar obtenção do resultado, utilize a cartela de adesivos, pinte e cole aqui em baixo **TODAS** as bandeiras que representam o resultado desta pergunta.*

Neste caso, a resposta pode ser obtida através do Princípio Fundamental da Contagem da seguinte forma:

$$\underset{\textit{quantidade de cores disponíveis para a listra à direita}}{\underline{\quad 4 \quad}} \times \underset{\textit{quantidade de cores disponíveis para a listra à direita}}{\underline{\quad 3 \quad}} = 12$$

Perceba que se apresentarmos previamente as 12 bandeiras, impressas e sem cores, imediatamente abaixo da pergunta, e pedirmos para ilustrar todas as possibilidades, o valor resultante já estará revelado pela própria quantidade de bandeiras, não configurando um desafio a ser vencido pelo respondente. Por isso é oferecida uma cartela de adesivos, contendo uma quantidade superior a doze unidades, onde as bandeiras são pintadas de acordo com as orientações apresentadas e, em seguida, destacadas e coladas a seguir à atividade.

O que torna esta sequência de atividades flexível e adequada a ser implementada a diversos anos de escolaridade, mesmo em turmas bastante heterogêneas, é a gradação na qual as atividades são dispostas. Isso permite utilizar apenas um subconjunto de atividades sequenciais, de acordo com o nível de conhecimento do público-alvo a quem estas serão aplicadas. Como o nível de dificuldade as atividades deste subconjunto sequencial também aumenta gradualmente, ao ser implementado percebe-se, com razoável facilidade, até que nível um determinado respondente alcançou e a partir de onde ele precisa de um auxílio.

Os docentes participantes deste *workshop* não serão avaliados formalmente. Porém, apresentaremos (Anexo 3) os descritores e suas respectivas pontuações divididos em Conceituais e Procedimentais/Atitudinais integralmente como foi utilizado na Oficina que originou este *workshop*. Este quadro (Anexo 3) estava presente na Oficina entregue aos alunos, objetivando a transparência dos critérios avaliativos.

5. Considerações Finais

Relativamente à Oficina implementada na escola Geração Fórum Cultural, verificou-se que os alunos que tiveram aula deste tema anteriormente resolveram as primeiras atividades com maior facilidade, enquanto que os alunos que ainda não conheciam o assunto precisavam de maior dedicação até mesmo nas atividades mais simples. Com o aumento de dificuldade das questões, de forma gradual, percebia-se que os alunos desenvolviam estratégias específicas para cada atividade, geralmente apoiadas em avanços das estratégias utilizadas em atividades anteriores. Destacamos a motivação e participação dos alunos durante a realização das atividades, bem como a colaboratividade entre eles, favorecendo o ambiente educativo e o desenvolvimento cognitivo dos conceitos. Salientamos que nenhuma fórmula foi utilizada durante a solução das atividades, as quais foram apresentadas apenas através de números ou expressões numéricas envolvendo as operações aritméticas básicas e fatorial. O desenvolvimento e implementação desta Oficina contaram com a colaboração direta de três professores da escola, Paula Monteiro, Bruno Ribeiro e Bruno César, aos quais ofereço aqui os meus sinceros agradecimentos.

Quanto ao workshop, esperamos apresentar aos docentes uma dinâmica inédita e atraente, além de eficiente ao ensino de Análise Combinatória. E que através destas atividades os professores possam oferecer a seus alunos uma aprendizagem sólida e satisfatória deste tema tão importante a Matemática

Referências bibliográficas

Almeida, A.L., & Ferreira, A.C. (2009). Aprendendo análise combinatória através da resolução de problemas : um estudo com classes de 9º ano do Ensino Fundamental e 2º ano do Ensino Médio. In: *IV Encontro de Educação Matemática de Ouro Preto*, UFOP. Minas Gerais.

Brasil (1998). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF.

Brumano, C.E.P. (2013). *A Modelagem Matemática como metodologia para o estudo de Análise Combinatória*. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora, Minas Gerais.

Carvalho, P. (2015). *Métodos de Contagem e Probabilidade*. Rio de Janeiro: IMPA.

Correia, P.F., & Fernandes, J.A. (2007). Estratégias Intuitivas de Alunos do 9.º Ano de Escolaridade na Resolução de Problemas de Combinatória. In: BARCA, A.;

ISBN 978-84-945722-3-4

PERALBO, M.; PORTO, A.; Duarte da Silva, B. e Almeida, L. (Org.). Congreso Internacional Galego-Portugués de Psicopedagoxía. A.Coruña/Universidade da Coruña: *Revista Galego-Portuguesa de Psicoloxía e Educación*, p. 1256-1267.

Costa, E.R.S. (2013). *Uma proposta de ensino de análise combinatória para alunos do Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Lavras, Lavras. Disponível em: http://repositorio.ufla.br/jspui/handle/1/4095. Acedido em 08 fev. 2017.

Duro, M. L. (2012). *Análise combinatória e construção de possibilidades: o raciocínio formal no ensino médio*. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, UFRGS, Porto Alegre.

Gonçalves, R.R.S. (2014). *Uma abordagem alternativa para o ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio: a utilização do princípio multiplicativo e da resolução de problemas como ferramenta didático-pedagógica*. Dissertação (Mestrado). Programa de Mestrado Profissional em Matemática, IMPA, Rio de Janeiro.

Guzmán, R.R., Bernabeu, C.B., & Godino, J.D. (2003). Estrategias generales y estrategias aritméticas en la resolución de problemas combinatorios. *Educación Matemática*, 15(2), 5-25.

Malagutti, P.L. (2011). Atividades de Contagem a partir da Criptografia, v.10. *Programa de Iniciação Científica (PIC)* – OBMEP.

Morgado, A.C.O., Carvalho, J.B.P., Carvalho, P.C.P., & Fernandez, P. (1991). *Análise Combinatória e Probabilidade*. SBM, Rio de Janeiro.

Vazquez, C.M.R., & Malagutti, P.L.A. (2010). Atividades Experimentais de Análise Combinatória no Ensino Médio em uma Escola Estadual. II Encontro da Rede de

ISBN 978-84-945722-3-4

Professores, Pesquisadores e Licenciandos de Física e Matemática. *Produtos Educacionais no ensino de Física e de Matemática*. UFSCar. São Paulo.

Pinheiro, C.A.M. (2008). *O Ensino de Análise Combinatória a partir de situações-problema*. Dissertação de Mestrado, Centro de Ciências Sociais e Educação - Universidade do Estado do Pará, Brasil.

Pinheiro, C.A.M., & Sá, P.F. (2007). O Ensino de Análise Combinatória: a prática pedagógica predominante segundo os docentes. In: ENEM, IX, 2007, *Diálogos entre a Pesquisa e a Prática Educativa*. Belo Horizonte.

Pinheiro, C.A.M., Roza, I. S., & Sá, P.R. (2006). Ensino de Análise Combinatória: o que ficou? Anais do Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. *Pesquisa em Educação Matemática: um olhar ampliado sobre a sala de aula*. Centro de Educação, UFP. Pernambuco.

Silva, D.N., Fernandes, J.A., & Soares, A.J. (2004). Intuições de alunos do 12.º ano em combinatória: Um estudo exploratório. In J. A. Fernandes, M. V. Sousa & S. A. Ribeiro (Orgs.), Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística – *Actas do I*

ISBN 978-84-945722-3-4

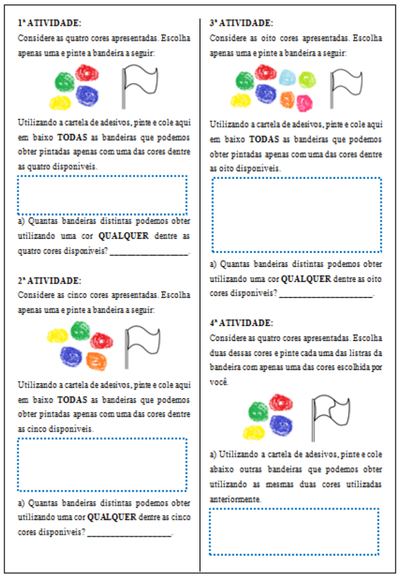
Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola (pp. 61-84). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Silva, H.D., & Penteado, M.G. (2011). Combinação ou Arranjo? O uso de narrativas no estudo de análise combinatória num curso de licenciatura em Matemática. In *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*. UFP. Pernambuco.

ANEXO 1

Parte da sequência de atividades do *workshop*:

ISBN 978-84-945722-3-4



1ª ATIVIDADE:

Considere as quatro cores apresentadas. Escolha apenas uma e pinte a bandeira a seguir:

Utilizando a cartela de adesivos, pinte e cole aqui em baixo **TODAS** as bandeiras que podemos obter pintadas apenas com uma das cores dentre as quatro disponíveis.

a) Quantas bandeiras distintas podemos obter utilizando uma cor **QUALQUER** dentre as quatro cores disponíveis? ________________.

2ª ATIVIDADE:

Considere as cinco cores apresentadas. Escolha apenas uma e pinte a bandeira a seguir:

Utilizando a cartela de adesivos, pinte e cole aqui em baixo **TODAS** as bandeiras que podemos obter pintadas apenas com uma das cores dentre as cinco disponíveis.

a) Quantas bandeiras distintas podemos obter utilizando uma cor **QUALQUER** dentre as cinco cores disponíveis? ________________.

3ª ATIVIDADE:

Considere as oito cores apresentadas. Escolha apenas uma e pinte a bandeira a seguir:

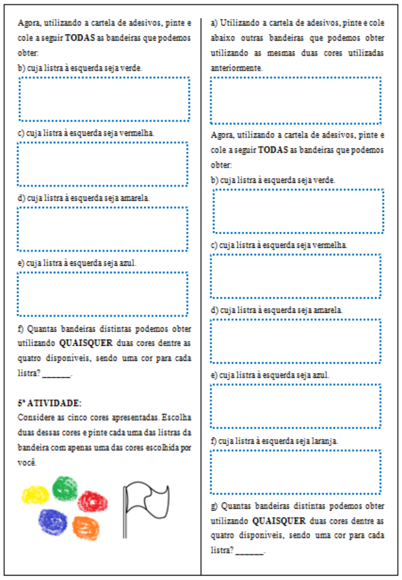
Utilizando a cartela de adesivos, pinte e cole aqui em baixo **TODAS** as bandeiras que podemos obter pintadas apenas com uma das cores dentre as oito disponíveis.

a) Quantas bandeiras distintas podemos obter utilizando uma cor **QUALQUER** dentre as oito cores disponíveis? ________________.

4ª ATIVIDADE:

Considere as quatro cores apresentadas. Escolha duas dessas cores e pinte cada uma das listras da bandeira com apenas uma das cores escolhida por você.

a) Utilizando a cartela de adesivos, pinte e cole abaixo outras bandeiras que podemos obter utilizando as mesmas duas cores utilizadas anteriormente.



Agora, utilizando a cartela de adesivos, pinte e cole a seguir **TODAS** as bandeiras que podemos obter:

b) cuja listra à esquerda seja verde.

c) cuja listra à esquerda seja vermelha.

d) cuja listra à esquerda seja amarela.

e) cuja listra à esquerda seja azul.

f) Quantas bandeiras distintas podemos obter utilizando **QUAISQUER** duas cores dentre as quatro disponíveis, sendo uma cor para cada listra? ______.

5ª ATIVIDADE:

Considere as cinco cores apresentadas. Escolha duas dessas cores e pinte cada uma das listras da bandeira com apenas uma das cores escolhida por você.

a) Utilizando a cartela de adesivos, pinte e cole abaixo outras bandeiras que podemos obter utilizando as mesmas duas cores utilizadas anteriormente.

Agora, utilizando a cartela de adesivos, pinte e cole a seguir **TODAS** as bandeiras que podemos obter:

b) cuja listra à esquerda seja verde.

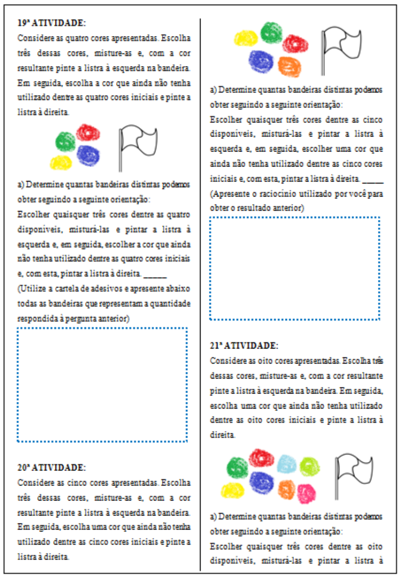
c) cuja listra à esquerda seja vermelha.

d) cuja listra à esquerda seja amarela.

e) cuja listra à esquerda seja azul.

f) cuja listra à esquerda seja laranja.

g) Quantas bandeiras distintas podemos obter utilizando **QUAISQUER** duas cores dentre as quatro disponíveis, sendo uma cor para cada listra? ______.



19ª ATIVIDADE:

Considere as quatro cores apresentadas. Escolha três dessas cores, misture-as e, com a cor resultante pinte a listra à esquerda na bandeira. Em seguida, escolha a cor que ainda não tenha utilizado dentre as quatro cores iniciais e pinte a listra à direita.

a) Determine quantas bandeiras distintas podemos obter seguindo a seguinte orientação:

Escolher quaisquer três cores dentre as quatro disponíveis, misturá-las e pintar a listra à esquerda e, em seguida, escolher a cor que ainda não tenha utilizado dentre as quatro cores iniciais e, com esta, pintar a listra à direita. _____

(Utilize a cartela de adesivos e apresente abaixo todas as bandeiras que representam a quantidade respondida à pergunta anterior)

20ª ATIVIDADE:

Considere as cinco cores apresentadas. Escolha três dessas cores, misture-as e, com a cor resultante pinte a listra à esquerda na bandeira. Em seguida, escolha uma cor que ainda não tenha utilizado dentre as cinco cores iniciais e pinte a listra à direita.

a) Determine quantas bandeiras distintas podemos obter seguindo a seguinte orientação:

Escolher quaisquer três cores dentre as cinco disponíveis, misturá-las e pintar a listra à esquerda e, em seguida, escolher uma cor que ainda não tenha utilizado dentre as cinco cores iniciais e, com esta, pintar a listra à direita. _____

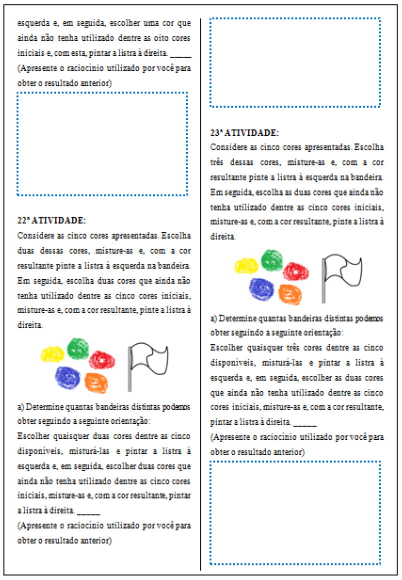
(Apresente o raciocínio utilizado por você para obter o resultado anterior)

21ª ATIVIDADE:

Considere as oito cores apresentadas. Escolha três dessas cores, misture-as e, com a cor resultante pinte a listra à esquerda na bandeira. Em seguida, escolha uma cor que ainda não tenha utilizado dentre as oito cores iniciais e pinte a listra à direita.

a) Determine quantas bandeiras distintas podemos obter seguindo a seguinte orientação:

Escolher quaisquer três cores dentre as oito disponíveis, misturá-las e pintar a listra à



esquerda e, em seguida, escolher uma cor que ainda não tenha utilizado dentre as oito cores iniciais e, com esta, pintar a listra à direita. _____

(Apresente o raciocínio utilizado por você para obter o resultado anterior)

22ª ATIVIDADE:

Considere as cinco cores apresentadas. Escolha duas dessas cores, misture-as e, com a cor resultante pinte a listra à esquerda na bandeira. Em seguida, escolha duas cores que ainda não tenha utilizado dentre as cinco cores iniciais, misture-as e, com a cor resultante, pinte a listra à direita.

a) Determine quantas bandeiras distintas podemos obter seguindo a seguinte orientação:

Escolher quaisquer duas cores dentre as cinco disponíveis, misturá-las e pintar a listra à esquerda e, em seguida, escolher duas cores que ainda não tenha utilizado dentre as cinco cores iniciais, misture-as e, com a cor resultante, pintar a listra à direita. _____

(Apresente o raciocínio utilizado por você para obter o resultado anterior)

23ª ATIVIDADE:

Considere as cinco cores apresentadas. Escolha três dessas cores, misture-as e, com a cor resultante pinte a listra à esquerda na bandeira. Em seguida, escolha as duas cores que ainda não tenha utilizado dentre as cinco cores iniciais, misture-as e, com a cor resultante, pinte a listra à direita.

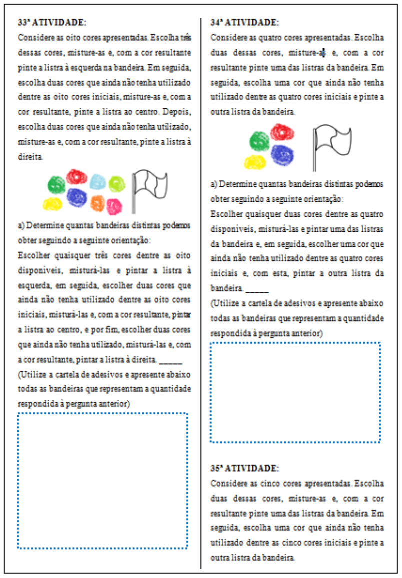
a) Determine quantas bandeiras distintas podemos obter seguindo a seguinte orientação:

Escolher quaisquer três cores dentre as cinco disponíveis, misturá-las e pintar a listra à esquerda e, em seguida, escolher as duas cores que ainda não tenha utilizado dentre as cinco cores iniciais, misture-as e, com a cor resultante, pintar a listra à direita. _____

(Apresente o raciocínio utilizado por você para obter o resultado anterior)

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



33ª ATIVIDADE:

Considere as oito cores apresentadas. Escolha três dessas cores, misture-as e, com a cor resultante pinte a listra à esquerda na bandeira. Em seguida, escolha duas cores que ainda não tenha utilizado dentre as oito cores iniciais, misture-as e, com a cor resultante, pinte a listra ao centro. Depois, escolha duas cores que ainda não tenha utilizado, misture-as e, com a cor resultante, pinte a listra à direita.

a) Determine quantas bandeiras distintas podemos obter seguindo a seguinte orientação:

Escolher quaisquer três cores dentre as oito disponiveis, misturá-las e pintar a listra à esquerda, em seguida, escolher duas cores que ainda não tenha utilizado dentre as oito cores iniciais, misturá-las e, com a cor resultante, pintar a listra ao centro, e por fim, escolher duas cores que ainda não tenha utilizado, misturá-las e, com a cor resultante, pintar a listra à direita. ______

(Utilize a cartela de adesivos e apresente abaixo todas as bandeiras que representam a quantidade respondida à pergunta anterior)

34ª ATIVIDADE:

Considere as quatro cores apresentadas. Escolha duas dessas cores, misture-as e, com a cor resultante pinte uma das listras da bandeira. Em seguida, escolha uma cor que ainda não tenha utilizado dentre as quatro cores iniciais e pinte a outra listra da bandeira.

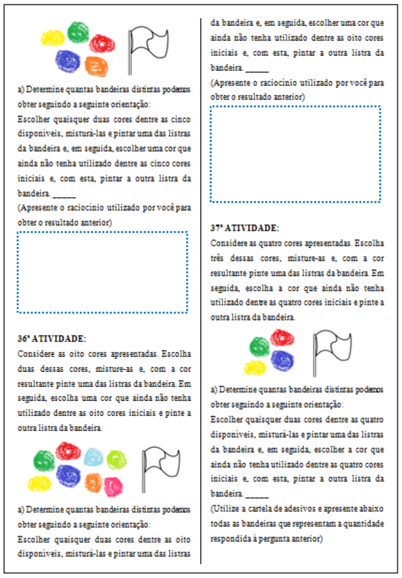
a) Determine quantas bandeiras distintas podemos obter seguindo a seguinte orientação:

Escolher quaisquer duas cores dentre as quatro disponiveis, misturá-las e pintar uma das listras da bandeira e, em seguida, escolher uma cor que ainda não tenha utilizado dentre as quatro cores iniciais e, com esta, pintar a outra listra da bandeira. ______

(Utilize a cartela de adesivos e apresente abaixo todas as bandeiras que representam a quantidade respondida à pergunta anterior)

35ª ATIVIDADE:

Considere as cinco cores apresentadas. Escolha duas dessas cores, misture-as e, com a cor resultante pinte uma das listras da bandeira. Em seguida, escolha uma cor que ainda não tenha utilizado dentre as cinco cores iniciais e pinte a outra listra da bandeira.



a) Determine quantas bandeiras distintas podemos obter seguindo a seguinte orientação:

Escolher quaisquer duas cores dentre as cinco disponiveis, misturá-las e pintar uma das listras da bandeira e, em seguida, escolher uma cor que ainda não tenha utilizado dentre as cinco cores iniciais e, com esta, pintar a outra listra da bandeira. ______

(Apresente o raciocinio utilizado por você para obter o resultado anterior)

36ª ATIVIDADE:

Considere as oito cores apresentadas. Escolha duas dessas cores, misture-as e, com a cor resultante pinte uma das listras da bandeira. Em seguida, escolha uma cor que ainda não tenha utilizado dentre as oito cores iniciais e pinte a outra listra da bandeira.

a) Determine quantas bandeiras distintas podemos obter seguindo a seguinte orientação:

Escolher quaisquer duas cores dentre as oito disponiveis, misturá-las e pintar uma das listras da bandeira e, em seguida, escolher uma cor que ainda não tenha utilizado dentre as oito cores iniciais e, com esta, pintar a outra listra da bandeira. ______

(Apresente o raciocinio utilizado por você para obter o resultado anterior)

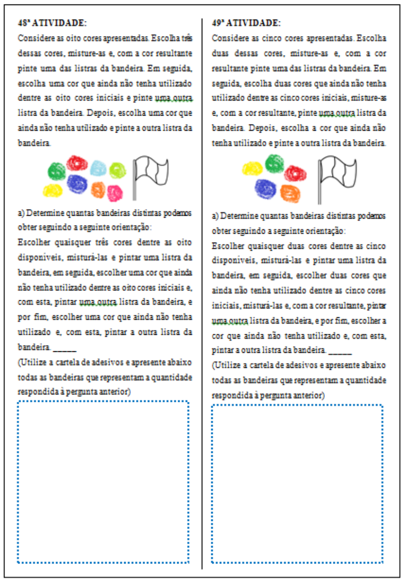
37ª ATIVIDADE:

Considere as quatro cores apresentadas. Escolha três dessas cores, misture-as e, com a cor resultante pinte uma das listras da bandeira. Em seguida, escolha a cor que ainda não tenha utilizado dentre as quatro cores iniciais e pinte a outra listra da bandeira.

a) Determine quantas bandeiras distintas podemos obter seguindo a seguinte orientação:

Escolher quaisquer duas cores dentre as quatro disponiveis, misturá-las e pintar uma das listras da bandeira e, em seguida, escolher a cor que ainda não tenha utilizado dentre as quatro cores iniciais e, com esta, pintar a outra listra da bandeira. ______

(Utilize a cartela de adesivos e apresente abaixo todas as bandeiras que representam a quantidade respondida à pergunta anterior)



48ª ATIVIDADE:

Considere as oito cores apresentadas. Escolha três dessas cores, misture-as e, com a cor resultante pinte uma das listras da bandeira. Em seguida, escolha uma cor que ainda não tenha utilizado dentre as oito cores iniciais e pinte uma outra listra da bandeira. Depois, escolha uma cor que ainda não tenha utilizado e pinte a outra listra da bandeira.

a) Determine quantas bandeiras distintas podemos obter seguindo a seguinte orientação:

Escolher quaisquer três cores dentre as oito disponiveis, misturá-las e pintar uma listra da bandeira, em seguida, escolher uma cor que ainda não tenha utilizado dentre as oito cores iniciais e, com esta, pintar uma outra listra da bandeira, e por fim, escolher uma cor que ainda não tenha utilizado e, com esta, pintar a outra listra da bandeira. ______

(Utilize a cartela de adesivos e apresente abaixo todas as bandeiras que representam a quantidade respondida à pergunta anterior)

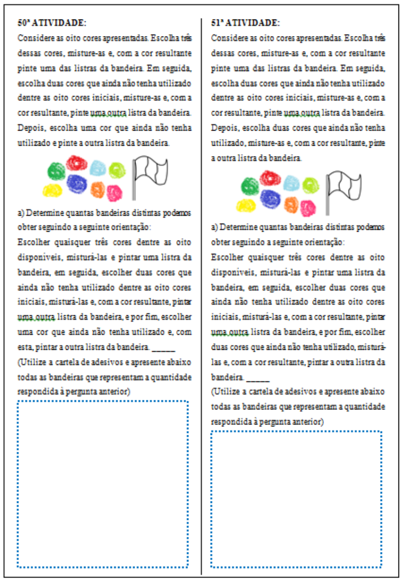
49ª ATIVIDADE:

Considere as cinco cores apresentadas. Escolha duas dessas cores, misture-as e, com a cor resultante pinte uma das listras da bandeira. Em seguida, escolha duas cores que ainda não tenha utilizado dentre as cinco cores iniciais, misture-as e, com a cor resultante, pinte uma outra listra da bandeira. Depois, escolha a cor que ainda não tenha utilizado e pinte a outra listra da bandeira.

a) Determine quantas bandeiras distintas podemos obter seguindo a seguinte orientação:

Escolher quaisquer duas cores dentre as cinco disponiveis, misturá-las e pintar uma listra da bandeira, em seguida, escolher duas cores que ainda não tenha utilizado dentre as cinco cores iniciais, misturá-las e, com a cor resultante, pintar uma outra listra da bandeira, e por fim, escolher a cor que ainda não tenha utilizado e, com esta, pintar a outra listra da bandeira. ______

(Utilize a cartela de adesivos e apresente abaixo todas as bandeiras que representam a quantidade respondida à pergunta anterior)



50ª ATIVIDADE:

Considere as oito cores apresentadas. Escolha três dessas cores, misture-as e, com a cor resultante pinte uma das listras da bandeira. Em seguida, escolha duas cores que ainda não tenha utilizado dentre as oito cores iniciais, misture-as e, com a cor resultante, pinte uma outra listra da bandeira. Depois, escolha uma cor que ainda não tenha utilizado e pinte a outra listra da bandeira.

a) Determine quantas bandeiras distintas podemos obter seguindo a seguinte orientação:

Escolher quaisquer três cores dentre as oito disponiveis, misturá-las e pintar uma listra da bandeira, em seguida, escolher duas cores que ainda não tenha utilizado dentre as oito cores iniciais, misturá-las e, com a cor resultante, pintar uma outra listra da bandeira, e por fim, escolher uma cor que ainda não tenha utilizado e, com esta, pintar a outra listra da bandeira. ______

(Utilize a cartela de adesivos e apresente abaixo todas as bandeiras que representam a quantidade respondida à pergunta anterior)

51ª ATIVIDADE:

Considere as oito cores apresentadas. Escolha três dessas cores, misture-as e, com a cor resultante pinte uma das listras da bandeira. Em seguida, escolha duas cores que ainda não tenha utilizado dentre as oito cores iniciais, misture-as e, com a cor resultante, pinte uma outra listra da bandeira. Depois, escolha duas cores que ainda não tenha utilizado, misture-as e, com a cor resultante, pinte a outra listra da bandeira.

a) Determine quantas bandeiras distintas podemos obter seguindo a seguinte orientação:

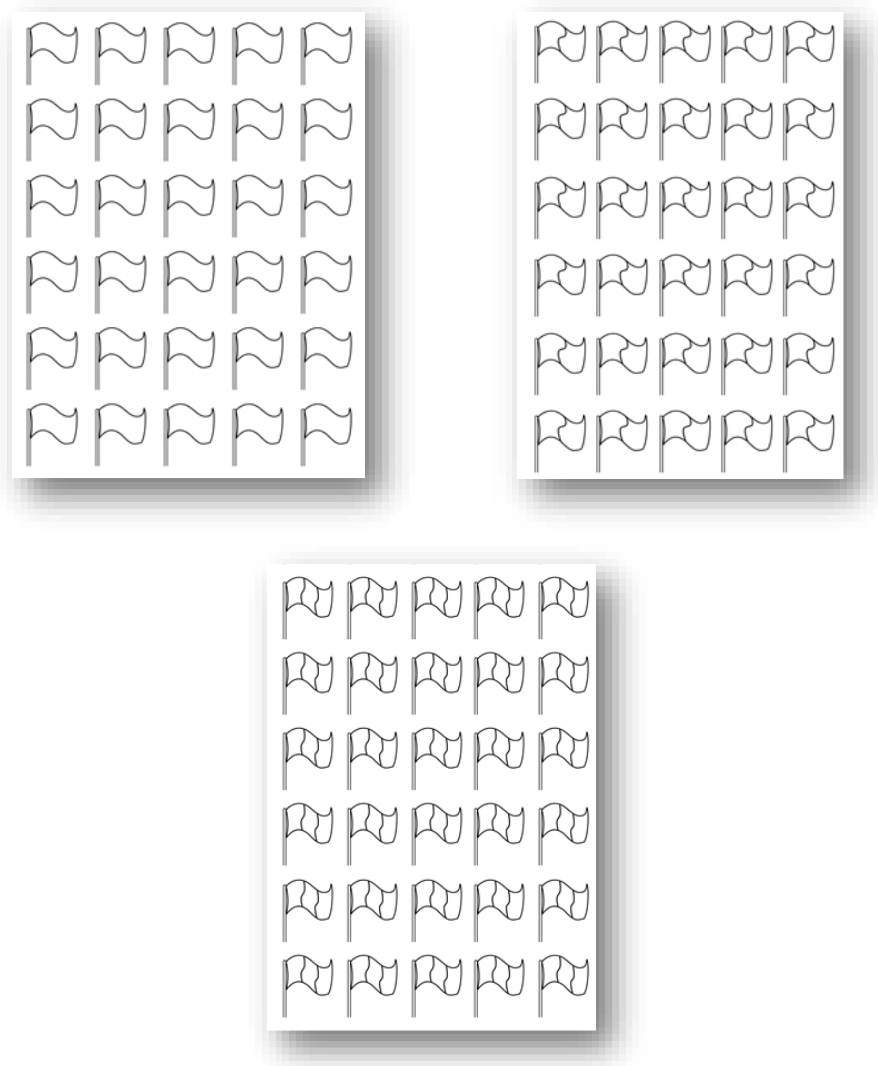
Escolher quaisquer três cores dentre as oito disponiveis, misturá-las e pintar uma listra da bandeira, em seguida, escolher duas cores que ainda não tenha utilizado dentre as oito cores iniciais, misturá-las e, com a cor resultante, pintar uma outra listra da bandeira, e por fim, escolher duas cores que ainda não tenha utilizado, misturá-las e, com a cor resultante, pintar a outra listra da bandeira. ______

(Utilize a cartela de adesivos e apresente abaixo todas as bandeiras que representam a quantidade respondida à pergunta anterior)

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

ANEXO 2

Cartela de adesivos:



ISBN 978-84-945722-3-4

ANEXOS 3

Descritores de avaliação da Oficina:

I - Conteúdos Conceituais	Pontuação	Nota
1 - Competência do grupo/aluno para agregar conhecimentos em termos de:		
Interpretação de proposta e consulta as informações apresentadas.	10	
Estabelecimento de metas de investigação a partir dos dados coletados.	10	
Elaboração de hipóteses para possíveis soluções aos desafios propostos.	10	
Realização das atividades.	20	
II - Conteúdos Procedimentais/ Atitudinais		
Nível de concentração/produtividade.	10	
Pró-atividade/ liderança.	10	
Empenho, determinação e capricho.	10	
Observância ao tempo de execução e às etapas de trabalho.	10	
Valorização do trabalho como espaço de exercício da criatividade	10	
TOTAL	100	

ISBN 978-84-945722-3-4

T-265

Título: Dame tu gráfica y te diré qué es … El tránsito de las representaciones gráficas a las representaciones algebraicas.

Nombre: Eduardo Mancera Martínez

e mail: mancera.eduardo@gmail.com

Institución: Comité Interamericano de Educación Matemática

Modalidad: Conferencia Regular (CR)

Nivel educativo: No específico

Núcleo temático: Investigación en Educación Matemática.

Palabras claves: Funciones, Representaciones, Graficación, Modelación

Resumen:

En la escuela en los diferentes niveles medios que anteceden a los estudios universitarios, generalmente seis años, es frecuente que se enfoque el manejo de funciones o lugares geométricos a partir de expresiones algebraicas, preponderantemente, las gráficas y el uso de tablas de valores numéricos, por lo general, no son incluidos o se incorporan mínimamente, esto caracteriza a los enfoques tradicionales. Las gráficas, solamente se incluyen cuando se abordan "casos sencillos", lo mismo que las tablas. Por otro lado, generalmente de la expresión algebraica se pide construir la gráfica o hacer una tabla de valores numéricos. Se ha detectado algunas actividades que se presenta una gráfica y se pide encontrar la expresión algebraica asociada, pero solamente para "casos sencillos", es poca la atención que se presta al paso de una tabulación a una expresión algebraica o de una gráfica a representación simbólica. No obstante, es un aspecto principal en las aplicaciones y la modelación. Esto abre la posibilidad de una línea de investigación que promueve el desarrollo del pensamiento gráfico, en principio apoyado en teorías interesadas en la percepción. En esta presentación se analizará el papel de la percepción y su relación con la simbolización las propiedades de las gráficas.

Introducción

La enseñanza de las funciones se ha concentrado en un manejo algebraico. En efecto, al revisar las notas de clase de los estudiantes es frecuente observar solamente expresiones algebraicas y pocas, muy pocas, gráficas, además de tablas de valores casi ausentes. Posiblemente la dificultad de dibujar una gráfica "aceptable", tanto en un pizarrón como en una hoja de papel, puede ser parte del problema. Algo similar se debe enfrentar al elaborar tablas numéricas para determinar puntos que corresponden a gráfica.

El trayecto en esta área de investigación se inició hace varios años con publicaciones que trataban el tema como curiosidad (Shilov, 1976) o como parte de la formación de algunos profesionales (Sánchez - Serrano,1962), incluso como parte de cursos de nivel licenciatura o maestría que se referían a "graficación sin cálculo", pero faltó integración e identificación de elementos fundamentales.

En un intento de acercamiento a algunas ideas sobre el tema, por parte de quien suscribe, se ha trabajado en utilizar la recta o las funciones lineales como el "genoma" de las funciones algebraicas, en algunas publicaciones tituladas "La danza de las rectas" (Mancera, 2005) o al generar notas de cursos (Mancera, 2004) o han sido motivo de Cátedras Magistrales institucionales (https://miuniversidadculiacan.com/impartiran-catedra-en-matematicas-en-colegio-de-sinaloa/) y que se impartieron en 2009 y 2010. Adicionalmente, se ha trabajado frecuentemente con estudiantes con base en las ideas de un libro (Mancera E. Y Basurto E., 2016).

Cabe mencionar que el desarrollo de actividades se realizó con el uso de tecnología. Primero se utilizaron salones de cómputo, utilizando diverso software gratuito pero que no permitía fácilmente el paso entre representaciones, pero se detectaron problemáticas de distracciones de los estudiantes y las limitaciones del wifi institucional. Después se utilizaron diversos modelos de calculadoras gráficas con CAS que permitían el paso más o menos eficiente entre distintas representaciones (numéricas, algebraicas y gráficas), lo cual permitió concentrar a los estudiantes en las actividades diseñadas, pero se empleaba mucho tiempo en transitar por el aula. Las últimas experiencias se realizaron con una calculadora de última generación con aplicaciones precargadas que ayudaron mucho al proceso de enseñanza y pues se contaba

ISBN 978-84-945722-3-4

con intercomunicación inalámbrica, sin wifi, entre calculadoras y la computadora del maestro, pero con costo menor a todas las posibilidades.

Se agradece a la División de Calculadoras de Hewlett Packard haber permitido utilizar las imágenes obtenidas en pantalla de la calculadora Hp Prime para ilustrar las argumentaciones que se desarrollan tal y como se manejaron en los salones de clase.

Marco de Referencia

Es importante indicar que la concepción principal que orienta los trabajos en torno al presente escrito, se vincula a ideas constructivistas. Se parte de que las nociones y procedimientos matemáticos son construidos paulatinamente por el individuo y no son "aprendidos". La construcción del pensamiento matemático no parte de los símbolos ni del tratamiento del contenido utilizando técnicas estereotipadas, se inicia con exploraciones guiadas por el maestro con la intención de encontrar regularidades y relaciones entre distintas representaciones de los objetos matemáticos, es hasta el final del proceso que se establecen reglas de manejo de los símbolos.

Cuando se hace referencia al término "aprender" se evoca la idea de "tomar" de manera inmediata y permanente el contenido escolar o cualquier otro conocimiento, En un sentido platónico, las ideas o las nociones están por ahí y solamente basta descubrirlas y atraparlas, como si se cazaran mariposas. Pero, la construcción de significados en un proceso que no necesariamente concluye, sino que es parte de una evolución de ideas, significados y construcciones mentales que implica interacciones constantes con experiencias o situaciones problemáticas. Algunos se refieren a aprender al asumirse como constructivistas, pero esto solamente confunde, es un error frecuente.

Se utilizaron diversos lineamientos de la teoría de la Gestalt para el diseño de actividades, dado que se trabajó con imágenes y la percepción jugó un papel importante. Por ejemplo, la "Ley del Cierre" establece que la mente añade los elementos faltantes para completar una figura, lo cual es frecuente en las gráficas, pues se tiende a completar con la imaginación las formas percibidas, buscando la mejor organización posible; la "Ley de la Comunidad", que establece que elementos que se mueven en la misma dirección son percibidos como un único elemento, etc. Falta espacio para discutir los elementos de la Gestalt que fueron considerados.

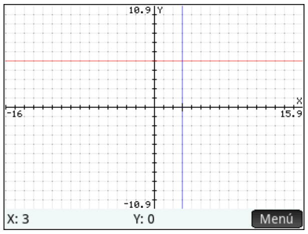
Otro tema por mencionar es la importancia de identificar significados en el desarrollo del pensamiento gráfico, como se ha hecho con las fracciones o el uso de literales en la investigación en educación matemática de las últimas décadas. Prevalece un significado relativo al manejo de relaciones formales entre literales, las relaciones geométricas quedan confinadas o desdibujadas, lo mismo sucede con las relaciones numéricas.

Se trabajó un significado cercano a "lugares geométricos" (conjunto de puntos que cumplen determinadas condiciones o propiedades geométricas), se hace referencia a "lugares cartesianos" (conjunto de puntos que cumplen determinadas condiciones o propiedades en el plano cartesiano), así las gráficas en el plano se interpretarán a partir de las relaciones que se tienen los puntos que las conforman.

Desarrollo

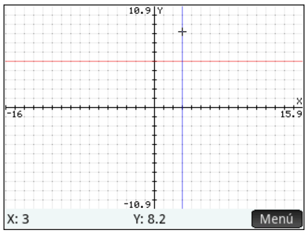
Al trabajar rectas en el plano empezamos por el final y sin fórmulas, resaltando relaciones entre sus puntos. Las rectas paralelas a los ejes generalmente se abordan como "casos degenerados" de las "rectas normales". En efecto, este tipo de rectas se asocian a "pendientes infinitas" ($x = a$) o "pendientes cero" ($y = b$), donde a y b son constantes. Con lo cual se atiende más a los "aspectos formales" o "convenciones de la disciplina".

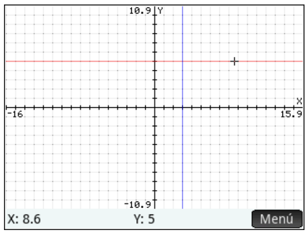
Usando la idea de "lugares cartesianos", se enfoca el trabajo con rectas cuya expresión algebraica es del tipo $x = 3$ o $y = 5$, atendiendo a la relación que cumplen los puntos que las conforman.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

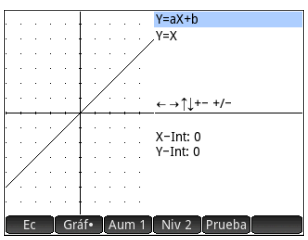
Se aprovecha una convención implícita al usar las letras x o y, "abscisa" u "ordenada", respectivamente, de puntos del plano cartesiano. Entonces, $x = 3$ se refiere a los puntos con abscisa igual a 3, también $y = 5$, se refiere a los puntos de ordenada igual a 5.

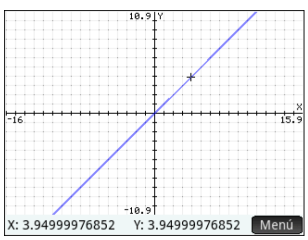




Esta interpretación, que puede parecer obvia, abre la puerta para trabajar con todo tipo de rectas sin recurrir a fórmulas o trigonometría, con deducciones de fórmulas que conllevan procesos de inducción inmediata (generalizaciones que se establecen a partir de un solo caso).

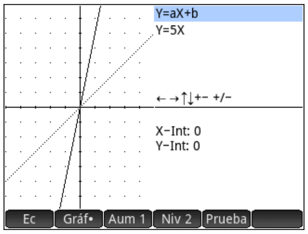
En realidad, en el plano solamente hay una recta: $y = x$. Todas las demás son "trasformaciones" o "movimientos" de ésta. Es la recta cuya gráfica se conforma con puntos en el plano que tienen abscisa igual a la ordenada.

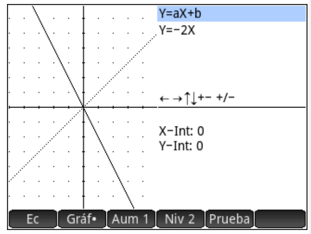


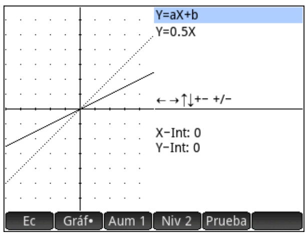


Si se incrementa o decrementa el valor absoluto del coeficiente de x , la recta varía su pendiente, originando relaciones como "los puntos del plano cuya ordenada es el quíntuple de la abscisa", "los puntos del plano cuya ordenada es el triple de la abscisa", "los puntos del plano cuya ordenada es la mitad de la abscisa", "los puntos del plano cuya ordenada es el negativo de la abscisa" etc.

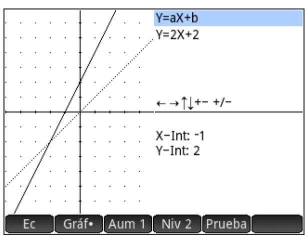
ISBN 978-84-945722-3-4

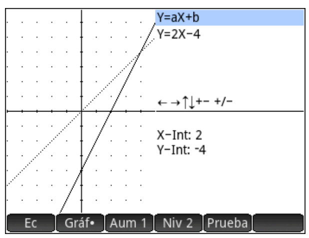






Las expresiones algebraicas al relacionadas con subir "subir" o "bajar" pueden analizarse moviendo rectas.





Cabe entonces plantear actividades como:

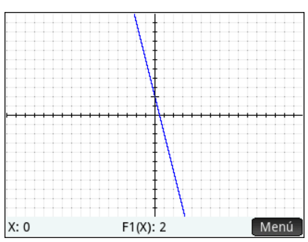
a) Dada la tabla siguiente encontrar la ecuación de la recta y la gráfica correspondiente.
b) Dada la gráfica correspondiente determinar algunos puntos de la recta y la expresión algebraica correspondiente:


Vista numérica Función

X	F1
-2	-12
-1	-9
0	-6
1	-3
2	0
3	3
4	6
5	9
6	12
7	15

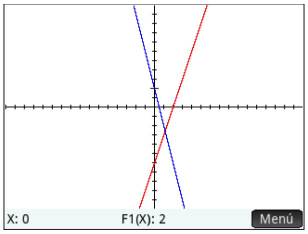
-2

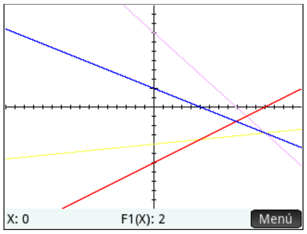
Zoom Más Ir a Defn



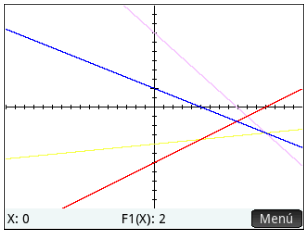
VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

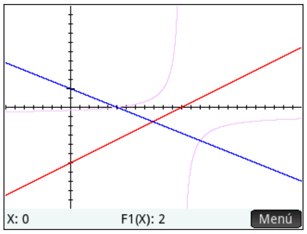
También se puede considerar obtener la gráfica de la suma o diferencia de dos gráficas de funciones lineales, sin conocer las expresiones algebraicas correspondientes:



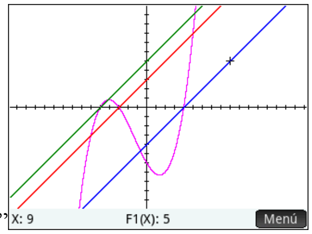


Las parábolas pueden ser consideradas como productos de funciones lineales y las hipérbolas como cocientes de funciones lineales:

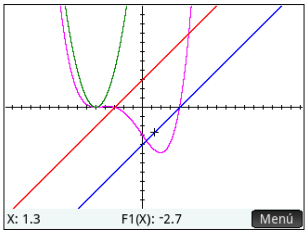




Lo cual permite analizar el comportamiento de polinomios al considerarlos como "productos

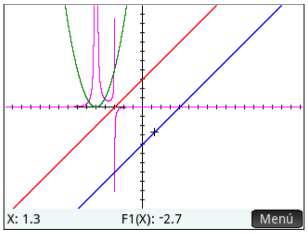


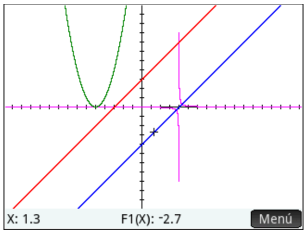
de funciones lineales" o de "funciones lineales y parábolas"



ISBN 978-84-945722-3-4

De la misma manera se pueden abordar el comportamiento de funciones racionales al analizarlas como como cocientes de polinomios:





Trabajar las funciones algebraicas con este tipo de procedimientos permite paulatinamente introducir y discutir, en el momento oportuno, nociones de dominio, imagen, máximos mínimos globales y locales, así como asíntotas y varios aspectos del cálculo de límites, sin usar procesos de aproximación complicados.

Comentarios finales

Generalmente en un curso sobre el manejo de funciones se trabajan varios aspectos al mismo tiempo, conceptuales que se pueden desarrollar con apoyo en algunos dispositivos tecnológicos y operativos, relacionados con el manejo de técnicas, que no necesariamente se desprenden de la comprensión de los aspectos gráficos, tienen más relación con lo que se podría denominar una "ortografía matemática", pues se refiere al manejo de reglas para combinar símbolos y cada requiere un espacio especial para hacerlo no se puede lograr todo al mismo tiempo, pero lo simbólico requiere tener en mente imágenes claras y significativas para dar sentido a las manipulaciones algebraicas, frecuentemente esto se hace al revés y los resultados ya los conocemos. Varias de las experiencias con este enfoque han implicado dividir los cursos de cálculo en dos partes, una dedicado solamente a lo conceptual con apoyo de tecnología y la otra dedicada solamente a las técnicas algebraicas.

Quedan muchos aspectos por cubrir para dar una idea completa de lo que se logra con esta perspectiva que implica atender a los aspectos relativos a la enseñanza y la construcción del pensamiento gráfico para apoyar el pensamiento analítico.

ISBN 978-84-945722-3-4

Los símbolos, aunque se pueden trabajar sin referentes, como se hace en la matemática moderna, debe tener sentido para quienes no serán matemáticos, pero si serán usuarios de algunos aspectos de la matemática.

Será necesario abandonar las pretensiones disciplinarias y pensar en formas de trabajo que permitan un mejor acercamientos a los contenidos matemáticos, pues la matemática se construye con ideas principalmente y no con procedimientos operativos rutinarios.

Bibliografía

Ázcárate, C. y Deulofeu, J. (1996) Funciones y gráficas. Síntesis, Madrid, España

Lacasta, E. y Pascual, J. (1995). Las funciones en los gráficos cartesianos. Síntesis, Madrid, España.

Mancera E (2004); *Notas del curso Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía; Universidad Iberoamericana*, México, UIA.

Mancera, E. (2005). *La danza de las rectas*. Revista innovaciones Educativas 7ª. Edición. USA.

Mancera, E. y Basurto E. (2016). *El baile de las funciones lineales*, CIAEM, México.

Rees, P. (1970). *Geometría Analítica*. Reverté, España.

Sánchez - Serrano A. (1962). Representación de curvas problemas y aplicaciones; Escuela Superior de Ingenieros Aeronáuticos, España.

Shilov G. E. (1976). *Cómo construir gráficas*. Temas Matemáticos, Limusa, México.

Steven, C (2012). *Teorías del aprendizaje*. Boston, MA.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-282

EL CONCEPTO DE FUNCIÓN COMO COVARIACIÓN EN LA ESCUELA SECUNDARIA

Ligia Amparo Torres R. - Ronald Andrés Grueso
ligia.torres@correounivalle.edu.co - ronaldandresgrueso@gmail.com
Instituto de Educación y Pedagogía - Universidad del Valle - Colombia

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.
Nivel: Secundaria
Modalidad: Taller (T)
Palabras Clave: Función, Covariación, Razonamiento covariacional, Secuencia Didáctica.

Resumen

Este taller tiene como propósito compartir una propuesta de aula que integra actividades para que estudiantes de grado noveno de la Educación Básica Colombiana, identifiquen y comprendan algunos rasgos y elementos del concepto de función a través del desarrollo de situaciones que involucran la covariación. El contexto consiste en construir una plazoleta rectangular de tal manera que sus vértices estén sobre los lados de un terreno cuadrado. Se propone variar la posición de uno de los vértices de la plazoleta, con el propósito de estudiar los cambios que se generan en las otras componentes del cuadrado y rectángulo, partir de dicho movimiento. Con estas tareas se estudia el concepto de función, a través del uso y articulación de diversos registros de representación.

El taller consta de tres partes: primero se presenta un panorama sobre la investigación acerca del razonamiento covariacional y del desarrollo del pensamiento variacional. Después se desarrollan actividades con los participantes sobre las tareas propuestas en la secuencia didáctica, relacionadas con los aspectos matemáticos que se movilizan, aspectos didácticos y curriculares involucrados en la propuesta. Finalmente, se hace una plenaria donde, con los participantes, se sacarán algunas conclusiones en torno a las potencialidades y limitaciones de la propuesta.

Presentación del problema

En la literatura se encuentra un acervo considerable de investigaciones sobre el concepto de función, específicamente, estudios asociados a su enseñanza y aprendizaje. En este sentido, se puede citar estudios como los de Kaput, (1992) Dubinsky & Harel, (1992) Sierpinska, (1992) Carlson, (1998) Hitt, (1998) Retamal, (1998) e Higueras, (1994). En dichas

ISBN 978-84-945722-3-4

investigaciones, además de caracterizar las distintas dificultades que tienen los estudiantes al abordar dicho concepto, se propone la enseñanza de la función desde una perspectiva variacional que privilegia la relación de dependencia entre magnitudes.

A pesar de estas propuestas y otros estudios como los de López & Sosa, (2008) sobre la enseñanza del concepto de función, en la actualidad, se sigue abordando la función desde una perspectiva de correspondencia o de asignación. Además, muestran que su enseñanza obedece a ideas netamente algorítmicas o estáticas, sin privilegiar que la comprensión del concepto de función va más allá de las letras o de los símbolos que lo representan. Lo que significa, que su estudio se continua haciendo de forma estática, donde predomina la importancia por generar habilidades en la sintaxis y en los procesos algorítmicos, más que en la comprensión de su significado y elementos constitutivos.

En consecuencia, no se puede desconocer que los estudiantes, además de cometer errores en el manejo y tratamiento de funciones, no tienen claro dicho concepto; por consiguiente, enseñar y aprender este concepto es una tarea compleja, dispendiosa y de mucho cuidado, tal como lo expresan López & Sosa (2008)

> La enseñanza del concepto de función actualmente gira alrededor del registro algebraico, la internación de este registro con otros, como el grafico, suele ser limitado a una simple ejemplificación. Por ello, se sugieren tratamientos alternativos del concepto, como el numérico, geométrico, etc., con especial énfasis en el aspecto discursivo para la resolución de problemas y la modelación de fenómenos (p. 317)

De otra parte, los Lineamientos Curriculares para el Área de Matemáticas (1998) en Colombia proponen que: “Los contextos donde aparece la noción de función establecen relaciones funcionales entre los mundos que cambian, de esta manera emerge la función como herramienta de conocimiento necesaria para “enlazar” patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio” (p.51). Sin embargo, esta directriz no se concretiza en las propuestas de enseñanza para trabajar el concepto de función en el aula. Además, direccionan, para los procesos de enseñanza, la movilización de diferentes registros de representación y las transformaciones que son consecuencia del cambio de un registro a otro. “El cambio de registro constituye una variable fundamental en didáctica: facilita

ISBN 978-84-945722-3-4

considerablemente el aprendizaje pues ofrece procedimientos de interpretación”. (Duval, 2004, p.62). Pese a lo anterior, es frecuente que en la escuela, la función se aborde desde dos o tres registros de representación (algebraico, tabular y gráfico) de forma aislada, es decir, sin considerar las implicaciones que tienen las variaciones de un registro en los de otro registro. Así pues, ni siquiera el estudio de una gráfica cartesiana puede asegurar el acercamiento dinámico a la función, si dicha gráfica sólo se considera como el conjunto de unas parejas ordenadas en un plano cartesiano. Si no se estudia el comportamiento de los cambios, la gráfica puede esconder la *covariación*. Cuando hay una relación de dependencia entre dos magnitudes, la *covariación*, debe entenderse como el estudio de los cambios de una magnitud atendiendo a los cambios de la otra. (Carlson, 2002).

Por otra parte, el quehacer de la enseñanza para un docente, está permeado por distintas mediaciones que acompañan o complementan su intervención directa con los estudiantes. Un ejemplo particular de un recurso usado con frecuencia es el libro de texto, que en muchas ocasiones se convierte en una fuente para preparar sus clases y actividades a proponer, por consiguiente, muchas de las definiciones y ejercicios son tomados de forma explícita de dicho texto escolar. Es por esta razón que los libros de texto pueden ser un indicador de lo que pasa en una clase promedio, y de ahí la importancia de estudiar y analizar la forma en que estos textos presentan un concepto tan relevante para el desarrollo del pensamiento variacional, como lo es la función. En la mayoría de los libros utilizados en Colombia, privilegian el concepto de función desde una perspectiva estática, donde la correspondencia y asignación son aspectos centrales bajo un enfoque conjuntista. Como consecuencia, se presenta una definición formal que propone una abstracción de los fenómenos de cambio, a través de la generalización de cuantificaciones y notaciones matemáticas. Aunque se suelen presentar aplicaciones, estas aparecen desligadas de la necesidad de introducir el concepto, es decir, después de trabajar lo algorítmico se establecen ejemplos que sirven de guía para resolver problemas de aplicaciones, lo cual implica la contemplación, desde la instrucción, de la discriminación de unas estrategias estandarizadas. De esta manera, la covariación difícilmente se logra trabajar desde la propuesta de enseñanza de los textos.

ISBN 978-84-945722-3-4

Teniendo en cuenta la problemática descrita, en este estudio, que se realizó en el marco de un trabajo de grado para optar por el título de Magíster en Educación Matemática, con énfasis en Educación Matemática, se trata de dar respuesta a la siguiente pregunta: *¿Qué elementos o rasgos del concepto de función se identifican, en un grupo de estudiantes de grado 9°, a través del desarrollo de situaciones problema de covariación?*

Algunos elementos teóricos de referencia

El marco teórico y metodológico usado en el estudio fue el de los Modelos Teóricos Locales (MTL) Filloy (1999), entendiendo que los MTL se fundamentan en la observación experimental y la replicabilidad de diseños experimentales. Asimismo, en la determinación de un MTL, se hace énfasis en la caracterización de cuatro componentes interrelacionados entre sí[4], y la consideración de unas etapas durante la observación experimental. Dentro de cada componente se consideran elementos o referentes teóricos para ayudar a documentar la problemática y poder proponer una secuencia didáctica que consolide o esté acorde a dichos referentes.

El modelo de competencia formal, en este caso, está direccionado por un análisis fenomenológico de la función. En este orden de ideas, en el modelo de competencia formal, el análisis fenomenológico del concepto de función se hace a partir de la fenomenología histórico-epistemológica y la fenomenología pura. De esta manera, se menciona de forma breve el transitar del concepto de función a través de la historia, para contemplar de forma paralela su visión epistemológica y por consiguiente, las distintas concepciones que ha tomado, lo cual dio indicios de sus usos, formas de difusión y posibles obstáculos epistemológicos. Asimismo, se hace énfasis en la concepción actual y usos del concepto de función. Para ello, se detalla cómo se concibe el concepto de función desde el saber sabio, antes de ser transpuesto a un contexto escolar. En el Modelo de enseñanza se estudia y analiza el marco legal curricular que propone el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN), en particular, los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (1998) y los Estándares

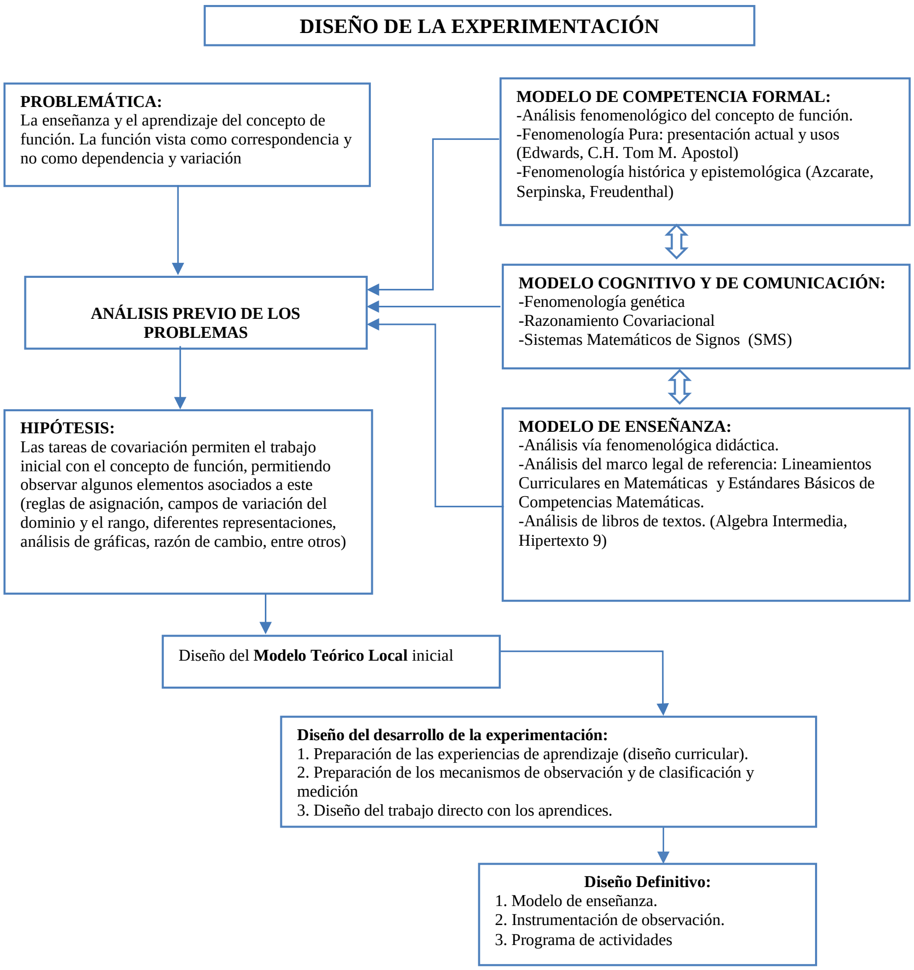
[4] Componente de enseñanza del Modelo Teórico Local o, de forma abreviada, Modelo de enseñanza. Componente de cognición del Modelo Teórico Local o Modelo para los procesos cognitivos. Componente de competencia formal del Modelo Teórico Local o Modelo de competencia formal y Componente de comunicación del Modelo Teórico Local o Modelo de comunicación.

ISBN 978-84-945722-3-4

Básicos de Competencias de Matemáticas (2006). Este acercamiento al marco legal curricular se hace con el fin de identificar su papel en el estudio y enseñanza del concepto de función. Igualmente, se hace revisión del concepto de función en algunos libros de texto y revisión de la propuesta curricular de la Institución Educativa Policarpa Salavarrieta con el propósito de caracterizar el modelo de enseñanza predominante en el sistema educativo y que, en últimas, ha permeado la enseñanza que han recibido los estudiantes que son objeto de observación en este estudio. En el modelo cognitivo y de Comunicación, fue vital reflexionar y analizar sobre la forma en que los estudiantes aprenden y logran adquirir o acumular conocimientos matemáticos nuevos. El componente cognitivo y de comunicación, se apoya fundamentalmente en el Razonamiento Covariacional Carlson, et al (2003). Este razonamiento es definido como: "Actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra" (p. 130).

A continuación, se muestra el esquema del diseño de experimentación para el caso de la función como covariación.

ISBN 978-84-945722-3-4



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

El estudio y desarrollo del razonamiento covariacional va ligado a fenómenos o situaciones dinámicas que no necesariamente deben ser modeladas en un software como Cabri o GeoGebra. Estas situaciones dinámicas permiten que el estudiante construya imágenes de dos variables dependientes de una función que cambia simultáneamente con el cambio imaginado de una variable independiente, por ejemplo el área de la sombra de un edificio con respecto a la hora del día. Como no se puede percibir directamente lo que piensan los estudiantes, los comportamientos se convierten en el mayor insumo para saber qué acción mental se encuentra asociada. Por ejemplo, para Carlson, los estudiantes deben ser capaces de analizar patrones de cambio en varios contextos y esto debe ir ligado a cómo los estudiantes interpretan y construyen enunciados. Además de estas cinco acciones mentales, Carlson propone cinco niveles de Razonamiento covariacional donde se puede evidenciar el grado de pensamiento covariacional desarrollado por el estudiante. Para la covariación, propone que cada nivel se va alcanzando de acuerdo a su desarrollo en la sustentación de las anteriores acciones mentales, por ejemplo, si un estudiante está en el nivel 3, es porque manifiesta los tres comportamientos que sustentan cada uno de estos tres niveles, es decir que de manera acumulada muestra las características de las acciones mentales uno, dos y tres (AM1, AM2 y AM3). Para la clasificación de los estudiantes, Carlson también manifiesta que hay que tener cuidado con los pensamientos pseudo-analíticos ya que estos derivan comportamientos pseudo-analíticos. Un comportamiento pseudo-analítico se entiende como un comportamiento que no está ligado a los características o propiedades de un concepto, más bien está ligado a la memoria del estudiante porque seguramente lo vio, pero no lo comprende, es decir, está ligado a procesos más mecánicos o algorítmicos, por ello, al mostrar estos comportamientos, se pueden clasificar a los estudiantes de manera errónea.

A continuación se explicitan los niveles de razonamiento covariacional que guiaron el estudio.

Niveles de razonamiento covariacional

NIVELES	CARACTERÍSTICAS
Nivel 1 Coordinación	Las imágenes de la Covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 Dirección	Las imágenes de Covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. (AM1 y AM2).

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Nivel 3 Coordinación Cuantitativa	Las imágenes de la Covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. (AM1, AM2 y AM3).
Nivel 4 Razón Promedio	Las imágenes de Covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada (AM1 hasta AM4).
Nivel 5 Razón Instantánea	Las imágenes de Covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de los puntos de inflexión (AM1 hasta AM5).

Tomado de Carlson et al. (2003)

Sobre la secuencia didáctica

En la siguiente tabla se detalla la estructura de la secuencia didáctica. En esta estructura, para cada tarea se detallan la cantidad de preguntas y los propósitos. Para el diseño de la secuencia de enseñanza se tomó como principal referente la situación donde se estudia el comportamiento del área de un rectángulo inscrita en un cuadrado trabajado en Villa (2012). Además, una vez el estudiante responda la pregunta, se propone el estudio del comportamiento de los cambios de una magnitud en comparación con los cambios de otra, es decir, se pretende un acercamiento al estudio de la razón de cambio.

Estructura general de la Secuencia Didáctica

Situación	Tarea	Propósito	# de preguntas
Situación 1: Introducción de la covariación mediante las dimensiones de la plazoleta	Tarea 1	Comprender la situación	4
	Tarea 2	Reconocer dependencia entre magnitudes con el uso de GeoGebra (desde lo cualitativo).	5
	Tarea 3	Cuantificar los cambios	6
Situación 2:	Tarea 1	Encontrar el área máxima de la plazoleta con la ayuda de	4

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

la covariación en la caracterización de elementos que subyacen al concepto de función		GeoGebra.Observar el comportamiento de las magnitudes.	
	Tarea 2	Encontrar el área máxima de la plazoleta con la ayuda de cálculos y tablas. Indagar cómo cambian las magnitudes.	4
	Tarea 3	Encontrar el área máxima de la plazoleta con la ayuda de representaciones gráficas en el plano cartesiano. Acercarse a algunas características de las funciones.	6
Situación 3: Observando otras variaciones.	Tarea 1	Razón de cambio: Analizar y comparar el comportamiento de los cambios en una relación lineal.	4
	Tarea 2	Razón de cambio: Analizar y comparar el comportamiento de los cambios en una relación cuadrática.	6
	Tarea 3	Verificar si para resolver la tarea el estudiante acude al uso de los elementos básicos de una función y de la covariación. Constatar el nivel de covariación en que puede clasificarse la mayoría de los estudiantes	4

Metodología y propósitos del taller

El taller que se propone aquí, tiene como propósito fundamental compartir la experiencia investigativa del trabajo de grado, descrito antes, con algunos participantes del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática a través de tres actividades:

1. Presentación de una problemática particular de la escolaridad en la comprensión del concepto de función y algunos fundamentos teóricos básicos para su tratamiento y que sustentan la Secuencia Didáctica que se puso en juego con estudiantes de noveno grado de la escolaridad colombiana para potenciar un acercamiento significativo al pensamiento variacional y algebraico, desde el trabajo con la covariación.
2. Explorar con los participantes del taller problemáticas similares en sus instituciones en torno al concepto de función y poner en juego algunas de las actividades de la Secuencia Didáctica para valorar sus potencialidades y explorar las dificultades de su implementación en el aula, desde su contenido matemático, curricular y didáctico.
3. Compartir en una plenaria las observaciones, opiniones y análisis hechos por los participantes sobre la propuesta de aula organizada en la Secuencia Didáctica.

ISBN 978-84-945722-3-4

Referencias Bibliográficas

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA*, *8*(2), pp. 121-156.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.

Filloy, E. (1999). Modelos Teóricos Locales: Un marco teórico y metodológico para la observación experimental en matemática educativa. En *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Iberoamericana.

Grueso, R. A., & González, G. (2016). *El concepto de función como covariación en la escuela* (Trabajo de Grado de Maestría). Universidad del valle, Cali

Hitt, F. & Morasse, C. (2009). Pensamiento numérico-algebraico avanzado: construyendo el concepto de covariación como preludio al concepto de función. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *7*(17), pp. 243-260.

López, J., & Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares.* Serie Lineamientos curriculares. República de Colombia. Bogotá, D.C. Colombia. MEN.

Villa, J. A. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (31), 9-25

ANEXO 1: Plan de las acciones a desarrollar en el taller, contenido y objetivos.

Objetivo General

Analizar los aspectos conceptuales y procedimentales expuestos en una secuencia didáctica sobre la construcción del concepto de función como covariación con investigadores y maestros participantes en el evento.

ISBN 978-84-945722-3-4

Plan de Acción

Este taller como espacio de interacción entre los proponentes y los participantes mediados por fichas de trabajo y reflexión se realizará en una jornada con una duración de dos horas, la cual se desarrollará en tres fases:

Fase uno, se presentan los autores, la justificación del taller, la presentación del problema y el marco conceptual de manera breve, con una duración de 30 minutos.

Fase dos, se exponen la situaciones de la secuencia didáctica para luego analizar las actividades y tareas allí propuestas. Por último, los participantes dan a conocer sus comentarios sobre las situaciones a partir de preguntas dirigidas (Ver ficha de reflexión 1 y 2). Esta etapa tiene una duración de 60 minutos.

Finalmente, en la Fase tres, se realiza una plenaria con los participantes del taller, quienes aportarán reflexiones y cometarios sobre la secuencia didáctica y posteriormente, se socializarán algunas conclusiones de los asistentes, acompañados de algunas conclusiones del trabajo, lo cual se realizará en 30 minutos.

ANEXO 2: FICHAS DE REFLEXIÓN CON LOS ASISTENTES

Ficha de Reflexión 1

1. Enuncie los aspectos relacionados con el concepto de función que se movilizan en las tareas propuestas en la situación 1: Introduciendo la covariación mediante las medidas de la plazoleta.

2. Indique procesos o desempeños del pensamiento variacional que se pueden movilizar en las tareas propuestas en la situación 1.

3. Escriba algunas observaciones sobre la pertinencia de estas tareas en el marco del razonamiento covariacional propuesto por Carlosn.

Ficha de Reflexión

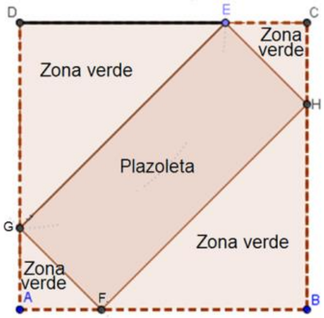
1. Enuncie los aspectos relacionados con el concepto de función (incluyendo algunos sistemas de representación) que se movilizan en las tareas propuestas en la situación 2.
2. Indique de qué manera las distintas tareas pueden movilizar o no ciertas acciones mentales o niveles de razonamiento covariacional (potencialidades o restricciones).

ISBN 978-84-945722-3-4

3. Desde su experiencia profesional o su formación, determine algunos elementos conceptuales y metodológicos que considera fundamentales al momento de introducir el concepto de función en la educación básica.
4. A partir de las tarea 3 de la situación 3, ¿es posible pensar en que los estudiantes pueden llegar a clasificarse en un nivel 4 o 5 de razonamiento covariacional? Explique en qué medida.
5. De qué manera considerar el cambio de los cambios puede posibilitar el trabajo con rasgos y otros aspectos del concepto de función, tales como: el dominio, el rango y el uso de los distintos sistemas de representación.

ANEXO 3: Situación 1 de la Secuencia Didáctica

CONSTRUCCIÓN DE UNA PLAZOLETA



SITUACIÓN 1: Introduciendo la covariación mediante las medidas de la plazoleta

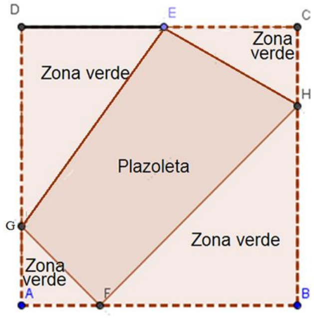
Se desea construir una plazoleta en forma rectangular dentro de un terreno cuadrado de 80m de largo. Las condiciones es que cada vértice de la plazoleta debe quedar sobre uno de los lados del terreno, una vez construida la plazoleta, las zonas restantes se reservaran para sembrar árboles, es decir serán zonas verdes (ver grafica).

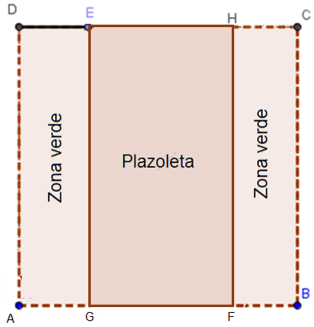
¿Qué tan largo debe ser el segmento $\overline{DE}$, para que el área de la plazoleta sea máxima?

Tarea 1: Comprendiendo la situación

1. Dibuja por lo menos tres posibilidades de plazoletas dentro del terreno cuadrado, teniendo en cuenta las condiciones de la situación. Explica tus propuestas

2. Un estudiante propone dos plazoletas, de las formas que se muestran a continuación. ¿Son posibles tales formas para la plazoleta? Explica tu respuesta.

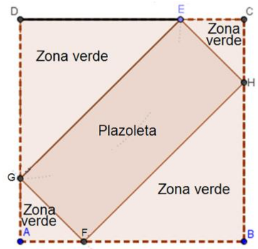




VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

3. Luisa afirma que dentro de los valores numéricos que puede tomar el segmento $\overline{DE}$ están: 0m, 47m, 80m, y 92m. Analiza la afirmación de Luisa para cada uno de estos valores y escribe si es posible.

4. Diseña una plazoleta de tal manera que el largo sea aproximadamente el doble ancho, luego determina la magnitud que debe tener segmento $\overline{\mathrm{DE}}$.



Tarea 2: Reconozco dependencia entre magnitudes

1. Abra el archivo *Tarea 2* ubicado en el escritorio del computador. Explore posibles construcciones distintas de plazoletas moviendo o cambiando la ubicación del punto E. indica lo puntos que se mueven y los que permanecen fijos explica la razón de este comportamiento

2. Escribe lo que sucede cuando se mueve el punto E sobre el segmento $\overline{\mathrm{DC}}$.

3. Teniendo en cuenta la exploración realizada en GeoGebra, Identifica y enuncia las magnitudes implicadas en la situación

4. sea:	-	$\overline{FH}$ es el largo de la plazoleta
	-	$\overline{FG}$ es el ancho de la plazoleta.
	-	x = longitud del segmento $\overline{DE}$

a. A medida que cambia x, describe el cambio del largo de la plazoleta

b. A medida que cambia x, describe el cambio del ancho de la plazoleta

c. A medida que cambia x, describe el cambio del segmento $\overline{EC}$

d. A medida que cambia x, describe el cambio del segmento $\overline{DC}$

e. ¿De qué dependen el ancho y el largo de la plazoleta?

5. Describe lo que sucede cuando comparas los segmentos $\overline{DE}$y $\overline{DG}$ con los segmentos $\overline{BH}$ y $\overline{BF}$

Tarea 3: Cuantificando los cambios

1. Determine el valor, en metros, del largo y el ancho de la plazoleta cuando la longitud del segmento $\overline{DE}$ es:

a. 10m	b. 25m	c. 55m

2. Complete la siguiente tabla

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Longitud $\overline{DE}$ (m)	Largo de la plazoleta $(\overline{FH})$ (m)	Ancho de la plazoleta $(\overline{FG})(m)$
10m		
25m		
30m		
40m		
55m		
60m		
75m		
80m		
x		

Tabla 1

a. De acuerdo con el comportamiento de los datos de la tabla(sin hacer los cálculos) determina el largo y el ancho de la plazoleta si el segmento $\overline{DE}$ midiera:

36m	58m	94m	Explica cómo lo hiciste

b. Si la longitud del segmento $\overline{DE}$ se puede representar con la letra x, escribe una expresión para el largo y el ancho.

3. En el plano cartesiano ubica los puntos del:
   a. Largo de la plazoleta vs Longitud del segmento$\overline{DE}$
   b. Ancho de la plazoleta vs longitud del segmento $\overline{DE}$
4. A partir de las gráficas determine y explique:
   a. Cuál es el valor máximo y mínimo que puede tomar la longitud del segmento $\overline{DE}$
   b. Cuál es el valor máximo y mínimo que puede tomar el largo de la plazoleta.
   c. Cuál es el valor máximo y mínimo que puede tomar el ancho de la plazoleta.
5. Ubique ambas gráficas en un mismo plano cartesiano, diferenciando el conjunto de puntos de cada una con colores distintos. A partir de esta representación, cuando la longitud del segmento $\overline{DE}$ es 35m ¿qué longitud le corresponde al largo y al ancho de la plazoleta?
6. Teniendo en cuenta la anterior gráfica realizada,
   a. escriba la coordenada del punto donde se interceptan las dos gráficas

   ¿Qué interpretación podrías darle a dicho punto? Elabora un escrito de tal manera que tus compañeros puedan entender tu punto de vista.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

CONSTRUCCIÓN DE SÓLIDOS EN GEOGEBRA

Angie Cristina Solís Palma
ansolis@itcr.ac.cr
Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Modalidad: Taller
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: GeoGebra, curva, superficie, sólido.

Resumen
El taller se llevará a cabo utilizando una guía de trabajo. En esta se explica a cada participante el procedimiento para graficar en el software GeoGebra un sólido.
Primero se le presentará al participante un sólido limitado por una lista de superficies, este debe realizar un dibujo del sólido a mano, para tener claro cada una de las caras, aristas y vértices que lo conforman. Luego debe proyectar cada una de las caras, parametrizar la superficie que define la cara e ingresar esta parametrización en el software para que este realice la gráfica de la superficie. Al final el participante tendrá la representación del sólido en su trabajo digital.

Introducción

Este trabajo consiste en un taller sobre la utilización del software GeoGebra para la graficación de sólidos, está dirigido a docentes universitarios. Es necesario que los participantes cuenten con conocimientos básicos del programa y del cálculo en varias variables (Secciones cónicas, superficies y sólidos). Cada participante seguirá una guía de trabajo para poder realizar el gráfico correspondiente y podrá realizar consultas a la instructora durante el avance de su trabajo.

Objetivo

Brindar a los docentes del campo de la matemática una guía de trabajo que explica cómo utilizar el programa GeoGebra para graficar curvas y superficies para crear sólidos.

Marco teórico

Según Gamboa, (2007), el uso de herramientas computacionales en la enseñanza de la matemática cada día es más frecuente, además la tecnología le permite al estudiante obtener conclusiones y realizar observación que en otros ambientes, por ejemplo “lápiz y papel”, sería difíciles de obtener.

En mi opinión, el uso de estas herramientas es de mucha ayuda en aquellos temas que involucran graficación de curvas, superficies o sólidos, ya sea en el plano o en el espacio, ya que muchas de esas figuras son difíciles de imaginar y dibujar, pero con la ayuda de un graficador se puede facilitar.

Además GeoGebra es un programa gratuito, fácil de instalar y de usar, que nos puede ayudar a comprender de una mejor manera el comportamiento de las figuras en tres dimensiones. Y se puede utilizar tanto en computadora como en teléfonos y tabletas.

Metodología y resultados: Guías de trabajo

Se realizará la construcción del gráfico del sólido del ejemplo 1 en el programa GeoGebra.

Ejemplo 1: Considere el sólido limitado por las superficies: $S_1: (x-3)^2 + y^2 = 4$, $S_2: 2x + z = 10$, $S_3: x = 3$, $S_4: z = 3$, $S_5: y = 0$ y $S_6: z = 0$.

Realice la gráfica del sólido en GeoGebra.

Solución

Siga la lista de instrucciones que se enumeran a continuación, si tiene alguna duda en algún paso llame a su instructora.

1.

2. Realice un dibujo a mano del sólido requerido. Es importante determinar las coordenadas de sus vértices. Ver Figura 1.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

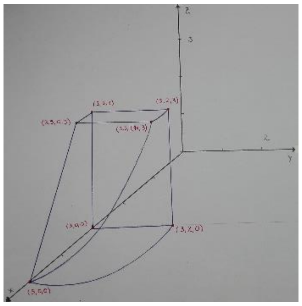
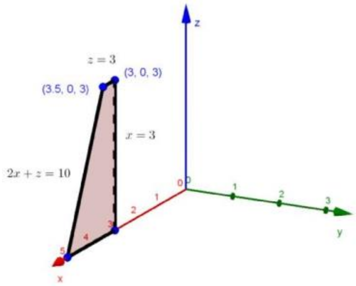


Figura 1. Sólido dibujado a mano

Cara 1, limitada por la superficie: $S_1: (x-3)^2 + y^2 = 4$

3. Para graficar la cara 1, se debe proyectar esta cara sobre alguno de los planos coordenados, donde la proyección sea una región. Ver Figuras 2 y 3.

Nota: Si la superficie que forma la cara es un cilindro solo hay dos posibles proyecciones las cuales se generan al escoger como plano coordenado de proyección, el plano que contiene una de sus variables y la variable ausente.



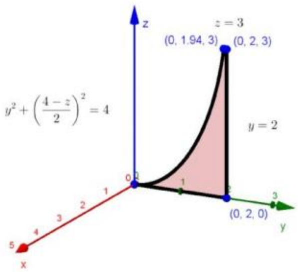


Figura 2: Proyección de la cara 1 sobre XZ.

Figura 3: Proyección de la cara 1 sobre YZ.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

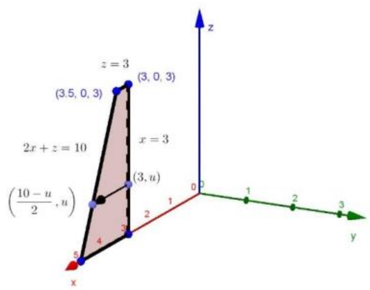
4. Para este caso se trabajará con la proyección sobre el plano XZ (Figura 2). Ahora dibuje dentro de la proyección un vector en cualquiera de las dos direcciones, hacia el eje X (Figura 4) o hacia el eje Z (Figura 5).

Nota:

- Si dibuja el vector hacia el eje X, se tomará $z = u$ y se utilizará u como parámetro el cual puede tomar cualquier valor en el intervalo donde existe z.
- Si dibuja el vector hacia el eje Z, se tomará $x = u$ y se utilizará u como parámetro el cual puede tomar cualquier valor en el intervalo donde existe x.

Si el vector tiene entradas o salidas diferentes en la proyección, debe hacer vectores diferentes para cada entrada o salida con parámetros diferentes.

- Cada vector debe tener un punto de salida y uno de llegada, estos puntos solo pueden depender del parámetro u, utilice las ecuaciones de las curvas que limitan la proyección para despejar las variables necesarias.



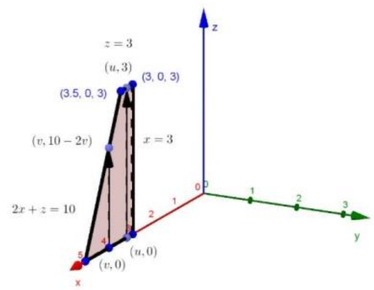


Figura 4: Vector en dirección del eje X. Parámetro: $0 \leq u \leq 3$

Figura 5: Vector en dirección del eje Z. Parámetros: $3 \leq u \leq 3{,}5$ y $3{,}5 \leq v \leq 5$

5.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

6. Trabaje con la imagen que tiene el vector en la dirección del eje X (Figura 4), debido a que con un solo vector y u variando en $[0,3]$ se abarca toda la proyección.

7. Parametrice el segmento de recta que inicia en el punto $(3,u)$ y finaliza en el punto $\left(\frac{10-u}{2},u\right)$. Tome en cuenta que como se está proyectando en el plano XZ, el valor para y es 0, por lo tanto, en tres dimensiones esos dos puntos serían $(3{,}0,u)$ y $\left(\frac{10-u}{2},0,u\right)$.
Si necesita ayuda para parametrizar utilice la información que se muestran en el Anexo 1.

$$c(t):\begin{cases} x=3+t\left(\dfrac{4-u}{2}\right) \\ y=0 \\ z=u \end{cases} \quad ; \qquad t\in[0,1]$$

8. Este segmento depende de un parámetro u, si se le da movimiento a u en la región proyectada, la parametrización del segmento pasaría a ser la parametrización de la región proyectada.

$$s(u,t):\begin{cases} x=3+t\left(\dfrac{4-u}{2}\right) \\ y=0 \\ z=u \end{cases} \quad ; \qquad u\in[0,3],t\in[0,1]$$

9. Para llevar la superficie parametrizada al lugar en el espacio que le corresponde, se debe involucrar la superficie S_1 que le da su altura en y. Para ello despeje y de S_1.

$$y=\sqrt{4-(x-3)^2}$$

> Nota: Debe tener cuidado al despejar una variable que esta elevada al cuadrado, ya que siempre se obtienen dos opciones, y es necesario saber si se requiere la positiva o la negativa.

10. Sustituya el valor de x de la parametrización del paso 6. en la ecuación del paso 7.

$$y=\sqrt{4-\left(t\left(\frac{4-u}{2}\right)\right)^2}$$

ISBN 978-84-945722-3-4

11. Sustituya el valor de y de la ecuación del paso 8. en la parametrización del paso 6.

$$s(u,t):\begin{cases} x=3+t\left(\dfrac{4-u}{2}\right) \\ y=\sqrt{4-\left(t\left(\dfrac{4-u}{2}\right)\right)^2} \\ z=u \end{cases} ; \qquad u\in[0,3], t\in[0,1]$$

Esta es la superficie que corresponde a la primer cara del sólido.

12. Ingrese a GeoGebra la superficie que corresponde a la primer cara del sólido, escriba la palabra “Superficie” en la celda de entrada que se encuentra en la parte inferior de la pantalla, GeoGebra le completará la guía para ingresar la superficie, usted debe seleccionar la opción que se muestra en la Figura 6.

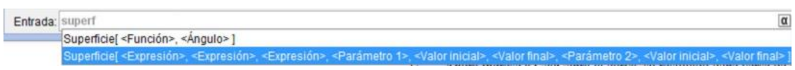


Figura 6: Ingreso en GeoGebra de una superficie parametrizada.

13. Donde indica <Expresión> se debe escribir la parametrización de las tres variables, en el orden x, y, z.

14. En <Parámetro 1> se escribe u, <Valor inicial 1> y <Valor final 1> corresponde a los extremos del intervalo donde se evaluará el parámetro 1, en este caso $u \in [0,3]$.

15. En <Parámetro 2> se escribe t, <Valor inicial 2> y <Valor final 2> corresponde a los extremos del intervalo donde se evaluará el parámetro 2, en este caso $t \in [0,1]$.

16. Su entrada debe quedar como se muestra en la Figura 7.

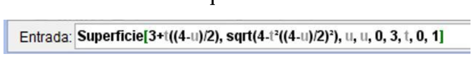


Figura 7: Ingreso en GeoGebra de la cara 1 del sólido.

17. Cuando haya terminado, pulse la tecla “Enter” para poder ver su superficie. Ver Figura 8.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

18. Realice un procedimiento similar al anterior para graficar las otras caras, el resultado debe ir quedando como se muestra en las figuras de la 9 a la 13.

19.

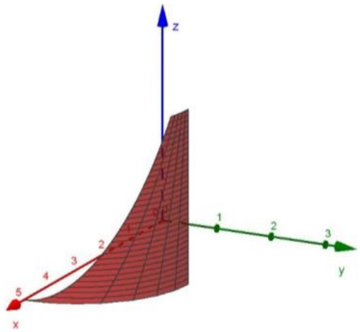


Figura 8: Cara 1, limitada por la superficie:

$S_1 : (x-3)^2 + y^2 = 4$

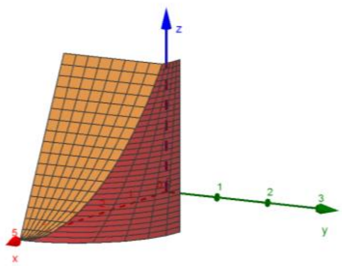


Figura 9: Se agrega cara 2, limitada por: $S_2 : 2x + z = 10$

ISBN 978-84-945722-3-4

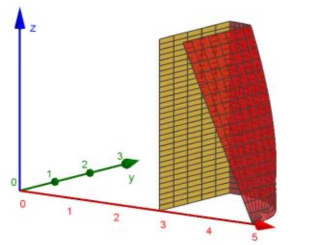


Figura 10: Se agrega cara 3, limitada por: $S_3: x = 3$.

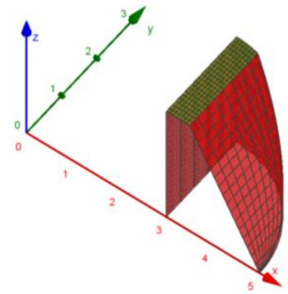


Figura 11: Se agrega cara 4, limitada por: $S_4: z = 3$.

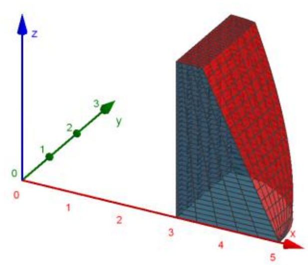


Figura 12: Se agrega cara 5, limitada por: $S_5: y = 0$.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

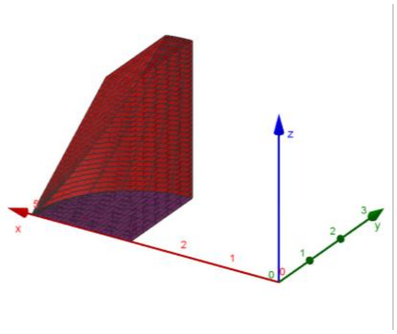


Figura 13: Se agrega cara 6, limitada por: $S_6: z = 0$

1.

20. Cambie los colores de las caras y elimine la maya, esos cambios los puede hacer en las propiedades de cada superficie. Ver Figura 14.

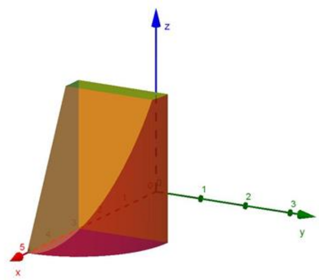


Figura 14: Sólido con sus caras de diferentes colores

21.

22. Se pueden agregar las aristas del sólido, para ello se deben calcular a pie las intersecciones de las superficies, y utilizando los vértices de nuestro primer sólido a mano, se irán encontrando y parametrizando cada curva para poder graficarla en GeoGebra.

23.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Arista 1: intersección de S_1 con S_6

$$(x-3)^2+y^2=4\bigcap z=0$$

$$c(t):\begin{cases} x=3+2\cos t \\ y=2\operatorname{sen} t \\ z=0 \end{cases} \quad ; \qquad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

En GeoGebra su entrada debe quedar:

```
Entrada: Curva[3+2*cos(t), 2*sen(t), 0, t, 0, pi/2]
```

Ver Figura 15.

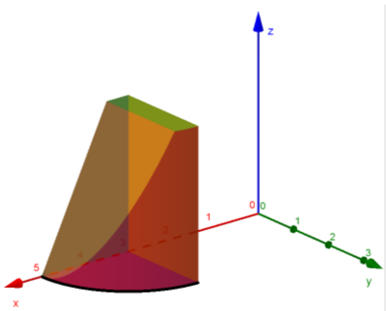


Figura 15: Arista 1: intersección de S_1 con S_6.

Arista 2: intersección de S_1 con S_2

$$(x-3)^2+y^2=4\bigcap 2x+z=10$$

Despejar y y z, x será el parámetro

$$c(t):\begin{cases} x=t \\ y=\sqrt{4-(t-3)^2} \\ z=10-2t \end{cases} \quad ; \qquad t\in[3.5,5]$$

Ver Figura 16.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

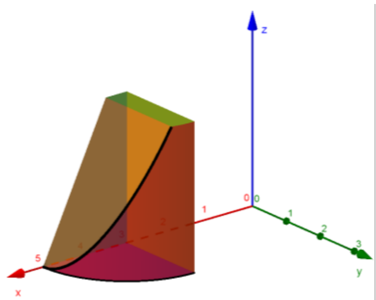


Figura 16: Arista 2: intersección de S_1 con S_2

Arista 3: intersección de S_1 con S_4

$$(x-3)^2+y^2=4 \bigcap z=3$$

$$c(t):\begin{cases} x=3+2\cos t \\ y=2\,\mathrm{sen}\,t \\ z=3 \end{cases} \quad ; \qquad t\in\left[1.318,\frac{\pi}{2}\right]$$

Ver Figura 17.

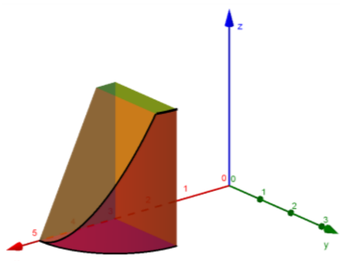


Figura 17: Arista 3: intersección de S_1 con S_4.

ISBN 978-84-945722-3-4

24. Las otras aristas son segmentos de recta entre vértices, por lo que se ingresan en GeoGebra como segmento de punto a punto: 

. Por último se pueden agregar los vértices del sólido. Ver Figura 18.

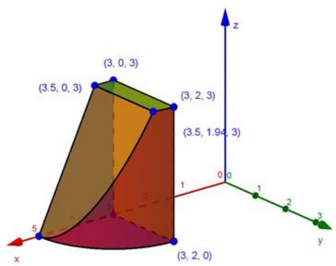


Figura 18: Sólido con caras, aristas y vértice

Conclusión

El software GeoGebra, utilizado correctamente en cursos de cálculo en varias variables (aunque su uso puede extenderse a otras áreas de la matemática) puede ser de gran utilidad para los estudiantes, de esta manera ellos lograrán mediante las vistas, y propiedades de objetos tridimensionales determinar detalles que de otra forma tendrían que imaginar.

Referencias bibliográficas

Larson, R. y Edwards, B. (2010). *Cálculo 2 de varias variables*. Ciudad de México, México: Mc Graw Hill.

Mora, W. (2015). *Cálculo en varias variables*. Cartago, Costa Rica: Revista Digital: Matemática, Educación e Internet.

Gamboa, R. (2007). Uso de la Tecnología en la Enseñanza de las Matemáticas. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/download/6890/6576 Consultado 01/01/2017

Geogebra (s.f.). Manual. https://wiki.geogebra.org/es/Manual Consultado 01/01/2017

Geogebra (s.f.). Tutoriales. https://wiki.geogebra.org/es/Tutoriales Consultado 1/1/2017

ISBN 978-84-945722-3-4

Anexo 1

A continuación se muestra la parametrización de algunas curvas en general:

1. Segmento de recta que inicia en $A(a_1, a_2, a_3)$ y termina en $B(b_1, b_2, b_3)$.

Su parametrización estaría dada por:

$$c(t): \begin{cases} x = a_1 + t(b_1 - a_1) \\ y = a_2 + t(b_2 - a_2) \\ z = a_3 + t(b_3 - a_3) \end{cases} ; \qquad t \in [0,1]$$

2. Círculo en YZ sobre el plano $x = x_1$:

$$\begin{cases} (y-j)^2 + (z-k)^2 = r^2 \\ x = x_1 \end{cases}$$

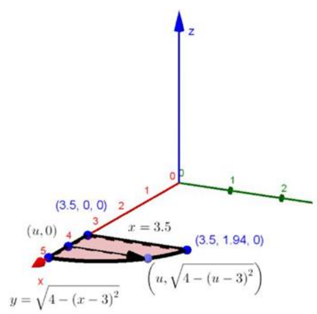
Usando $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, su parametrización estaría dada por:

$$c(t): \begin{cases} x = x_1 \\ y = j + r\cos t \\ z = k + r \operatorname{sen} t \end{cases} ; \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Anexo 2

A continuación se presentan la proyección y las parametrizaciones utilizadas para las caras de la 2 a la 6 del sólido del ejemplo 1.

Cara 2, limitada por la superficie: $S_2: 2x + z = 10$

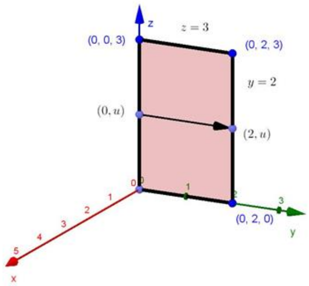


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

$$s(u,t):\begin{cases} x = u \\ y = t\sqrt{4-(u-3)^2} \\ z = 10-2u \end{cases} \quad ; \qquad u \in [3.5, 5], t \in [0,1]$$

Figura 19: Proyección de la cara 2 y vector en dirección del eje Y. Parámetro: $3{,}5 \leq u \leq 5$

Cara 3, limitada por la superficie: $S_3: x = 3$

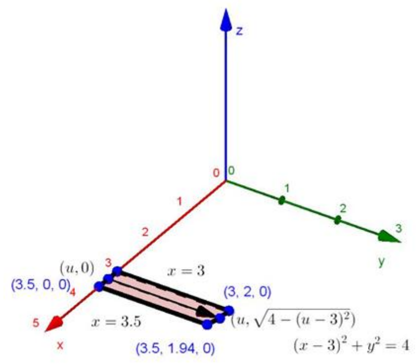


$$s(u,t):\begin{cases} x = 3 \\ y = 2t \\ z = u \end{cases} \quad ; \qquad u \in [0,3], t \in [0,1]$$

Figura 20: Proyección de la cara 3 y vector en dirección del eje Y. Parámetro: $0 \leq u \leq 3$

Cara 4, limitada por la superficie: $S_4: z = 3$

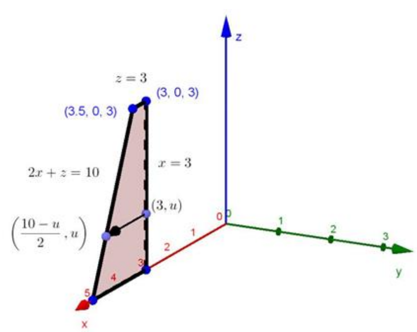
VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



$$s(u,t):\begin{cases} x=u \\ y=t\sqrt{4-(u-3)^2} \\ z=3 \end{cases} \quad ; \qquad u\in[3,3.5]\,,t\in[0,1]$$

Figura 21: Proyección de la cara 4 vector en dirección del eje Y. Parámetro: $3 \leq u \leq 3{,}5$

Cara 5, limitada por la superficie: $S_5: y = 0$



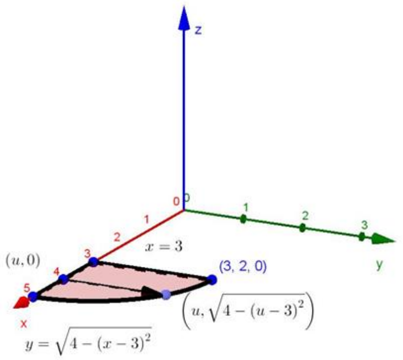
$$s(u,t):\begin{cases} x=3+t\left(\dfrac{4-u}{2}\right) \\ y=0 \\ z=u \end{cases} \quad ; \qquad u\in[0,3]\,,t\in[0,1]$$

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 22: Proyección de la cara 5 y vector en dirección del eje X

Parámetro: $0 \leq u \leq 3$

Cara 6, limitada por la superficie: $S_6: z = 0$



$$s(u,t): \begin{cases} x = u \\ y = t\sqrt{4-(u-3)^2} \\ z = 0 \end{cases} ; \qquad u \in [3,5], t \in [0,1]$$

Figura 23: Proyección de la cara 6 y vector en dirección del eje Y

Parámetro: $3 \leq u \leq 5$

Anexo 3

A continuación se facilita un ejercicio adicional.

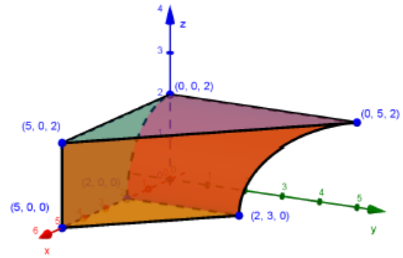
Ejercicio

1 Considere el sólido limitado por las superficies:

$$S_1 : x^2 + z^2 = 4, \qquad S_3 : z = 2, \qquad S_5 : y = 0,$$
$$S_2 : x + y = 5, \qquad S_4 : z = 0,$$

Realice la gráfica del sólido en GeoGebra.

Solución



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

T-294

POLIEDROS MODULARES PARA DESARROLLAR EL SENTIDO ESPACIAL

Pablo Flores - Rafael Ramírez - José Antonio Fernández-Plaza - Juan Francisco Ruiz-Hidalgo - Luis Berenguer
pflores@ugr.es – rramirez@ugr.es - joseanfplaza@ugr.es - jfruiz@ugr.es - luisberenguer@telefonica.net
Universidad de Granada, España

Núcleo temático: V. Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Modalidad: T
Nivel educativo: Primaria - Secundaria
Palabras clave: Poliedros, Recursos, Geometría, Sentido espacial

Resumen
La geometría tridimensional es una parte de la matemática que resulta a la vez difícil y muy plástica. Identificar poliedros y construirlos mediante objetos sencillos es una práctica importante para su aprendizaje. Se mejora si se examina qué relación existe entre las características de los objetos y los poliedros que permiten construir.
En este taller trabajaremos con poliedros, con vistas a emplear en las aulas para desarrollar el sentido espacial de los alumnos. Tomando en cuenta las componentes de dicho sentido, organizamos el taller en tres etapas cíclicas, para cada bloque de materiales:
a) identificar poliedros en figuras que los contienen, sugieren o utilizan,
b) construir poliedros con objetos simples, y
c) analizar sus cualidades, cómo aparecen los poliedros y cómo cambiar condiciones para obtener nuevos poliedros.
A partir de documentación y materiales para construir poliedros en páginas y fuentes de información, seleccionamos cartón y planchas plásticas. Estos materiales son fáciles de lograr para el profesor para trabajar en sus aulas los poliedros, y atienden al menos a dos dimensiones del sentido espacial: características y propiedades geométricas de poliedros y habilidades de visualización

En este taller abordamos un tema de gran contenido plástico, que no siempre adquiere el papel que le corresponde en geometría, el estudio y la construcción de poliedros. El estudio de los poliedros tiene que partir de la identificación de los mismos en objetos del entorno, para pasar a comprenderlos, haciendo abstracción de algunas cualidades que en los objetos físicos tienen presencia, pero no corresponden a sus características geométricas. Con ello

ISBN 978-84-945722-3-4

estaremos contribuyendo a aprender los poliedros con sentido espacial, es decir, coordinando el aprendizaje geométrico con la puesta en práctica y mejora de cualidades de visualización.

El taller comienza presentando algunos poliedros originales, formados con materiales fáciles. Sobre estos poliedros afrontamos tres etapas: identificación, construcción y análisis de las posibilidades, todo ello a partir de material sencillos, plástico y cartón.

POLIEDROS ORIGINALES

En la red se pueden encontrar poliedros construidos a partir de diversos materiales. Un aporte interesante son los poliedros articulados (figura 1), que cambian de forma al golpearlos. Estudiar qué poliedro aparece en posición de reposo o en su "explosión" es una tarea interesante que obliga a poner en juego diversas componentes del sentido espacial.

Figura 1: Poliedros articulados

Entre los poliedros originales que se encuentran en la red destacamos poliedros del escultor Viktor Genel, (https://www.facebook.com/viktor.genel), formados por tijeras, clips, cartón, etc. Otros poliedros originales que vemos en la figura 2 están formados por piezas y monedas, naipes doblados, piezas de madera.

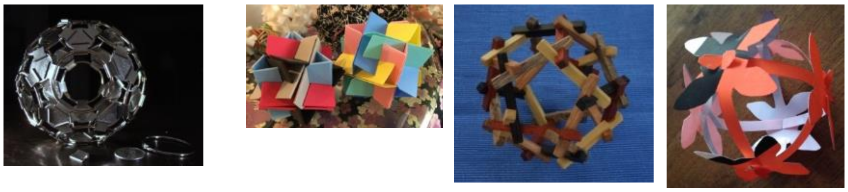


Figura 2: Poliedros originales

TALLER DE ESTUDIO Y CONSTRUCCIÓN DE POLIEDROS

En la figuras 1 y 2 aparecen esqueletos de poliedros, definidos por sus aristas. Identificar en ellos poliedros posibilita desarrollar el sentido espacial (Flores, Ramírez-Uclés y Del Río, 2015), poniendo en marcha, tanto conocimientos geométricos (conocer los poliedros, cualidades, nombres, etc.), y especialmente dos habilidades de visualización (Del Grande, 1985) coordinadamente, la "percepción figura-contexto" (para seleccionar qué elementos forman el poliedro en el contexto de la pieza completa), y la "percepción de las relaciones espaciales", que permiten apreciar las cualidades del poliedro que estamos identificando. Para ello proponemos realizar tres pasos (Figura 3):

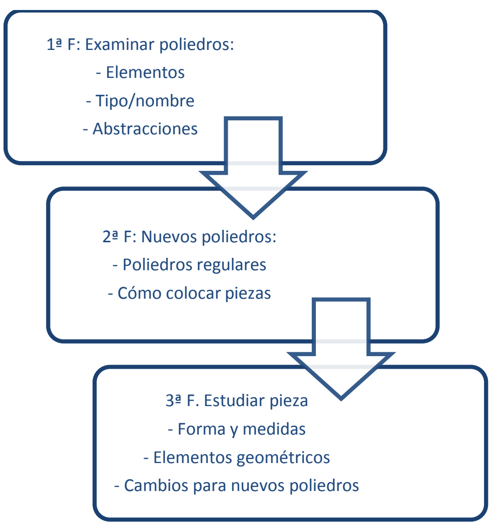


Figura 3: Esquema del taller

ISBN 978-84-945722-3-4

a) Examinar los poliedros, apreciando quiénes son sus elementos, el tipo y nombre del poliedro, y las abstracciones que hay que realizar para apreciarlo.

b) Construir nuevos poliedros con las piezas, examinar cuáles son posible construir, cómo hay que considerar las partes de las piezas, etc.

c) Analizar las piezas, examinar su forma, los elementos geométricos que se están considerando como vértices y aristas, apreciar sus cualidades geométricas (posición relativa, medida de ángulos y longitudes, etc.).

El objeto principal de trabajo en este taller será el poliedro que se refleja en la figura 4, la lámpara IQLight* (www.iqlight.com), de Holger Strøm, formado por piezas plásticas.

Figura 4: Lámpara IQLight* www.iqlight.com, de Holger Strøm

a. Examinar poliedros

Tras presentar la lámpara IQlight® system, pasaremos a identificar el poliedro que constituye generalmente la lámpara, empleando para ello los elementos geométricos que se requieran, seleccionando vértices y aristas, para luego contar el orden de cada vértice y abstraer los elementos que se pueden considerar aristas. Los ejemplos de los poliedros de tijeras y los articulados nos darán la oportunidad de darnos cuenta de la dificultad de esta tarea, que se complementa cuando se trabaja con la lámpara de 30 piezas, que se examinará montada. En esta acción apreciaremos qué abstracciones se han realizado, cómo se materializan las caras, vértices y aristas, la disposición de estas, el orden de los vértices, etc. Para identificar poliedros recurriremos a una plantilla de poliedros regulares, así como de algunos poliedros arquimedianos.

ISBN 978-84-945722-3-4

b. Construir poliedros

Desarmando el poliedro de origen podemos dar lugar a nuevos poliedros. En este caso el taller se dirigirá a construir todos los poliedros platónicos que puedan realizarse con las piezas de la lámpara. En este ejercicio aparecerán los poliedros duales, permitiendo apreciar cuáles y cómo se construyen y cómo transmitir el proceso de construcción.

La información que transmite la propia página de IQLight nos ayudará a identificar cuáles pueden sugerir el tetraedro, el octaedro, el cubo, el dodecaedro y el icosaedro. La apreciación teórica debe acompañarse de la construcción práctica, para apreciar cuál es cada uno de ellos, qué elemento se toma como vértice y cuál como arista, etc.

De nuevo la plantilla de poliedros platónicos y arquimedianos facilitará la identificación de los construidos, así como los argumentos que se emitan acerca de la posibilidad de construirlos.

c. Estudio de las piezas

Los debates sobre las posibilidades nos llevan a estudiar la pieza, sus características geométricas y constructivas. Mediante instrumentos de dibujo podemos examinar algunas cualidades del elemento geométrico que constituye la pieza, identificar la parte de la misma que abraza y la que encaja, así como la posición que tienen las aristas de los poliedros en relación a dicha pieza.

Caracterizar la pieza, así como los polígonos que permite construir, se llevará a cabo en esta fase, en la que podremos hacer medidas aproximadas de manera empírica, tanto mediante instrumentos de medida (transportadores de ángulos y reglas graduadas, por ejemplo), como comparaciones y construcciones planas, para contrastar las apreciaciones intuitivas.

En este examen de las piezas habrá que apreciar cómo hemos podido construir caras diferentes de las apreciadas en la pieza, especialmente para lograr construir algunos de los poliedros elaborados en la fase anterior. Igualmente esto nos llevará a apreciar las dificultades para construir otros poliedros, como el cubo.

ISBN 978-84-945722-3-4

CIERRE

Una vez realizado el estudio, construcción y análisis anteriores, estamos en condiciones de buscar algunas piezas que permitan nuevas construcciones. Si el tiempo lo permite, incorporaremos una nueva forma de construcción basada en piezas en cartón con formas de triángulos isósceles, centrales de los polígonos regulares, y apreciando qué nuevas figuras permiten construir, así como su relación con la pieza de la lámpara.

Referencias bibliográficas

Del Grande, J. J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic teacher*, 37 (6), 14-20.

Flores, P., Ramirez-Uclés, R., Del Río, A. (2015). Sentido espacial. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*, (pp. 127-145). Madrid, Pirámide.

Genel, V. (s.f.) *Mecanomorph*. http://viktorg.com/wordpress1/ Consultado 12/04/2017

Strøm, H. (1973) *IQlight® system*. www.iqlight.com Consult ado 12/04/2017

ISBN 978-84-945722-3-4

T-296

TALLER MATEMAGIA

Alicia Prieto Martín – Vanesa Sánchez Canales
aliciaprieto@ues.es – vscanales@us.es
I.E.S El Sur (Huelva) - Universidad de Osuna (Sevilla)

Núcleo temático: V. Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
Modalidad: T
Nivel educativo: Seleccionar uno de los siete niveles considerados
Palabras clave: Ciencia, magia, matemáticas

Resumo

En infinidad de ocasiones podemos demostrar que las matemáticas se encuentran en cualquier parte, que el mundo es matemático. Sin embargo, este hecho a veces no es suficientemente motivador para acercar las matemáticas a nuestra lista de curiosidades e intereses.

En este taller, mostraremos, la omnipresencia de las matemáticas desde una perspectiva distinta y mágica, es decir, enseñaremos no sólo que las matemáticas también están presentes en la magia, sino además que además éstas son realmente mágicas.

Para ello, se llevarán a cabo distintos "trucos" de magia matemática en los que se mostrarán como gracias a ella podemos, por ejemplo, predecir, adivinar, ver cosas aparentemente imposibles e incluso saber si alguien nos están mintiendo o no. Después de llevar a cabo todos ellos se expondrá su base matemática y se detallarán los pasos seguidos en su realización con el objetivo de que podamos maravillarnos y maravillar con la magia de las matemáticas.

El taller de "Matemagia" consiste en la realización de trucos de magia y en el posterior análisis y explicación de que su magia se realiza gracias a la base matemática que tiene todos ellos. Por esta razón, en su desarrollo tendremos tres bloques, el bloque de magia geométrica, el de magia aritmética y el de magia probabilística.

A continuación, detallaremos la realización de varios ejemplos de cada bloque y queremos hacer especial hincapié en dos aspectos fundamentales. El primero, el hecho de que nuestra magia es sólo matemática, es decir, no engañamos al espectador, ocultamos objetos o hacemos alteraciones sin que el público se de cuenta.

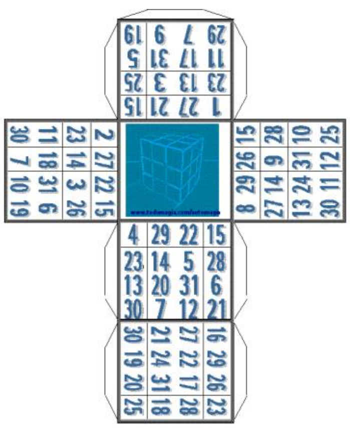
El segundo, que la realización de estos trucos a nuestro alumnado es de gran utilidad para mostrarles que las matemáticas no son simplemente algo abstracto que no sirve para nada, ni

ISBN 978-84-945722-3-4

tan siquiera que pueden serles muy útiles en su vida cotidiana, sino que más allá de este hecho, gracias a su magia, podemos maravillar al mundo.
Se describen a ahora a modo de ejemplo, algunos de los trucos que realizaremos. En total se llevarán a cabo 15 trucos. Su base y explicación se revelará después de la realización de cada uno de ellos.

Truco nº 1: ¿Qué día naciste? El cubo mágico.

Los magos matemáticos pueden adivinar la fecha de nacimiento de cualquier persona, ya sea un bebé o una persona adulta, española o nacida en Nueva Zelanda. Para ello usamos el cubo mágico que aparece en la siguiente ilustración.
Elegimos una persona, la cual sólo tiene que ir mirando nuestro cubo y decirnos en que cara (o caras) aparece el número que corresponde al día en el que nació. A continuación, hacemos el mismo proceso con el número que corresponde a su mes de nacimiento. Una vez hecho esto sabemos qué día y qué mes nació esa persona.
Aún más, con el cubo mágico adivinamos el número favorito de cualquier persona, su número de hermanos, o la planta del bloque en el que vive o el número de mascotas que tiene.



Truco nº 2: El orden del Universo.

Este truco muestra que aunque vivimos en un mundo caótico, en todo caos siempre podemos encontrar un orden. Para ello, tomamos un palo de una baraja de cartas, por ejemplo el de corazones. Les mostramos las cartas ordenadas del 1 al 10.

ISBN 978-84-945722-3-4

Después, empezamos a desordenar: primero, vamos separando en dos montones y les mostramos que nos quedan las pares en un lado y las impares en otro. Luego, volvemos a separar en dos montones, se las enseñamos para que vean que ya si están desordenadas. Por último, volvemos a separar en dos montones y además les decimos que también vamos a hacer cortes (se pueden cortar las veces que se quiera). Luego levantamos la carta que haya quedado encima. Pasamos abajo tantas cartas como ese número y las volvemos a mostrar. Las cartas volverán a estar ordenadas como al inicio.

Truco nº 3: La desaparición.

En Irlanda el símbolo mágico que representa al país es el "Leprechaun". Dejando a un lado la leyenda de su magia, la realidad es que estos duendes son un ejemplo de la magia de la geometría. Para ello, les damos a nuestros alumnos la siguiente imagen.

Les diremos que cuenten los duendes que ven en ella, que luego la corten por las líneas marcadas en negro y que intercambien la posición de las dos partes superiores. Ahora, que vuelvan a contar, verán que antes había 15 y ahora 14, es decir, ¡ha desaparecido uno de ellos!

¿Cómo es posible este hecho? Su explicación es puramente geométrica y será explicada y analizada en la realización del taller.

Truco nº 4: ¿Cara o Cruz?

Tomamos unas cuantas monedas (no importa el número) y las ponemos encima de la mesa. Contamos (sin decirlo) cuantas caras hay. A partir de ese momento dejamos de mirar y

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

pedimos a un alumno que gire ese número de monedas (también se puede girar dos o más veces una misma moneda). A continuación le decimos que tome una de ellas y la ponga en la palma de su mano tal cual estaba. Volvemos a mirar las monedas y le adivinamos si la que ha elegido está de cara o de cruz.

Truco nº 5: El reloj

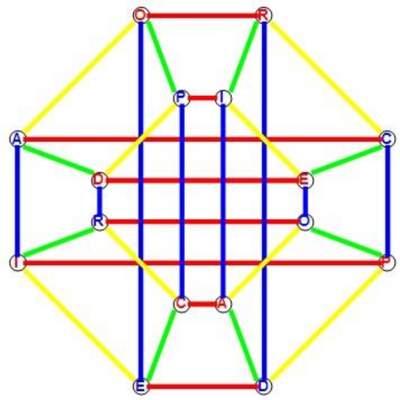
Para la realización de este truco se utiliza una baraja de cartas (española o de póker). Se disponen las cartas como se muestra en la imagen. La carta del centro es la carta del misterio. Las demás, representas las horas.

Se le pide a un voluntario que elija una hora, que recuerde la carta que ocupaba la posición de esa hora y que del montón coja tantas cartas como la hora que haya pensado. Mientras desmontamos el reloj. Le pedimos al alumno que nos de las cartas y las ponemos encima de las del reloj que hemos quitado. Les enseñamos la primera, les decimos que esa no es y la ponemos abajo del montón. Luego volvemos a poner el reloj (empezando por la 1 y terminando con la carta del misterio), pero con las cartas boca abajo. La carta que el alumno ha elegido está en el centro ahora (la posición de la carta del misterio) y esta habrá pasado a estar en la hora correspondiente que había elegido la persona voluntaria.

Truco nº 6: El hipercubo detector de mentiras

Gracias al siguiente hipercubo mágico, se puede saber si una persona nos está diciendo la verdad o por el contrario, mintiéndonos. Para ello, mostramos la siguiente imagen de un hipercubo plano.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



Les diremos que elijan una letra de la palabra PARECIDO y que decidan si van a decir la verdad o por el contrario van a mentir. El hipercubo detectará la letra elegida y si esta persona nos está mintiendo o diciendo la verdad.

Para ello sólo hay que responder a las siguientes preguntas:

Pregunta roja: ¿La letra elegida está contenida en la palabra PERA?

Pregunta azul: ¿La letra elegida está contenida en la palabra PICA?

Pregunta amarilla: ¿La letra elegida está contenida en la palabra ARCO?

Pregunta verde: ¿La letra elegida está contenida en la palabra PIRO?

Truco nº 7: Los tres montones.

Tomamos 21 cartas de la baraja. Pedimos a una persona que elija una. A continuación, vamos colocando las cartas en 3 montones y le decimos que nos diga el montón en el que está la carta que eligió. Recogemos los montones de tal forma que el que posee su carta quede en medio de los otros. Repetimos el proceso 2 veces más. En ese momento, sabemos que su carta es la que ocupa la posición 11.

Para adivinarla de forma más espectacular, colocamos boca abajo las 7 cartas del primer montón, a continuación las del segundo de tal forma que la parte superior de una carta esté 1.5 cm debajo de la parte inferior de la siguiente. Luego ponemos encima las del último montón. Las cogemos y dándoles suaves golpes en la mesa por un lado y otro, saldrá (por encima de todas) la carta que la persona eligió.

ISBN 978-84-945722-3-4

Referencias bibliográficas

Libros

P. McOwan, M. Parker." The manual of mathemathical magic". Queen Mary, University of London.

J. Davinson, P. McOwan. "Maths made magic". Queen Mary, University of London.

Información extraída de una página web

http://www.mathematicalmagic.com
http://www.davinsonmagic.com
http://www.todomagia.com/automagia

ISBN 978-84-945722-3-4

T-298

RECORTANDO EL CUADRADO

Guillem Bonet Carbó – Raül Fernández Hernández – Sílvia Margelí Voelp – Sandra Soliguer Portavella
gbonet2@xtec.cat – raul.fh@gmail.com – smargeli@gmail.com – ssoliguer@gmail.com

Grupo MatGI - España

Núcleo temático: La resolución de problemas en matemáticas
Modalidad: Taller (T)
Nivel educativo: Medio o Secundario (12 a 15 años)
Palabras clave: Geometría, Lógica, Creatividad, Resolución de problemas

Resumo
El grupo de profesores de matemáticas de Girona (MatGI) es un grupo que se reúne mensualmente para trabajar sobre materiales o actividades didácticas para el aula de matemáticas buscando un enfoque más manipulativo que reproductivo.
Desde nuestro grupo os queremos presentar distintas ideas para trabajar de forma manipulativa, intuitiva y fresca la activación del razonamiento y la lógica a través de la resolución de problemas en educación secundaria.
La resolución de problemas, que no de ejercicios, es uno de los pilares básicos de la matemática. En su proceso de formación, los alumnos deben aprender a resolver problemas para comprender y aplicar sus conocimientos, potenciar su creatividad, su capacidad de análisis, su razonamiento, …

En este taller os mostraremos dos propuestas para trabajar la geometría con la resolución de problemas. En la primera se estudiarán áreas, perímetros, simetrías, paridad, recuento de opciones,… En la segunda se propone trabajar mediatrices de un segmento, bisectrices de un ángulo, y los ejes de simetría de una figura.
Si os habéis preguntado alguna vez de cuántas formas se puede dividir un triángulo equilátero en 4 partes iguales, o cómo conseguir recortar este mismo triángulo en un solo corte, este es el taller que estabais buscando!

1. Introducción

Paul Lockhard, en su artículo "Lamento de un matemático" da algunas pistas sobre cómo mantener la motivación de los alumnos en el aula de matemáticas:

"Las matemáticas son el arte de la explicación. Si privas a los alumnos de tener la oportunidad de participar en esta actividad – de proponer problemas, de hacer sus propias conjeturas y

ISBN 978-84-945722-3-4

descubrimientos, de equivocarse, de estar creativamente frustrados, de tener una inspiración y de improvisar sus propias explicaciones y demostraciones – los estás privando de las matemáticas en sí mismas.”

Debemos pues, huir de esa materia que se dedica a aplicar antiguas recetas disfrazadas con algoritmos de cálculo que ocultan la verdadera belleza de las matemáticas.

Nos planteamos en este taller presentar actividades didácticas con problemas que ayuden al alumno a desarrollar su intuición. No buscamos con estos problemas una respuesta inmediata, sino que el problema obligue al alumno a tomar decisiones, a reflexionar y a diseñar sus propias estrategias. Para conseguirlo, planteamos problemas alejándolos de ejercicios mecánicos que sólo implican la aplicación de un algoritmo o de una fórmula. Queremos implicar a los alumnos en la investigación, en la búsqueda de la solución, de forma que en cada problema tiene que haber un descubrimiento por parte del alumno.

2. Base de la metodología propuesta

El documento “Competencias básicas en el ámbito matemático” difundido por el Departament d’Ensenyament de Cataluña nos sugiere que para trabajar las matemátias en el aula “el profesor debe provocar la curiosidad y proponer retos, dando suficiente tiempo para pensar y reflexionar. […] Esto se emplaza en un ambiente que favorezca el intercambio de ideas y que anime a la reflexión. […] La aceptación que todos pueden hacer contribuciones interesantes, […] Ayudarà a crear una cultura de clase más basada en hacerse preguntas que en buscar respuestas inmediatas.”

Los retos de los que habla el documento se proponen como pequeños problemas a superar por el alumno, problemas que tienen por finalidad despertar la creatividad y el razonamiento del alumno, a la par que descubrir una teoría matemática que rubrica y refuerza la base matemática del alumno para futuros problemas.

Para resolver los problemas Pólya (1945) detalla los cuatro pasos clave que tiene que seguir el alumno, a saber: “Understanding the problem”, “Devising the plan”, “Carrying out the plan” i “Looking back”. La propuesta de método de resolución de problemas que proponemos, se acerca a la de Pólya(1945) y se basa en los siguientes puntos:

ISBN 978-84-945722-3-4

Observación – primeros intentos: una vez entendido el problema, el alumno realiza distintas pruebas, de las que observa su comportamiento y busca relaciones entre los distintos resultados obtenidos.

Acercamiento – se formulan hipótesis y se experimenta con estas para intentar encontrar resultados que nos acerquen a la solución buscada.

Discusión – Una vez encontrada esta, cabe debatir en grupo los resultados encontrados, los alumnos serán los encargados de validar o no la solución del problema.

Documentación y ampliación – Una vez discutido y resuelto, el alumno debe ordenar sus pensamientos sobre el proceso seguido y los conceptos relacionados involucrados, haciéndose nuevas preguntas sobre el problema, generalizando los resultados, aplicándolo a situaciones análogas, …

3. El taller "Recorta el cuadrado"

El taller se plantea con la finalidad de practicar la resolución de problemas y dar al profesorado ideas, estrategias y pasos a seguir. Para ello dividiremos el taller en dos partes en las que se trabajarán dos tipos de problemas.

En la primera parte del taller se propone la división de figuras en partes iguales. En esta parte se analizarán básicamente problemas de recuento de opciones (atendiendo claro está a las simetrías y las rotaciones de la solución), y se trabajarán los conceptos de área y perímetro de la figura. En la segunda parte del taller se intentarán recortar figuras geométricas con un solo corte, y con ellas, se trabajarán los conceptos de ejes de simetría, bisectrices y mediatrices.

Los participantes al taller compartirán sus estrategias de resolución y los puntos clave que les han ayudado a encontrar la solución. Todas los "descubrimientos" se debatirán y analizarán en gran grupo y serán los mismos alumnos quienes los validarán.

Se añade en los Anexos a este trabajo distintos ejemplos de los ejercicios propuesto en el taller y sus soluciones.

a. Primera parte del Taller: División de figuras en partes iguales

ISBN 978-84-945722-3-4

La primera parte del taller contiene ejercicios para trabajar la división de una figura en partes iguales (en figuras que se asemejen en área y forma).
En este caso no trabajamos directamente el área, sino que nos proponemos analizar de cuántas formas se puede cortar una figura (sencilla) en n partes iguales. Para simplificar los ejercicios, se supondrá que la figura es poligonal y está sobre una retícula cuadrada. Con esto, exigiremos que la división de la figura inicial deba hacerse siguiendo la cuadrícula dada.
Analicemos algunos ejemplos :
Ejercicio 1: Dividir un cuadrado 4x4 en dos partes iguales (siguiendo la cuadrícula).
Parece sencillo, verdad? Una vez los alumnos han encontrado sus soluciones, debemos comentar a nivel de grupo las soluciones encontradas y debatir su validez. También cabe debatir si dos soluciones simétricas son o no la misma solución. Una vez hecho los alumnos deben apuntar las estrategias seguidas y los puntos clave que les han ayudado a resolver el ejercicio.
Si ahora nos preguntamos de cuántas formas podemos dividir el cuadrado siguiendo la retícula, ampliamos el ejercicio anterior y generalizamos un poco los resultados encontrados. En este caso encontramos 6 formas distintas de dividirlo (exceptuando rotaciones y simetrías).

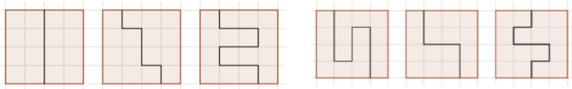


Imagen 1: Soluciones del ejercicio 1.

Una vez encontradas todas las soluciones, debemos cerciorarnos que no hay más. Para ello comentamos las soluciones, buscamos puntos en común de todas las soluciones: Misma área, distinto perímetro, igual perímetro exterior ¿por qué?, todas las divisiones pasan por el mismo punto central, existe una simetría central entre las dos piezas, ...
No debemos preocuparnos si no sale todo en una primera puesta en común, ya irán apareciendo a medida que avancemos con los ejercicios. Lo que sí es importante es buscar un método para encontrar las soluciones de forma ordenada.
Una vez hecho, cabe preguntarse cómo podríamos ampliar el ejercicio, cuántas formas habría si queremos dividir en dos partes iguales un cuadrado 2x2, 3x3, 5x5, 6x6, .., hay que tener

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

en cuenta, pero, que a medida que aumentamos la dimensión aumenta exponencialmente la dificultad.

Ejercicio 2: Dividid en dos partes iguales el rectángulo 3x4 (siguiendo la retícula). De cuántas formas distintas se puede dividir?

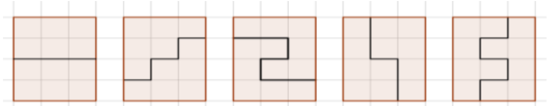


Imagen 2: Soluciones del ejercicio 2.

Para ampliar este ejercicio, nos podríamos preguntar sobre las diferencias de las soluciones variando la dimensión, o qué pasa con el rectángulo 3x5 (no se puede, puesto que el área es impar, pero, ¿y si quitamos un cuadrado, se podrá? ¿Importará el cuadrado eliminado? Si no quitamos el cuadrado, ¿en cuántas particiones iguales lo podríamos dividir?

Ejercicio 3: Dividid en cuatro partes iguales un cuadrado 4x4 (siguiendo la retícula).

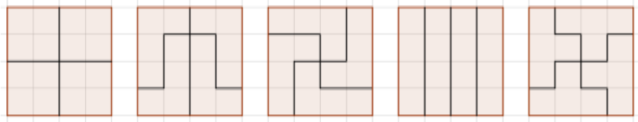


Imagen 3: Solución del ejercicio 3

En este caso, las áreas se mantienen iguales a 4 cuadrados (4x4:4=4), los perímetros varían ¡son iguales a excepción del primero! Se observan ejes de simetría axial o central. También podemos darnos cuenta de que todas las piezas usadas son tetraminós (nos damos cuenta, además, que la figura z de los tetraminós no está usada, puesto que con ella no podemos crear ningún cuadrado).

Si ya tenemos detectado que las figuras que van a aparecer serán tetraminós, y la figura tendrá que ser creada exactamente con 4 tetraminós, podemos manipular los tetraminós y convertir el problema en algo más manipulativo, tanteando así las soluciones.

El ejercicio se puede complicar variando la medida de la figura a recortar o variando el número de cortes, aunque en este caso estaríamos trabajando la divisibilidad. También se

ISBN 978-84-945722-3-4

puede exigir que las particiones cumplan con alguna restricción que queramos imponer del inicio. Veamos el siguiente ejercicio:

Ejercicio 4: Los puntos que se ven en la retícula representan dos puntos de luz. Queremos dividir el terreno rectangular 5x4 en dos partes iguales con un punto de luz cada una.

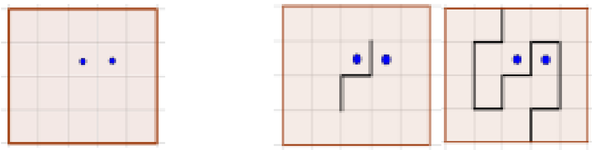


Imagen 4: Ejercicio 4 y el único detalle en común de las 13 soluciones, junto con una solución.

Se puede ampliar el ejercicio añadiendo nuevas restricciones, de forma que hagan única la solución del ejercicio (por ejemplo podríamos poner puntos de agua en cada parcela).

Otro dato que podríamos modificar para ampliar la visión del ejercicio es exigir que las figuras tengan igual área, pero que su forma sea distinta. En este caso trabajaríamos con piezas distintas de n-minós (triminós, tetraminós, pentaminós, …) según sea la figura inicial y los cortes que queramos obtener.

Para terminar, proponemos el siguiente ejercicio a modo de ejemplo de la propuesta realizada en el párrafo anterior:

Ejercicio 5: Dividid en doce partes iguales el rectángulo 6x10 (siguiendo la cuadrícula) de forma que las distintas piezas sean de igual área, pero no haya dos de iguales.

Analizando el enunciado vemos que tendremos que usar las 12 piezas del pentaminó para formar un rectángulo 6x10. Se sugiere usar pentaminós y buscar la solución de forma manipulativa.

b. Segunda parte del taller: Construcción de figuras con un solo corte

Si mostramos un folio del que queremos recortar un cuadrado de la parte central, seguramente lo recortaríamos con un corte central para luego recortar los cuatro lados del cuadrado, y así lo habríamos recortado con 4 cortes.

¿Cómo podríamos recortarlo con sólo 3 cortes rectilíneos? ¿Y con dos? ¿Y con un solo corte?

ISBN 978-84-945722-3-4

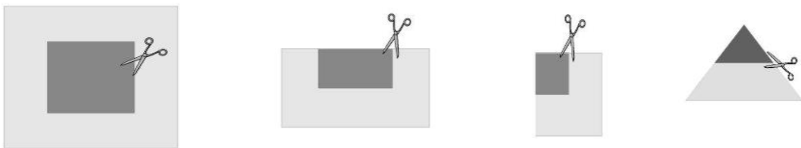


Imagen 5: Pasos para recortar un cuadrado en 4, 3, 2 o 1 cortes.

Aquí comienza la aventura.

Existe un teorema curioso, *fold-and-cut theorem*, o el teorema de doblar y cortar, que asegura que cualquier figura con lados rectos se puede obtener con un solo corte recto. Nos referimos a polígonos cóncavos, convexos, formas con agujeros, y hasta a figuras formadas por dos polígonos disjuntos. En total, un sinfín de posibles figuras que se pueden obtener con un solo corte rectilíneo. El enunciado es, cuanto menos, sorprendente. A partir de aquí proponemos unos cuantos retos para conseguir con un solo corte que podremos proponer en el aula con nuestros alumnos de secundaria y nos permitirán trabajar aspectos relacionados con simetría, bisectrices, mediatrices, …

A partir de lo que hemos experimentado con el cuadrado, podemos pasar a conseguir, de un solo corte, un octógono regular. Después avanzaremos a los distintos polígonos regulares, observando las diferencias entre los que tienen un número de lados par de los que no.

Para llegar un poco más lejos, proponemos realizar, de un solo corte, estrellas de distinto número de puntos.

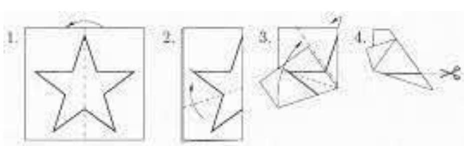


Imagen 6: Pasos para recortar una estrella con un solo corte.

Podemos optar por seguir un recorrido más artístico o intentar hacernos preguntas de tipo más matemático, para ello iremos eligiendo los retos en uno u otro sentido.

Si queremos estudiar los pliegues mínimos, partiremos de figuras dibujadas previamente en el papel: cuadriláteros de todo tipo, triángulos equiláteros, isósceles y escalenos, y polígonos independientes.

ISBN 978-84-945722-3-4

Analizando las soluciones encontradas nos será más fácil resolver los nuevos retos propuestos.

Referencias bibliográficas

Jareño, Joan (2015). D'un sol tall (1) i (2). Blog del Calaix
http://calaix2.blogspot.com.es/search?q=retallar Consultado 05/05/2017

Generalitat de Catalunya, Departament d'Ensenyament (2017) *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic*.
http://ensenyament.gencat.cat/web/.content/home/departament/publicacions/colleccions/competencies-basiques/eso/eso-matematic.pdf Consultado 25/05/17

Grupo Alquerque (2008). Kirigami geométrico. Revista SUMA, 59

Lockhard, P. (2008) Lamento de un matemático. La Gaceta de la RSME, 11.4, 739-766

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1988). *Pensar matemáticamente*. Centro de publicaciones del MEC. Ed. Labor.

Morera, L. (2012) Problemas ricos en argumentación para secundaria: reflexiones sobre el pensamiento del alumnado y la gestión del profesor. Revista SUMA, 70, 9-20

Pólya, G. (1990). *How to solve it. A new aspect of mathematical method.* London: Penguin books.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-299

ASTRONOMÍA Y GEOGEBRA: ASPECTOS HISTÓRICOS, MANEJO Y CONSTRUCCIÓN DE UN ASTROLABIO CLÁSICO PARA UN APRENDIZAJE POR PROYECTOS.

Manuel García Piqueras
Manuel.Gpiqueras@uclm.es
IES Tomás Navarro Tomás (Albacete).
Facultad de Educación de Albacete (UCLM).
España

María Sotos Serrano
Maria.Sotos@uclm.es
Facultad de Educación de Albacete (UCLM).
España

Núcleo temático: V. Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
Modalidad: T.
Nivel educativo: Secundaria.
Palabras clave: Astronomía, GeoGebra, Astrolabio, Aprendizaje por Proyectos.

Resumen

Un astrolabio es un instrumento astronómico que permite concentrar todo el universo en la palma de nuestra mano; fue muy popular en época medieval y nos permite realizar cientos de operaciones astronómicas. El instrumento experimenta un renacimiento, pues muestra cómo el universo se expresa en lenguaje matemático y, a la inversa, cómo las matemáticas tienen reflejo en la realidad.

Se propone un taller guiado donde se introducen una serie de aspectos históricos, astronomía necesaria y manejo, así como unas pautas básicas de manejo y construcción del Astrolabio Universal GeoGebra.

Haremos referencia al proyecto multidisciplinar que involucra el manejo o construcción del astrolabio en el aula de matemáticas, de manera que el profesor pueda utilizarlo para una metodología de Aprendizaje por Proyectos. También comentaremos nuestra experiencia al respecto y las conclusiones que, de momento, se han obtenido.

El taller comenzará ofreciendo datos históricos conocidos sobre el astrolabio y sus fundamentos matemáticos. También se realizará una introducción al manejo de un astrolabio

ISBN 978-84-945722-3-4

clásico. A continuación, se indicará cómo manejar el *Astrolabio Universal GeoGebra*, así como unas breves indicaciones sobre su construcción. Este proyecto es el primero de su condición en la plataforma GeoGebraTube que relacione la parte del anverso (araña y platos del astrolabio en función de la latitud) con la parte del reverso (calendario y zodíaco de la eclíptica). Estamos por tanto ante el primer instrumento de este tipo, realizado con GeoGebra, totalmente funcional.

El taller seguirá los siguientes puntos.

1. ¿Qué es un astrolabio?

Se comentará, muy brevemente, en qué consiste el instrumento y su historia. Comentaremos los primeros discos mesopotámicos basados en el principio de rotación en torno a un punto fijo. Pasaremos al desarrollo de los primeros instrumentos astronómicos griegos cuya mejora se basó en la utilización de la proyección estereográfica. Por último, veremos cómo era un astrolabio musulmán y cómo se utilizaba.

2. El alma del astrolabio: la proyección estereográfica

Se comenta en qué consiste la proyección estereográfica y los resultados más importantes a tener en cuenta, así como ciertos aspectos positivos (preservación de los círculos y los ángulos) y negativos (distorsión de los objetos alejados del eje de proyección).

ISBN 978-84-945722-3-4

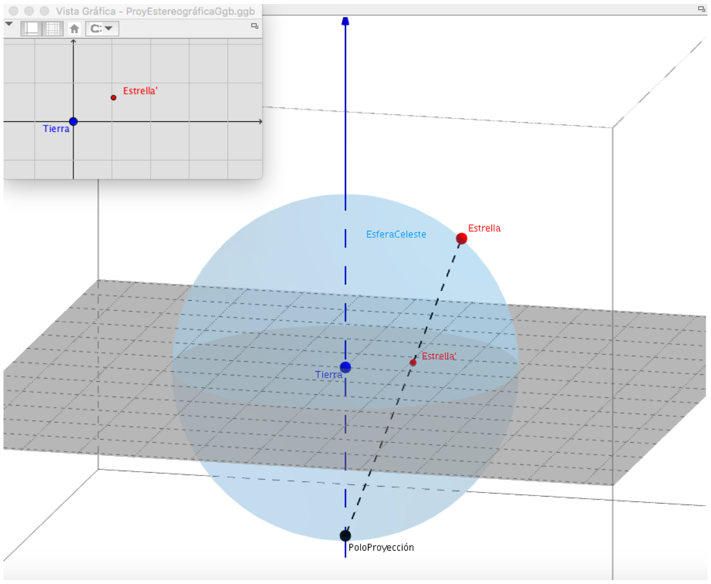


Figura 1. Proyección estereográfica de la bóveda celeste.

3. Caso práctico: cómo calcular la hora del día con el Astrolabio Universal GeoGebra

Aprenderemos una de las muchas operaciones astronómicas que se pueden realizar con un astrolabio: el cálculo de la hora del día. Para ello utilizaremos el programa *Stellarium*, de modo que podamos fijar la altura sobre el horizonte de una estrella en una determinada latitud. Posteriormente, utilizaremos ese dato para calcular la hora a la que nos encontramos en el momento de dicha observación y lo compararemos con los datos obtenidos en Stellarium.

4. Construcción del astrolabio

Se dan las pautas, paso por paso, de la construcción de un astrolabio en el programa GeoGebra. Así las partes fundamentales que podemos encontrarnos serán la *eclíptica*, el camino que sigue el Sol en la bóveda celeste, comprendida entre los trópicos de Cáncer y Capricornio celestes como límites superior e inferior respectivamente.

ISBN 978-84-945722-3-4

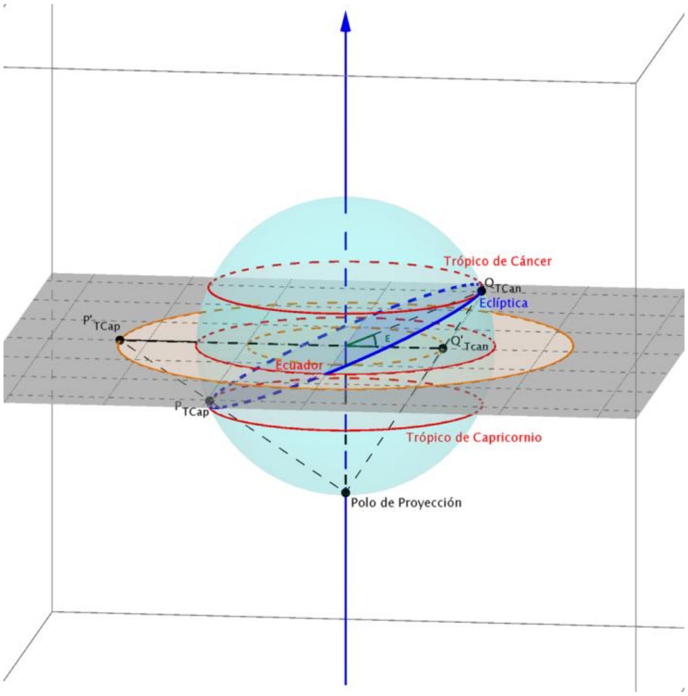
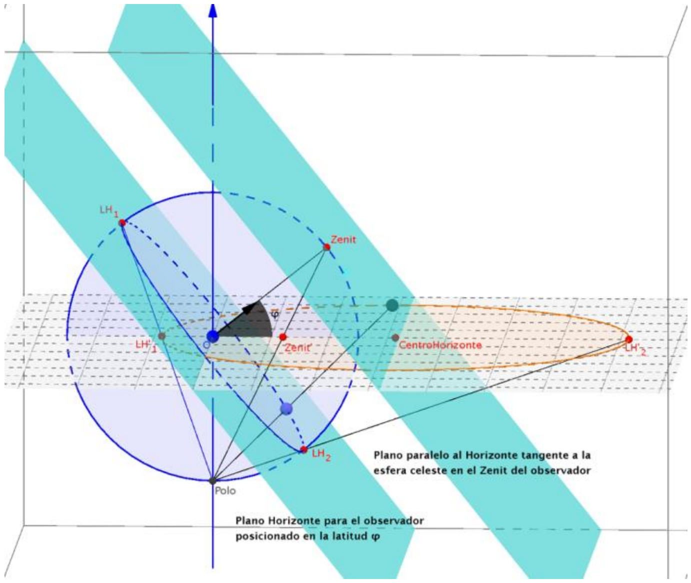


Figura 2. Eclíptica y trópicos en la bóveda celeste.

El horizonte que nos marcará todo aquello que será visible para nuestra latitud. Los astrolabios se construían para una latitud determinada, de manera que el horizonte cambiaba según la latitud para la que fuera construido. Una variante del astrolabio utilizable en cualquier latitud con un solo tímpano fue la *azafea* de Azarquiel (1028-1087), desarrollada en Toledo en el s. XI. El Astrolabio Universal GeoGebra puede utilizarse también para cualquier latitud.

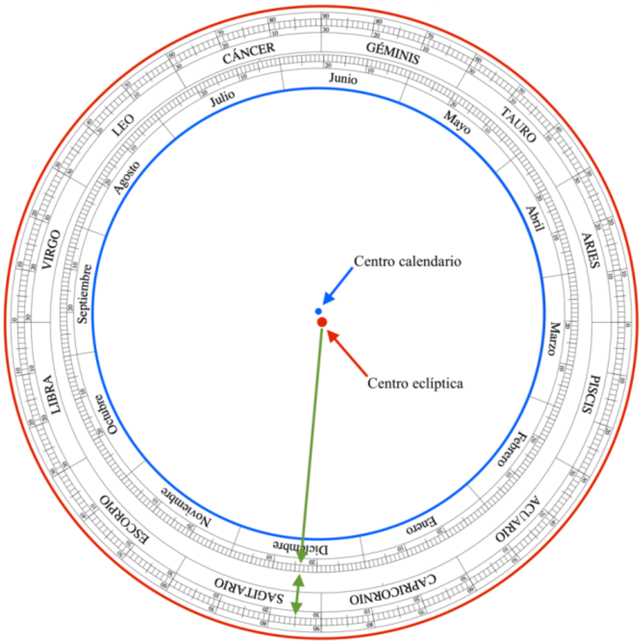
ISBN 978-84-945722-3-4



Los almucantar y los azimut que son, respectivamente, los paralelos y los meridianos de la esfera celeste. También se tratarán el cenit y el nadir, que son los puntos situados encima y debajo nuestro, respectivamente.

Por último, se indicarán los pasos necesarios para agregar las estrellas y constelaciones que consideremos oportunas, así como la generación del calendario (que en los instrumentos clásicos iba en el reverso), para la realización de operaciones astronómicas como el cálculo de la hora, la salida de determinadas estrellas…

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



5. Conclusión: una invitación al trabajo por proyectos

Como docentes nos preguntamos cómo encajar la construcción del Astrolabio Universal GeoGebra en nuestro currículo; no vamos a entrar en detalles, pero aprenderíamos trigonometría básica, resolución de triángulos, coordenadas polares, evaluación de polinomios mediante una hoja de cálculo..., cosas que, en muchos casos, cuando se aprenden *por necesidad* entran a formar parte de nuestro arsenal matemático. Sin embargo, cuando se estudian sin aplicación no se entenderá bien en qué consisten y se olvidarán enseguida.

Desearíamos que este trabajo impulsara nuevas experiencias didácticas relacionadas con la astronomía, el manejo de un astrolabio, su construcción... El aprendizaje por proyectos sería la metodología ideal; es cierto que las últimas etapas del diseño son muy elaboradas, pero es aquí donde el profesor, como director del proyecto, debería asignar tareas para cada grupo de trabajo y orientarlo adecuadamente.

Referencias bibliográficas

ISBN 978-84-945722-3-4

García Piqueras, M. (2016). *La SuperMATEsobrina y el enigma del gran astrolabio*. Tres Cantos, España: Nivola.

García Piqueras, M. (2017). El astrolabio: un instrumento del pasado para una educación de futuro fértil. *Revista Suma, 84*, 37-49.

García Piqueras, M. (2017a). Universal GeoGebra Astrolabe. *Sociedad de la Información, 57*, 1-30.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-313

ORIGAMIMAT: TALLER DE ORIGAMI PARA EL AULA DE MATEMÁTICAS

Inmaculada Conejo Pérez – María Ángeles Pérez Rojo
inmapert@gmail.com – mariange82@gmail.com
Colegio Brains (España) - Colegio Santo Domingo Savio (España)

Núcleo temático: V. Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
Modalidad: T
Nivel educativo: Secundaria
Palabras clave: Origami, Secundaria, Recurso Manipulativo, Experiencia de Aula

Resumen

La intención de este taller es promover en los asistentes interés por el origami como recurso manipulativo, que estimula la concentración, favorece la visión espacial, incentiva el uso de un lenguaje universal y promueve el afán de superación. Además, las construcciones matemáticas con origami motivan al alumnado, facilitan la comprensión de determinados conceptos, fomentan el trabajo colaborativo y la igualdad, despertando capacidades a veces ocultas en nuestros alumnos.

Además, se presenta el proyecto colaborativo ORIGAMIMAT, que pretende unificar y clasificar actividades de matemáticas, con el papel como protagonista. El blog de Origamimat pretende difundir estas actividades para uso y disfrute del profesorado de Secundaria y animarles a colaborar como autores.

En este taller práctico, veremos algunas actividades de origami desarrolladas en el aula de Matemáticas en Secundaria. Las figuras que vamos a construir en este taller han sido realizadas previamente en el aula, para trabajar conceptos del currículo oficial de Matemáticas de Secundaria.

Resumo

A intenção deste workshop é promover o interesse em participar do origami como ação manipuladora, que estimula a concentração, promove a visão espacial, incentiva o uso de uma linguagem universal e promove o desejo de excel. Além disso, construções matemáticas motivar os alunos com origami facilitar a compreensão de certos conceitos, incentivar o trabalho colaborativo e igualdade, despertando habilidades às vezes escondidos em nossos alunos.

Além disso, o projeto colaborativo ORIGAMIMAT, que visa unificar e classificar as atividades de matemática com o papel principal apresenta. Blog Origamimat visa divulgar essas atividades para uso e gozo dos professores secundários e incentivá-los a colaborar como autores.

Neste workshop prático, veremos algumas atividades origami desenvolvidos em sala de aula no Secundário Matemática. Os números que vamos construir neste workshop ter sido previamente realizada na sala de aula, para trabalhar conceitos do currículo oficial matemática do ensino médio.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

1.- Introducción

En un mundo cada vez más tecnológico, es imprescindible aprender a usar las herramientas más avanzadas para seguir innovando, pero también merece la pena recordar el placer de crear una obra propia con nuestras manos. El papel es un recurso didáctico de fácil adquisición, que alimenta el ingenio y la creatividad y favorece diversos beneficios en el aula de Matemáticas. Aprovechando el radio de difusión que nos ofrecen los blogs, se presenta ORIGAMIMAT, con actividades clasificadas por temáticas, para el aula de matemáticas, en las que el recurso utilizado es el papel. Este blog aspira a ser un espacio de colaboración entre profesores, un repositorio de actividades ya desarrolladas en el aula, para explicar conceptos matemáticos. El presente taller es una muestra de este tipo de actividades.

1.1.- Presente y origen del origami

Origami significa en japonés lo mismo que *papiroflexia* en español. En japonés la palabra origami está compuesta de dos caracteres: *ori*, que significa doblar, y *kami*, que significa papel. Papiroflexia viene de *papiro*, que significa papel, y *flexus* que viene del verbo *flectere* en latín, que significa doblar.

El origen es sin duda oriental (Beech, 2011). Aunque los primeros en fabricar en papel fueron los chinos del siglo II a.C., en realidad debemos los primeros pasos en las técnicas de plegado a la nobleza japonesa del siglo VI (Engell, 1994).

La papiroflexia llegó al mundo occidental gracias a Marco Polo en el siglo XIII (Beech, 2011). Fue introducida en España a través de la cultura musulmana, pero sin éxito (Royo Prieto, 2002). Más tarde, Miguel de Unamuno introduce la papiroflexia en España.

El mundo del origami ha sufrido una revolución desde que AkiraYoshizawa y Samuel L.Randlett introdujeron una nueva notación. Este nuevo lenguaje internacional permite difundir, desarrollar y entender los pasos a seguir para hacer una figura de origami, independientemente de las nacionalidades del emisor y del receptor.

Incorporando las matemáticas a este tradicional arte, se ha producido un gran avance en la complejidad y la aplicabilidad de las técnicas del plegado en campos tan diversos como la

ISBN 978-84-945722-3-4

ingeniería o el diseño. Así, por ejemplo, el origami computacional ha nacido desde la creación del *TreeMaker*, un algoritmo desarrollado por Robert Lang (físico estadounidense) que implementado da como output el *crease-pattern*, es decir, las líneas por las que habría que doblar para llegar al modelo que se ha solicitado. Otra evidencia es que haya un origamista trabajando para la NASA, Miura, quien ha inventado un plegado que se ha usado para construir un nuevo telescopio espacial. Curiosamente, ese plegado al fin resuelve el problema de volver a doblar un mapa.

1.2.- Ventajas del origami en el aula

Tras reflexionar sobre las aplicaciones tan amplias del origami, no es de extrañar que los profesores queramos introducir este arte en el aula. Lo que además descubrimos es que el origami desarrolla la visión espacial, favorece la concentración, el afán de superación, el gusto por la precisión y su belleza; las construcciones matemáticas con origami motivan al alumnado, facilitan la comprensión de determinados conceptos, promueven el trabajo colaborativo y la igualdad, despertando capacidades a veces ocultas en nuestros alumnos.
Por otra parte, el desarrollo de actividades con origami en el aula de matemáticas, contribuye a la adquisición de las Competencias Básicas. Es de destacar la autonomía e iniciativa personal, sobre todo a través del desarrollo de la perseverancia, la autocrítica y la creatividad, el control emocional, la tolerancia a la frustración, el aumento de autoestima y confianza en sí mismos, convirtiendo ideas en acciones.

2.- Actividades del taller

A lo largo del taller se realizan varias figuras y se muestran diferentes actividades llevadas a cabo en un aula de matemáticas de Secundaria.
Comenzamos con la explicación del lenguaje simbólico del origami y se hace una introducción al origami para los no iniciados, de manera práctica, a través de la realización de una figura sencilla. Después, se comprueban los axiomas de la geometría propia del origami y se presentan algunas actividades de aula, como una demostración visual de que la suma de los ángulos de un triángulo es 180º, otra del Teorema de Pitágoras, trazados básicos (paralela, perpendicular, mediatriz, bisectriz), puntos notables del triángulo), etc. Más tarde,

ISBN 978-84-945722-3-4

se introducen otras actividades matemáticas que, aunque no estén marcadas como objetivos en la legislación educativa, sí desarrollan otras capacidades en nuestros alumnos. Entre estas actividades, se muestran el "Día de la Paz" y la "Navidad Fractal". Terminaremos componiendo una obra de origami entre todos, de manera cooperativa. Por último, se presenta el blog ORIGAMIMAT.

3.- ORIGAMIMAT

El blog colaborativo llamado ORIGAMIMAT, tiene como objetivo convertirse en un repositorio de actividades, debidamente clasificadas por curso (nivel académico), área (geometría, álgebra, etc.) y temática (aula, día especial, etc.). Con este blog se pretende guardar en un único lugar diversas actividades realizadas con papel y que hayan sido desarrolladas en un aula de matemáticas.

Características de este blog:

- Las actividades estarán diseñadas para el aula de matemáticas, aunque habrá también actividades para días señalados, como el "Día de la Paz".
- El papel es el recurso protagonista de las actividades. Es posible que no sea origami tradicional (en el que no está permitido recortar, por ejemplo), podría ser kirigami (recortando), pero en todo caso el papel es el recurso fundamental.
- Las actividades que se exponen en el blog son experiencias de aula, es decir, ya han sido llevadas a la práctica.
- El currículo oficial está presente en las actividades, pero también otras capacidades matemáticas como la visión espacial, el razonamiento, etc.

En el blog se pueden encontrar todas las actividades realizadas durante el presente taller.

Para poder colaborar en el blog, sólo hay que enviar un correo electrónico, con la propuesta, a la dirección de correo electrónico: matesyorigami@gmail.com, o a la dirección buenaspracticas@fespm.es. Todos los envíos serán respondidos y valorados. Invitamos a todos a participar.

ISBN 978-84-945722-3-4

Referencias bibliográficas

Beech, R. (2011). *Enciclopedia del Origami.* Madrid: Libsa.

Engell, P. (1994). *Origami:from Angelfish to Zen.* New York: Dover.

Garrido, M. B. (2015). *Orisangakus.* Madrid: RSME y SM.

Hull, T. (2013). *Project Origami* . Boca Ratón: CRC Press.

Royo Prieto, J. I. (2002). Matemáticas y papiroflexia. *Sigma 21*, 175-192.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-331

TARJETAS INTERACTIVAS, UN REGALO PARA EL AULA DE MATEMÁTICAS.

Eva M Perdiguero Garzo
empgmate@gmail.com
IES Ribera del Bullaque. Porzuna. Ciudad Real. España.

Núcleo temático: V. Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
Modalidad: T
Nivel educativo: Medio o Secundario (12 a 15 años)
Palabras clave: Innovación, Creatividad, Interactividad, Autoestima.

Resumo

Con simples folios de papel blanco o de colores y cuadrados de notas, se pueden elaborar tarjetas interactivas que encierran contenidos tratados en clase y que los alumnos descubren como si fueran regalos para ellos. En cada uno de estos regalos se plasma la idea más importante de una unidad vista en clase y queda expuesto en clase para que los alumnos puedan contemplar dichos trabajos en su aula o bien forme parte de su cuaderno.
Como resumen de un tema se elaboran carpetas interactivas donde el alumno no sólo es su creador sino que además, puede descubrir el trabajo de sus compañeros al intercambiar sus carpetas y de este modo volver a repasar todo lo visto en clase. Las carpetas contienen actividades que se abren y cierran, sobres con pequeñas fichas de juegos creados por los propios alumnos, todo es interactivo para provocar al usuario su interés y su necesaria intervención.
Con este tipo de material se pretende conseguir un nuevo recurso para que el alumno se sienta atraído por él y participe de forma activa en su aprendizaje.

Es importante buscar nuevas formas de presentar los contenidos a nuestros alumnos, buscando su interactividad y participación en su aprendizaje.

<u>Contenidos que se van a desarrollar.</u>

Cualquiera correspondiente a la programación de ESO.

<u>Grado y nivel educativo.</u>

Cualquier curso de la ESO.

Desarrollo del trabajo.

ISBN 978-84-945722-3-4

Tras haber llevado a cabo la experiencia de la elaboración de tarjetas, cuadernos y carpetas interactivas. Me gustaría realizar un taller donde enseñar a mis compañeros docentes cómo poder realizar la misma experiencia.

Marco teórico en el que se desarrolla la experiencia: LOMCE.

La elaboración de este material contribuye al desarrollo de las siguientes competencias:

- Competencia en comunicación lingüística:
  Los alumnos exponen sus trabajos y organizan su pensamiento.
- Competencias sociales y cívicas:
  Los alumnos trabajan en pares o en grupos, debiendo tenerse respeto mutuo.
- Competencia de aprender a aprender:
  Los alumnos inician, organizan y desarrollan su aprendizaje.
- Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor:
  Los alumnos tienen que transformar sus ideas en acciones.
- Competencia matemática:
  Es inherente a la realización del material, ya que los contenidos son los correspondientes a cualquier programación de matemáticas de cualquier curso de la ESO.

Productos que se quieren elaborar en el taller.

- Tarjetas murales

  TARJETAS - REGALO

ISBN 978-84-945722-3-4

Las tarjetas que parecen regalos, al abrirse quedan desplegadas en murales que se exponen en clase mostrando su regalo (que es una idea o contenido) que el alumno necesita recordar.


Así quedan expuestas en clase, en el rincón matemático.
El vídeo donde se puede ver cómo se abre interactuando con la tarjeta se puede visionar en la dirección: https://youtu.be/RbGQ_HbfVzE

Recursos necesarios para la elaboración de estas tarjetas:
Tres folios de color o blancos para recortar tres cuadrados que se intercalan pegándose. Colores bien rotuladores, lapiceros o ceras.

TARJETAS – ESTRELLA.


Reparte las estrellas con problemas resueltos pero sin enunciados, la pareja de alumnos tiene que inventar ese enunciado y después, explicarlo y resolverlo a la clase. A nivel individual se pueden crear estrellas con un solo triángulo que pueden pegarse en el cuaderno conteniendo una actividad que se quiera resaltar de una unidad.

El vídeo donde podéis ver más de cerca estas estrellas es: https://youtu.be/W7P_3ZUn6-k

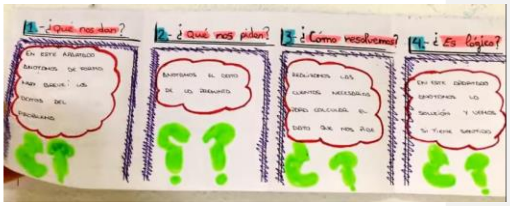
VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Recursos necesarios para la elaboración de estas tarjetas:

Para las más grandes, tres folios de un color y otro de otro color diferente. Para las pequeñas que se pegan en el cuaderno un folio Din-A4

TARJETA – LIBRO

La resolución de problemas a determinadas edades tempranas supone un obstáculo a veces, difícil de superar. Probemos nuevas formas de mostrar estos problemas y tratemos de visualizar su procedimiento de resolución a través de este material.



Al ir desplegando el "libro" vamos descubriendo cómo se resuelve cualquier problema que nos presenten.

Sigue habiendo espacio para resolver cada alumno su problema. Luego se exponen en clase.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

En el cuaderno quedan como se ve a continuación.

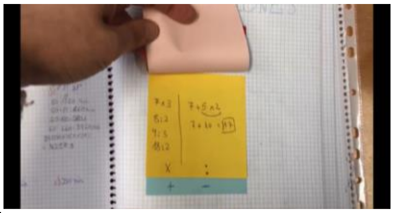
 

El vídeo con el desarrollo del plegado se puede ver en el siguiente enlace: https://youtu.be/TzTJgTlEGlo

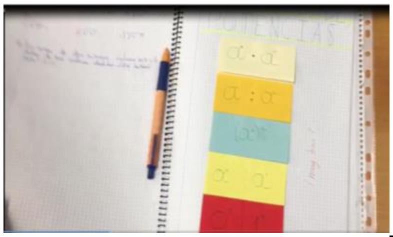
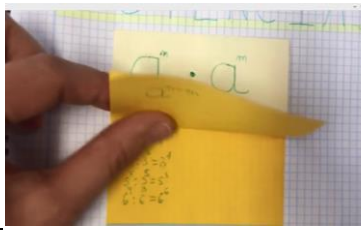
Recursos necesarios para la elaboración de estas tarjetas:
Un folio blanco con el modelo dado por el profesor fotocopiado, para los "libros" que se pegan en el cuaderno. Y un Din-A3 para los que se exponen en la pared.

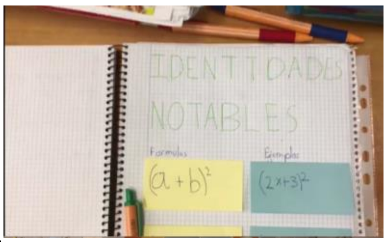
- Cuadernos interactivos

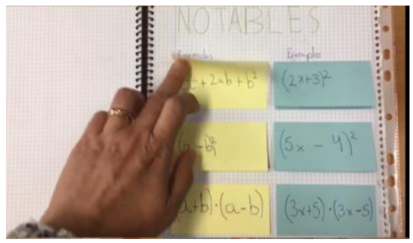
En los cuadernos además de escribir se pueden crear nuevos espacios donde los alumnos puedan manipular sus ideas, representar los pasos de un algoritmo o procedimiento,… Además de dar un toque de color a sus contenidos.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4





El vídeo con más detalles sobre este material se puede visionar en: https://youtu.be/21Ie1zBegaU

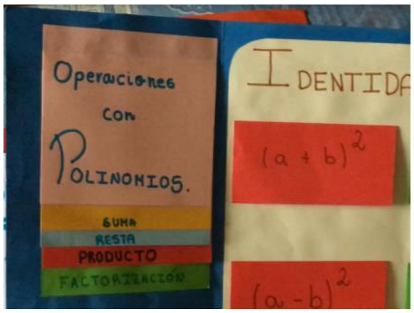
Recursos necesarios para la elaboración de los cuadernos interactivos:
Notas de papel de colores, preferiblemente que no lleven pegamento, es decir, que no sean post-it.

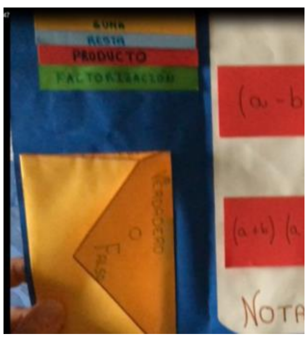
- Carpetas interactivas

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Por último estas carpetas resumen todos los contenidos de una unidad didáctica. Aquí podemos apreciar el interior de estas carpetas.





El interior está lleno de color, de ventanas que se abren, sobres con actividades, y contenidos por descubrir por parte de la persona que lo abre por primera vez.

El sobre contiene fichas con actividades que pueden ser verdaderas o falsas. En la parte posterior se pondrá si es verdadero o falso con un tono muy claro para evitar que se transparente.

El sobre contiene, también, fichas con actividades que sean muy rápidas y sencillas de resolver y cuya respuesta se da en la parte posterior de la ficha.

El vídeo con todos los detalles de esta carpeta se puede visionar en: https://youtu.be/WodbJvX-_Ys

ISBN 978-84-945722-3-4

Recursos necesarios para la elaboración de las carpetas interactivas:

Carpetas de cartón o también de papel. Folios de colores. Notas cuadradas de colores. Modelo para el sobre y el bolsillo. Modelo para las fichas de papel y la rueda.

.

Referencias en Internet.

No conozco ni he utilizado ningún libro para buscar información sobre este tipo de material, ya que actualmente y a través de internet puedes obtener mucha información sobre el trabajo realizado por otros compañeros de cualquier parte del mundo. Sin embargo, tengo que mencionar algunas de las páginas y recursos en internet gracias a los cuales he podido conocer cómo realizar todos estos materiales.

Pinterest

Tableros creados donde recojo la información compartida por otros profesores de todo el mundo.

- Lapbooks. Ideas foldables. https://es.pinterest.com/evamate13/lapbooks-ideas-foldables/
- Lapbooks templetes. Imprimir. https://es.pinterest.com/evamate13/lapbooks-templetes-imprimir/

Youtube

Canales que me inspiran y me ayudan a realizar algunos de los modelos de tarjetas que he mostrado.

- Canal de manualidades y DIY. Craftingeek. https://www.youtube.com/channel/UCXnBB3IuuXAH2kDr69-632A
- Canal educativo del maestro, Javier Caboblanco. https://www.youtube.com/channel/UCx8RDR6mVGo4khjyj4cwa6Q

Páginas web.

- Página web de la profesora de matemáticas Sarah Carter de Drumright (Oklahoma – USA) http://mathequalslove.blogspot.com.es/
- Teachers Pay teachers. Comunidad de millones de educadores que comparten o venden materiales realizados por ellos mismos. Además comparten ideas y experiencias. https://www.teacherspayteachers.com/Store/Got-To-Teach

ISBN 978-84-945722-3-4

- Homeschool Share (HSS) es un esfuerzo cooperativo en línea de varias madres que trabajan en el hogar para proporcionar estudios y recursos gratuitos pero de calidad. http://www.homeschoolshare.com/lapbooking_resources.php
- Scaffolded Math and Science es una página de una profesora de matemáticas de Massachusetts, entusiasta de su trabajo comparte ideas y actividades. http://scaffoldedmath.blogspot.com.es/

ISBN 978-84-945722-3-4

T-337

Una experiencia de cualificación y acompañamiento a docentes de matemáticas en el diseño de secuencias didácticas para el desarrollo de competencias matemáticas en sus estudiantes

Ligia Amparo Torres Rengifo - Cristian Andrés Hurtado Moreno
ligia.torres@correounivalle.edu.co – cristian.hurtado@correounivalle.edu.co
Universidad del Valle, Cali, Colombia – Universidad del Valle, Cali, Colombia

Núcleo temático: Formación del profesorado en Matemáticas
Modalidad: Taller (T)
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: Formación de maestros de matemáticas, secuencias didácticas, recurso pedagógico

Resumen

Este taller presenta la experiencia y algunos resultados del Programa de cualificación y acompañamiento a docentes de matemáticas en el diseño de secuencias didácticas para el desarrollo de competencias matemáticas en sus estudiantes, realizado durante dos años y medio en el Valle del Cauca, Colombia, entre la Universidad del Valle y la Fundación de Energía del Pacífico – EPSA; cuyo propósito fundamental fue aportar elementos conceptuales y procedimentales a maestros de matemáticas de la Educación Básica y Media de la región para el diseño de secuencias didácticas como recurso pedagógico para el trabajo de aula.

En este taller se interactúa con los participantes, así: en un primer momento, se hará una presentación general del programa desde sus referentes teóricos y metodológicos, y se abordarán los talleres curricular y didáctico trabajados en la propuesta de formación. En un segundo momento, se realizarán otros talleres sobre aspectos matemáticos, de recursos y gestión del maestro, que hacen parte de la propuesta; finalmente se presentan algunos resultados del trabajo realizado con los maestros: compilaciones de las secuencias didácticas, relatos de la experiencia vivida y material audiovisual. Con todo esto se espera reflexionar con los asistentes sobre las potencialidades y limitaciones de esta propuesta de formación.

Planteamiento del problema y antecedentes

En Colombia a pesar de los múltiples esfuerzos gubernamentales, manifiestos en reformas educativas, por mejorar la calidad de la enseñanza de las matemáticas y por ende el aprendizaje de los estudiantes en este campo, no han sido posible cambios fundamentales que permitan un desarrollo de pensamiento matemático en su población. Es decir, que el gran

ISBN 978-84-945722-3-4

reto de las reformas educativas que es, fundamentalmente, alcanzar las metas y propósitos que ellas se plantean, haciendo viable las políticas de mejoramiento de la enseñanza; no puede decirse que esta haya sido propiamente la característica en nuestro país. Las reformas no han podido ser ni efectivas, ni realistas. Es así, como desde el campo de la Educación Matemática, por la acción de distintos colectivos de docentes, matemáticos y profesionales vinculados con la educación, en el ámbito nacional e internacional, se ha hecho fundamental reflexionar sobre otros horizontes conceptuales distintos a las clásicas reflexiones sobre las prácticas pedagógicas y encarar con sentido práctico el mejoramiento de las prácticas educativas y de formación matemática en las instituciones educativas. Lo que se trata entonces es de plantear elaboraciones teóricas y pragmáticas más satisfactorias sobre naturaleza y la función de las prácticas pedagógicas de los maestros en el ámbito escolar y extraescolar, donde hay actividad matemática. Por ejemplo, que la enseñanza y el aprendizaje de saberes matemáticas no puede entenderse al margen de un contexto sociocultural, de la naturaleza de la disciplina, de las mediaciones tecnológicas o de diferente naturaleza, del lenguaje natural, entre otros aspectos. En esta línea de trabajo, un grupo de docentes y estudiantes de la maestría en Educación, con énfasis en Educación Matemática, de la Universidad del Valle y la Fundación de Energía del Pacifico – EPSA, se plantearon el reto de asumir la formación de dos grupos de maestros de los municipios de Guacarí y Roldanillo, del departamento del Valle del Cauca, a través de un proceso que involucró varias fases. En la primera, a través de un diplomado se aportaron elementos conceptuales y metodológicos para, que a partir de un problema particular que ellos identificaron de enseñanza o aprendizaje de las matemáticas, lo documentaran desde perspectivas como la curricular, didáctica, matemática y de recursos, para articularlas en una secuencia didáctica como propuesta de aula. En la segunda fase, se acompañó a los maestros en la implementación de la propuesta en un curso particular, reflexionando sobre la gestión del maestro, la toma de registros, la organización de las aulas, entre otros aspectos ligados al proceso de la actividad matemática en el aula. Además, se reflexionó constantemente sobre lo ocurrido en el aula y se fue sistematizando el proceso. Esta fase termina con el diseño de una nueva propuesta de aula o secuencia didáctica. En la tercera fase, se implanta la nueva propuesta, se analizan los registros de los estudiantes y se sistematiza el proceso en una producción escrita, en la cual se compilan las secuencias didácticas y los relatos o crónicas de los maestros sobre el proceso. En la última fase se trabajó, ya no por problemáticas específicas sobre la enseñanza de un concepto o procedimiento particular de las matemáticas escolares, sino con todos los docentes de matemáticas participantes del proceso, por institución educativa, para generar un plan de acción que posibilitará la sostenibilidad del proceso de formación continuo y el trabajo colaborativo institucional, inscribiéndolo en el Proyecto Educativo Institucional y en la propuesta formativa de la institución, del área de matemáticas.

En este taller, se abordan algunos aspectos del proceso formativo, fundamentalmente lo relacionado con la primera fase y algunos resultados obtenidos.

Algunos elementos teóricos de referencia

Este trabajo se inscribe en el campo relacionado con la formación de profesores de matemáticas, en el cual se considera la práctica pedagógica como elemento fundamental de reflexión y análisis, las secuencias didácticas como mediaciones para la formación de los estudiantes y como guía para la reflexión de los maestros, y la gestión del maestro como dinamizador de la actividad matemática de aula.

El campo en el cual se sitúa este trabajo ha sido foco de interés para la investigación en Educación Matemática durante las últimas décadas (Gómez, 2007; Lupiañez 2009), motivo por el cual es necesario hacer explícito la posición que se asume frente a la formación de profesores de matemáticas. Se entiende, en este sentido, que esta formación se relaciona con una intervención orientada por propósitos que persigue promover el aprendizaje de los profesores, lo que incluye todas las formas de preparación de su desarrollo profesional tales como: el perfeccionamiento de sus creencias, su conocimiento (didáctico y matemático) y su práctica, así como el aumento de su identidad como profesores de matemáticas, y, lo más importante, contribuir al desarrollo efectivo y cognitivo de sus estudiantes (Krainer, citado por Lupiañez, 2009). Esta conceptualización parte de reconocer los bajos desempeños de los estudiantes en este campo y su posible relación con la baja calidad de la enseñanza, y por consiguiente, de la formación de profesores encargados de agenciarla (Gómez, 2007). Este referente es un punto de partida para la reflexión y acciones de la propuesta.

En concordancia con lo anterior, la práctica pedagógica se asume como la expresión contemporánea para denominar el oficio de enseñar. Según Araceli de Tezanos (2016) la

ISBN 978-84-945722-3-4

emergencia de esta noción, devuelve por una parte, la posibilidad de discusión sobre el enseñar, entendido como el oficio de los maestros responsabilizados históricamente por la sociedad, de contribuir al desarrollo de competencias cognitivas y sociales que abren el camino para la apropiación y transformación de la cultura a las nuevas generaciones, en este caso a la cultura matemática. Asimismo, permite actualizar y poner nuevamente en acción la discusión sobre los elementos constitutivos que dan significado y sentido al enseñar, dando cuenta de la gran cantidad de acontecimientos presentes en acto de enseñar, como práctica social específica, que responde a la demanda de construcción de saber pedagógico, ante la reflexión crítica personal y colectiva del hacer del maestro expresado en la escritura. Por lo tanto la reflexión sistemática sobre la práctica, es un elemento fundamental en la formación de profesores, tal como se asume en este trabajo. Es decir, se construye saber pedagógico, en el espacio y tiempo real en el cual los profesores de matemáticas, diseñan o preparan sus propuestas de aula, las desarrollan o implementan, valoran el trabajo y los aprendizajes de sus estudiantes, toman en cuenta el contexto en el cual llevan a cabo su quehacer, emplea materiales o mediaciones, entre otros aspectos.

Es así, como la secuencia didáctica se entiende aquí, inicialmente, como lo plantean Guerrero, Sánchez y Lurduy (2006) como el plan de actuación del profesor y que corresponde a lo que Llinares (1991) denomina la fase preactiva, donde se explicitan aquellos aspectos del sistema didáctico fundamentales a toda acción de enseñanza y aprendizaje; la secuencia didáctica es un aspecto central de la metodología de la Ingeniería didáctica necesaria para estructurar el trabajo de aula de manera sistemática, en la relación estudiante, profesor, saber y entorno (relación didáctica). Pragmáticamente, un plan de actuación del profesor es en este sentido, una manera de entender la secuencia didáctica como la operativización de la relación didáctica, sustentada a partir de poner en momentos claramente diferenciados la construcción del significado matemático por parte del profesor y los estudiantes, los roles (compromisos y responsabilidades del estudiante y el profesor), la organización de aula (formas de trabajo), el tiempo requerido para su implementación (se refiere al tiempo didáctico), la descripción de la actividad (intención de la actividad, explicitar en que consiste), los materiales didácticos y los referentes teóricos para la actividad.

En este trabajo, se especifica esta conceptualización, teniendo en cuenta que una secuencia didáctica, como plan de actuación, está conformada por situaciones problema

ISBN 978-84-945722-3-4

contextualizadas, tareas o actividades y preguntas, mediadas por materiales y herramientas como mediaciones en el aprendizaje y fundamentada desde las perspectivas, curricular, didáctica, matemática y de recursos.

Todo lo anterior, permite articular la idea de la formación del profesor de matemáticas, la práctica pedagógica y la actividad matemática de aula.

Metodología y propósitos del taller

Para el desarrollo de este taller, cuyo propósito fundamental es interactuar con los asistentes a él a partir de las experiencias logradas por sus autores en el Programa de Cualificación y Acompañamiento de Maestros de Matemáticas, se tienen en cuenta seis momentos. En el primero de ellos se presenta el Programa desde sus aspectos generales, esto es: su propósito, en qué consiste, la metodología empleada para su desarrollo y algunos de los referentes conceptuales que los sustentan; para ello se emplean 20 minutos. En los 30 minutos siguientes, segundo momento, se comparte con el público asistente los tres primeros talleres que hacen parte de la primera fase del Programa de Formación, los cuales versan sobre: las experiencias de los maestros en torno a problemáticas específicas que se les presenta para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en sus aulas, lo que permite delimitar grupos de trabajo en relación con un tema matemático de interés para ellos y abordar su estudio en lo largo del Programa; las perspectivas curricular y didáctica del tema objeto de interés para los maestros; y la importancia de abordar recursos pedagógicos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, especialmente para el tema seleccionados por ellos. Después de la presentación de los tres talleres se realiza en unos 10 minutos una reflexión sobre ellos, centrando la atención en su pertinencia de acuerdo con los objetivos trazados en el Programa, siendo este el tercer momento.

De manera análoga a los dos momentos anteriores, se presenta a los asistentes los tres últimos talleres que hacen parte del Programa de Cualificación, con los cuales se pretende considerar la perspectiva matemática del tema objeto de estudio para los maestros; analizar propuestas

ISBN 978-84-945722-3-4

de aula que aborden su enseñanza y aprendizaje de tal modo que puedan ser tomadas como puntos de partida para hacer rediseños o diseños de las propuestas propias; y finalmente, iniciar con el diseño de la secuencia didáctica de cada grupo, para lo cual se tiene en consideración todos los elementos construidos a lo largo de los cinco talleres anteriores. Esto último junto con la reflexión de estos tres talleres en relación con su pertinencia dentro del Programa son el cuarto y quinto momento del desarrollo de este taller, para lo cual se emplean 30 y 10 minutos respectivamente.
A modo de cierre, y como último momento, se presentan algunos resultados que derivan de la ejecución del Programa tales como: algunas de las secuencias didácticas re-diseñas por los grupos de maestros participes de él, y algunos relatos, tanto de manera escrita como audiovisual, de las experiencias vividas por ellos al interior de este, lo que deja ver el impacto que el Programa tuvo para sus formaciones.

Desarrollo y configuración de los talleres del programa de formación

Tal y como ya se ha indicado, el propósito de este taller es presentar a sus asistentes la experiencia de un Programa de Cualificación de Maestros de Matemáticas realizado en el Valle del Cauca, Colombia. Para esto se decide, como parte de dicha presentación, exponer los talleres (seis en total) que en la primera fase del Programa se abordan con los maestros que participaron de él, con el fin de valorar con los asistentes su pertinencia, y en general las potencialidades y posibles limitaciones de la propuesta de formación.

Así, el taller 1, *Compartiendo experiencias y problematizando una temática de aprendizaje de las matemáticas*, tiene dos objetivos fundamentales: el primero, generar una reflexión amplia sobre los propósitos actuales de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en contraste con los planteados hace varias décadas, así como el papel de las escuelas, y por tanto de los maestros, en la necesidad de construir sujetos autónomos y con capacidad crítica para comprender el mundo que lo rodea y poder intervenir en él; para lo cual se toma como insumo el video *El sistema educativo es Anacrónico* de la página web de *Redes para la Ciencia*. El segundo objetivo del taller es de delimitar un tema matemático de interés para los maestros sobre el cual emprendan su estudio para el posterior re-diseño de secuencia didáctica en torno a él, para ello se parte de las experiencias vividas por los maestros en sus

ISBN 978-84-945722-3-4

práctica de aulas, especialmente de las problemáticas que experimentan a la hora de enseñar matemáticas en sus escuelas, y las que perciben en sus estudiantes en el momento de aprenderlas.

El taller 2, *Documentando la problemática: perspectiva curricular y didáctica*, se encuentra configurado por tres partes, en la primera se propone realizar una conceptualización con los maestros sobre los términos dificultad, obstáculo y error a la luz de la investigación en Educación Matemática, para lo cual se toma como insumo los planteamientos realizados por Socas (1997). Esto con el fin de evidenciar que muchas de las problemáticas que ellos vivencian en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas no son de la misma naturaleza, por lo que las intervenciones que se hagan sobre ellas pueden o no ser diversas. En la segunda parte se expone algunos elementos de orden curricular que se consideran calves para el diseño de las secuencias didácticas, los cuales se proponen desde dos documentos de política pública nacional Colombiana: los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006). La tercera parte de este taller busca que los maestros reflexionen sobre la propuesta curricular realizada en los documentos mencionados, particularmente sobre los modos de pensamiento matemático asociados con el tema de su interés en el Programa (numérico, variacional, métrico, espacial o aleatorio) y sobre su gestión en el aula para el desarrollo de estos pensamientos. Finalmente, en la última parte se propone analizar un texto escolar en donde se presente la enseñanza del tema objeto de estudio por cada grupo de profesores.

Por su parte, el tercer taller tiene dos propósitos fundamentales, estos son, abordar la idea de recurso pedagógico para reflexionar sobre la importancia y pertinencia que tienen dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje, para lo cual se considera el documento de Garzón y Vega (2011), y desarrollar algunas actividades prácticas en las que se ponga en juego esta idea, particularmente el uso de materiales en tanto recursos pedagógicos, para el desarrollo de pensamiento matemático en los estudiantes.

El cuarto taller, *Documentando la Problemática - Perspectiva Matemática*, tiene como propósito fundamental analizar el tema que cada grupo de maestros seleccionó de interés desde una perspectiva matemática. Así, se propone analizar los conceptos y procedimientos que involucra el tema para ganar una claridad conceptual sobre ellos, y sobre las propiedades que intervienen en los procedimientos o cálculos que cada uno permite desplegar. Además

ISBN 978-84-945722-3-4

de esto, poder establecer relaciones o articulaciones entre unos y otros, de tal modo que se reconozca que en la enseñanza de un tema o concepto matemático necesariamente se movilizan nodos o núcleos temáticos, por lo que abordar la enseñanza de las matemáticas supone cierta complejidad en la que unos y otros conceptos no se pueden ni deben desligar.

Para el desarrollo del quinto taller, a cada grupo de maestros se les entrega una secuencia didáctica ya diseñada y que tenga relación con el tema que abordan, esto con el propósito que la analicen a la luz de elementos de orden curricular, didáctico y matemático que en los talleres anteriores se habían presentado. De este modo, se propone desde la perspectiva curricular, analizar, por ejemplo, el tipo de contextos en los que se presentan los problemas de la secuencia, los procesos generales de aprendizaje que se movilizan (razonamiento, comunicación, modelación, entre otros), así como los estándares a los que sea apunta con ella; desde lo didáctico, el tipo de materiales y recursos que se requieren para su puesta en escena y la manera como ellos intervienen, en el sentido de identificar qué se gana con su presencia en la secuencia; y desde lo matemático, los conceptos y procedimientos que se movilizan en ella. Este análisis se realiza con el fin de que los maestros tengan elementos de partida para el diseño o rediseño de sus propias secuencias de aula.

Finalmente, con la puesta en escena del sexto taller se espera dar inicio al re-diseño de las secuencias didácticas de los grupos de maestros. Para ello, cada grupo debe delimitar el conjunto de actividades o tareas que se les propondrá a los estudiantes para el aprendizaje del tema de interés a partir de unos objetivos trazados, objetivos que deben considerar las tres perspectivas estudiadas a lo largo de los talleres anteriores, a saber: delimitar los aspectos curriculares, didácticos, matemáticos y de recursos que se movilizarán en sus propias secuencias didácticas.

Referencias bibliográficas

Garzón, D. & Vega M. (2011). Los recursos pedagógicos en la enseñanza de la geometría. XIII Comité Interamericano de Educación Matemática. Brasil: CIAEM

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España.

ISBN 978-84-945722-3-4

Guerrero, F., Sánchez, N., y Lurduy, O. (2006). La práctica docente a partir del modelo DECA y TSD. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *23* (3), 235-238.
Llinares, S. (1991): *La formación de profesores de matemáticas*. GID, Universidad de Sevilla.
Lupiáñez, J. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España.
MEN (1998). Lineamientos curriculares de matemáticas. Bogotá: Editorial Magisterio.
MEN (2006). Estándares básicos de competencias. Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá: Editorial Magisterio.
Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.
Tezanos, A. (2016). Formación de maestros: Los conceptos articuladores del diseño curricular. Educación y Cultura. Revista, 113, 8 – 18. Fecode. Bogotá

ANEXOS:
ANEXO 1: LOS TALLERES DE LA PRIMERA FASE DEL PROGRAMA DE FORMACIÓN

TALLER 1: Compartiendo experiencias y problematizando una temática de aprendizaje de las matemáticas

Parte A: Discusión y reflexión acerca del video de Redes *"El sistema Educativo es Anacrónico*[1]*"*

Parte B: Teniendo en cuenta su experiencia docente y su formación profesional conteste las siguientes preguntas con la mayor precisión posible:

1. Ubique un nivel o curso específico y enuncie por lo menos 4 problemáticas que usted ha detectado en la enseñanza de la aritmética, la geometría o el álgebra en la escuela.
2. Indique algunas dificultades particulares que ha detectado en el aprendizaje de los estudiantes, del nivel escogido, con relación a un tema particular de la aritmética, la geometría o el álgebra.

[1] Disponible en *Redes para la ciencia*, video No 87, http://www.redesparalaciencia.com/4593/redes/redes-87-el-sistema-educativo-es-anacronico

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

3. Enuncie algunas razones o causas que considera son las que detonan las dificultades antes anotadas.
4. Exponga por lo menos 3 alternativas que podrían ayudar para que los estudiantes enfrenten o superen las dificultades indicadas.
5. Indique un problema asociado con los procesos de enseñanza o aprendizaje de las matemáticas en la escuela que le gustaría abordar de forma específica en el presente Diplomado.

TALLER 2: Documentando la Problemática - Perspectivas Curricular y Didáctica

Parte A: Socialización de los conceptos de obstáculo, dificultad y error en matemáticas (ejemplos y reflexiones) con referencia al documento *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria (Socas, M., 1997),*

Parte B: Presentación de los referentes conceptuales de los Lineamientos Curriculares en Matemáticas y Estándares Básicos de Competencias. Discusión y reflexión.

Parte C: Teniendo en cuenta los apartados que tienen a disposición de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas, junto con su experiencia docente y su formación profesional, conteste las siguientes preguntas con la mayor precisión posible:

1. Caractericen el Pensamiento numérico, variacional u otro, según el tema a trabajar.
2. Ubiquen las orientaciones (conceptuales, metodológicas) que estos documentos presentan para desarrollar el tema o contenido matemático que han escogido para trabajar con sus estudiantes.
3. Identifiquen algunas actividades sugeridas en estos documentos para realizar la actividad en el aula sobre el tema en cuestión.
4. Contrasten la propuesta de enseñanza que ustedes realizan sobre el tema, con lo propuesto en los documentos oficiales del MEN y saquen algunas conclusiones al respecto.

Parte D: Tomen en consideración uno o dos de los textos que usan en la enseñanza de los contenidos matemáticos a tratar en el equipo de trabajo, identificando la(s) unidad(es) donde se trabaja el tema en el texto. De igual manera realice una ficha técnica del libro de texto (nombre, editorial, autor(es), año de publicación, etc.).

1. Describan la manera cómo el texto presenta el tema objeto de estudio (a partir de ejemplos, definición, situación problema).
2. Analice el tipo de problemas propuestos a los estudiantes (problemas cotidianos, otras disciplinas).
3. Explique el papel que juegan las distintas representaciones en la presentación del tema de estudio (tablas, lenguaje natural, lenguaje matemático-simbólico, diagramas, etc.).

ISBN 978-84-945722-3-4

4. Contraste y escriba una postura crítica acerca de la propuesta que presenta el libro de texto y lo propuesto en los Estándares Básicos de Competencias, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y la propuesta de sus instituciones, acerca del tema de estudio.

TALLER 3: Los recursos pedagógicos en la educación matemática

Parte A: Se propone realizar la lectura *Los recursos pedagógicos en la enseñanza de la geometría* de Garzón y Vega (2011) y ver el vídeo *Las clases de matemáticas necesitan un cambio de imagen* Meyer (2010), y A la luz de la lectura y el video, discutir:

1. Según el texto escrito ¿Qué se entiende por recurso pedagógico y qué diferencia hay con la idea de material?
2. Describa 2 elementos del video que le parecieron importantes y justifique.
3. ¿Qué importancia tienen los recursos pedagógicos al interior de sus instituciones educativas y por qué resulta trascendente diferenciarlos de los materiales?

Parte B: Se propone evidenciar algunos escenarios en los cuales pensar la noción de recurso pedagógico para ello se desarrollan distintas tareas. A pesar de que cada tarea puede dar lugar a una reflexión extensa, interesa en esta primera aproximación ver lo que tienen en común al examinarlas en conjunto, para la cual se te pide que resuelvas cada una de ellas:

a. Doblado de papel. Encuentra una manera de dividir en dos partes iguales una hoja de papel rectangular. Determinar cuál es la intención de la actividad propuesta.
b. Calculadoras: resuelvan las siguientes situaciones con una calculadora de tienda y luego examinen cómo dichas situaciones pueden llegar a convertirse en un verdadero recurso pedagógico:
    - Situación 1: Calculen el residuo de la siguiente división utilizando sólo la calculadora. (no se puede emplear lápiz y papel). 115.298 ÷ 357.
    - Situación 2: Utilizando sólo la calculadora resuelvan las siguiente suma de fracciones: 1/2 + 2/5
    - Realiza la siguiente construcción en el programa GeoGebra: construye dos rectas que sean perpendiculares. Coloca el valor de los 4 ángulos donde se intersecan las 2 rectas y muévelas para ver qué sucede. ¿Por qué puede ser importante mover las rectas? ¿Hay alguna diferencia si realizamos esta construcción con lápiz y papel?
c. Modificación de la Carrera al 20: Juega con un compañero la carrera al 20 e intenta encontrar la forma de ganar siempre con los siguientes cambios en las reglas: La cantidad de fichas iniciales debe ser 30 y en cada turno se puede sacar 1, 2 o 3 fichas.

Reflexión final: En su Institución educativa ¿Cuál es el papel que deberían jugar los recursos pedagógicos dentro de las propuestas de enseñanza y aprendizaje?

TALLER 4: Documentando la Problemática - Perspectiva Matemática

ISBN 978-84-945722-3-4

Parte A: Teniendo en cuenta cada uno de los contenidos matemáticos, objeto de estudio, en cada uno de los equipos de trabajo, su experiencia docente y su formación profesional, conteste las siguientes preguntas con la mayor precisión posible:

1. Realicen un listado de conceptos, procedimientos (algoritmos) y representaciones asociados al contenido matemático en discusión.
2. Explique su interpretación o comprensión sobre el contenido matemático objeto de estudio. Ejemplo: ¿Qué entiende por multiplicación en N?, ¿Qué entiende por función?, etc.
3. Organicen los elementos del listado anterior, en un mapa conceptual, cuadro sinóptico o red conceptual (Ver en anexo, ejemplos). Expliquen las relaciones e interrelaciones determinadas en la Red.
4. Escriban cómo abordarían estos conceptos a través de una secuencia de tareas; específicamente, qué orden le darían a cada uno de los elementos listados en el numeral 1, en procura de aproximarse al contenido o tema o concepto principal de interés para cada equipo.
5. Escriban las dificultades, desde lo conceptual, para abordar el tema en cuestión. En esta parte no solo listen los aspectos asociados al aprendizaje del estudiante, sino también, aquellas dificultades que ustedes como profesores tienen en relación con la falta de documentación matemática y/o didáctica al momento de enseñarlos (tengan en cuenta cada uno de los conceptos que ustedes listaron en el numeral 1).

TALLER 5: Selección de situaciones y actividades – elementos para el re-diseño de las Secuencias Didácticas.

Teniendo como referencia la secuencia didáctica propuesta para cada grupo, desarrolle los siguientes ítems:

1. Determinen los contenidos matemáticos (definiciones, interpretaciones de los conceptos, etc) que se propone movilizar las actividades o tareas de la Situación 1, de la secuencia.
2. Enuncien los procesos generales y desempeños (Habilidades) que se propone desarrollar en los estudiantes, con la Situación 1 de la secuencia.
3. Caracterice el tipo de materiales y herramientas que están mediando la construcción del concepto o procedimiento que propone la Situación 1, de la secuencia.
4. Analice el tipo de contexto en el que se presenta la Situación 1 de la secuencia para la construcción del concepto abordado en ella.
5. Indique los Estándares que tienen relación con la secuencia, de acuerdo al nivel para el cual se propone.

ANEXO 2: FICHA DE REFLEXIÓN CON LOS ASISTENTES

5. Enuncie los aspectos relacionados con la formación de profesores, que consideran, se ponen en juego a través de los talleres 1 y 2.

6. Indiquen la pertinencia de los contenidos y actividades planteadas a los maestros de matemáticas, en el taller 3. Justifique su respuesta.

ISBN 978-84-945722-3-4

7. Escriba algunas observaciones sobre la pertinencia de las actividades de los talleres 4 y 5 como elemento para introducir y guiar el diseño o rediseño de propuestas de aula.

8. De acuerdo a la exposición sobre la propuesta de formación y las actividades de los talleres, haga un breve escrito sobre las potencialidades y limitaciones de esta propuesta.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-344

MIRAR, SENTIR, PENSAR Y CREAR
DESARROLLO DE HABILIDADES BÁSICAS A TRAVÉS DEL ESTUDIO GEOMÉTRICO DE MOSAICOS

Miryam Judith Mazzitelli

miryamjmm@hotmail.com

Instituto Nacional Superior del Profesorado Técnico (UTN) - Argentina

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Secundario (12 a 15 años)

Núcleo temático: Matemática y su integración con otras áreas

Palabras clave: Geometría - Mosaicos-Habilidades geométricas-Niveles de comprensión

Resumen

Al enfrentarse con el aprendizaje de la geometría, el estudiante debería pasar por etapas muchas de las cuales deberían ser experiencias "sensibles, visuales y táctiles" (Alsina, 1995, p.90) que impulsarán luego posteriores abstracciones. Asimismo, Bressan (2005) expresa que el estudio de la geometría debe orientarse al desarrollo de habilidades específicas de acuerdo a los contenidos que se plantee enseñar. Articulando ambas posiciones, proponemos en este taller un espacio de trabajo con una secuencia didáctica para estudiar niveles de comprensión alcanzados y habilidades básicas que se ponen en juego ante una secuencia que utiliza mosaicos como estrategia para generar las experiencias sensibles mencionadas. En un segundo momento analizaremos las posibilidades y adecuaciones de lo trabajado en términos de habilidades básicas para que, finalmente podamos crear nuestros propios proyectos.

Introducción

Los docentes podríamos pensar, crear y generar secuencias que resulten en un momento de encuentro para resolver situaciones que sirven para promocionar el estudio de la geometría dándole, en un principio un sentido lúdico, y en el final un momento de creación, sin perder el objetivo fundamental que es el de motivar, estimular el pensamiento.

¿Por qué utilizar una secuencia que trabaja con mosaicos? Desde que el hombre comienza a construir y a realizar construcciones duraderas siempre se preocupó por que al unir elementos para cubrir una superficie esta unión sea lo más eficiente posible.

Desde las calzadas romanas hasta en los jardines de La Alhambra podemos observar esta preocupación del hombre, sea por un problema de utilidad cotidiana o para decorar sus templos o edificios emblemáticos (Muñoz Santonja y Hans Martín, 2010). Así que rompecabezas, calzadas, revestimientos, obras como las del dibujante holandés Maurits Escher, mosaicos árabes, y la misma naturaleza, resultan ser estimulantes recursos didácticos para la investigación de habilidades, vistas éstas como indicadores de la capacidad de realizar una tarea (Bressan, Bogisic y Crego, 2013, p. 18).

La geometría va asociada con el arte de saber mirar y ver (Alsina, 1995). El saber ver y el saber interpretar no son sinónimos, no son instantáneos, se consideran habilidades que requieren de un proceso de aprendizaje. Según Alsina (1995) la observación libre debe ser seguida por la observación provocada y la actuación del alumno. Desterrando la idea de que lo visual no es matemático o que es poco matemático, la visualización es como un catalizador para lograr entender y provocar el razonamiento. Pero además se tiene que poder decir lo que se está viendo, lo cual implica transmitir a otros lo que reconoció (Carrulla, 1999) para luego comunicarlo por escrito. Para esto se debe dar tiempo para completar el ciclo que va desde la visualización y reconocimiento de una regularidad hasta su registro por escrito con símbolos adecuados (Bressan y Gallego, 2010).

No basta conocer sólo resultados o conceptos, sino que la matemática conlleva una forma de pensar y desarrollar capacidades específicas que, ubicados en el rol docente, deberíamos transmitir a nuestros alumnos.

Según Polya (citado en Hiatt, 1979) la matemática es a la vez, un método de investigación y un cuerpo organizado de conocimientos y considera al método de investigación como la savia de la matemática. El mismo autor señala que instruir en matemática no es un asunto de sólo comprometer los resultados a la mente, sino es para enseñar a participar en el proceso que hace posible la creación del conocimiento. Afirma: “El conocimiento es un proceso, no un producto.” (Hiatt, 1979, p.141), y en este proceso se desarrollan capacidades, habilidades, entre otros.

Habilidades básicas en el estudio de la geometría

Se define el concepto de habilidad como el talento, pericia o la aptitud para desarrollar una tarea o bien como el indicador de una capacidad para completar una actividad (Bressan, Bogisic y Crego, 2013).

ISBN 978-84-945722-3-4

Aprender geometría sirve para desarrollar habilidades de razonamiento, de representación visual y favorecer la sinergia de estos procesos tan diferentes. Sirve para descubrir y desarrollar distintos formas de pensamiento pero para lograr esto hay que generar situaciones didácticas que las estimule (Duval, 2001).

Hoffer (1981) dice: “There are times when we may have more need to draw a picture of a geometric situation than to prove a theorem.” Ciertamente que, ante un planteo geométrico, la mayoría de nosotros tenderíamos a hacer un dibujo antes que a proponer una demostración. Si nuestra enseñanza sólo focaliza en las demostraciones y los aspectos axiomáticos, dejaríamos afuera un saber que aproximaría a los estudiantes a este conocimiento.

Las habilidades desarrolladas en el trabajo geométrico (Bressan, 2013), como la de visualización, de dibujo o construcción, de comunicación, lógicas y de aplicación, pueden ser puestas en juego a raíz del trabajo con actividades que inviten a su uso. El primer estímulo, puramente visual, pero a través de diversas situaciones se va desplazando hacia el uso de otras habilidades que no son plenamente estimuladas fuera del aula. Cada alumno aplicará la que considere más pertinente en la resolución de las actividades de la secuencia que están planteadas como desafíos a la intuición y luego a la razón.

Pondremos especial énfasis en habilidades que guardan concordancia con las señaladas por Hoffer (1981) y Bressan, Bogisic y Crego, (2013) que son:

- Habilidades visuales

Éstas implican tanto representar lo mental a través de formas visuales externas como la representación interna de objetos visuales.

- Habilidades de dibujo y construcción

Suponen el uso de representaciones como símbolos, dibujos y construcciones que pueden dar idea de un concepto matemático.

- Habilidades de comunicación

Estas habilidades involucran no solo escuchar, sino leer, interpretar información geométrica, como también comunicar en forma ordenada y clara con diferentes lenguajes.

- Habilidades de razonamiento lógico

Implican comparar, completar series de símbolos o figuras, clasificar y generalizar propiedades. Además de reconocer congruencias, diferencias y semejanzas, crear, inventar,

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

imaginar, intuir situaciones, explorar y descubrir conceptos, regularidades y relaciones, entre otras.

- Habilidades de aplicación

Comprenden habilidades para explicar el mundo físico desarrollando modelos que puedan explicarse con los contenidos estudiados en Geometría.

Ciertos tipos de actividades favorecen el desarrollo de unas más que otras.

Entendemos que es valioso observar que estas habilidades no son útiles sólo para el estudio de la matemática sino, en nuestra opinión, para la vida como educando.

Niveles de comprensión en geometría

Según Van Hiele "giving no education is better tan giving it at wrong time" (Van Hiele, 1999), entonces debemos proveer una enseñanza apropiada al nivel de pensamiento de los niños.

¿Cuál es el nivel de dónde se inicia para enseñar geometría? La respuesta depende del nivel de pensamiento de los alumnos, el que condiciona el grado de desarrollo de las habilidades para cada nivel (Galindo, 1996). El pensamiento no verbal es de gran importancia, ya que las raíces de nuestras decisiones están en ese nivel. Observamos cosas sin pensar en palabras, reconocemos caras familiares sin utilizar palabras para describirlas.

El matrimonio Van Hiele (1957, citado en Gutiérrez, Jaime y Fortuny 1991) propuso, específicamente para geometría, una teoría de niveles de conocimientos y fases de comprensión que permiten organizar la enseñanza y reconocer aprendizaje y comprensión alcanzada por los estudiantes.

El nivel más bajo determinado por los Van Hiele, es el nivel *visual*, donde se comienza con un pensamiento no verbal. Por ejemplo, un estudiante puede decir: "éste es un cuadrado" sólo por su apariencia. El siguiente nivel es *descriptivo*, donde ya el alumno puede distinguir ciertas propiedades de las figuras. Se sigue con el nivel de *deducción informal*. Es aquí donde las propiedades se organizan lógicamente, cada una se deduce de otra anterior. Finalmente se llegará el nivel de *deducción formal* que la mayoría de los alumnos no alcanzan naturalmente porque no siempre se atiende desde la enseñanza. Este modelo tiene algunas particularidades importantes que indicamos a continuación:

ISBN 978-84-945722-3-4

1. *Secuencialidad en la adquisición de los niveles*: sigue un orden que no es posible alterar.
2. *Especificidad del lenguaje*: en cada nivel el lenguaje se va mejorando y completando.
3. *Globalidad y localidad*: investigaciones revelan que el nivel de razonamiento es local o sea que se razona en un nivel un concepto y no tiene por qué ser el mismo en otros conceptos.
4. *Intrínseco y extrínseco*: los objetos de un nivel se convierten en objetos de estudio en el otro ya que en el primero sólo se perciben formas hasta que en niveles más avanzados ya se analizan sus propiedades.
5. *Instrucción*: no se avanza de un nivel a otro sin una intencionalidad o experiencias personales. No tienen que ver con un aspecto biológico, ni con la edad.
6. *Emparejamiento:* si un estudiante se encuentra en un nivel de comprensión y el docente da una instrucción en un nivel superior, seguramente no se logren los resultados deseados.

Los alumnos irían adquiriendo este tipo de pensamiento gradualmente, según los Van Hiele, no se debe al crecimiento o desarrollo natural, sino de la instrucción intencionalizada, por medio de invitación a variadas experiencias que estimulen el avance.

A modo de cierre

Siendo un contenido al alcance de todos, el arte, la biología, la arquitectura se podría matematizar con elementos de la geometría y así involucrar a todos en un trabajo geométrico desde los intereses particulares. Ubicados en el aula, es posible comenzar desde los niveles más bajos de comprensión para ir creciendo en contenidos y habilidades en forma democrática, donde cada alumno es actor fundamental de su propio proceso de aprendizaje. Esta perspectiva parte de lo concreto y desde allí se inicia un camino intencionado que eleve el pensamiento en cualquier nivel de la escolaridad. La intencionalidad mencionada significa que este proceso no se da sólo, se debe provocar y para esto el papel del docente es clave. Es él quien se encarga de diseñar las actividades, organizarlas en forma de secuencias o proyectos con una intencionalidad didáctica y nivel de profundización cada vez mayor, para que el alumno pueda experimentar el quehacer y pensar matemático ante una situación y desarrollar capacidades o habilidades que le son propias y no siempre desarrolladas fuera de la clase de matemática.

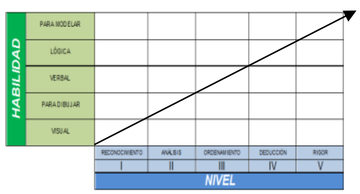
El trabajo se plantea grupal y por esto la creación es colectiva. La interacción entre alumnos alienta y enriquece la solución de problemas y aparecen nuevas ideas que confirman concepciones de los alumnos.

Los mosaicos o rompecabezas son muy utilizados para el pasaje intencionado de un nivel a otro. Primero con una etapa de "feel and find the shape" que estimula el sentir y encontrar la figura para completar un rompecabezas (Van Hiele, 1999). Pistas, preguntas, situaciones provocadas por el docente fomentan a que el alumno necesite aplicar el lenguaje cada vez más especializado y realice gradualmente conexiones lógicas que verbalizará en el momento adecuado. Este tipo de trabajo puede llevar a tareas de mayor complejidad y permitir profundos aprendizajes.

Tenemos muy en cuenta estas consideraciones y por esto se tratará observar y seguir el esquema de Galindo (1996), donde se relacionan los niveles de comprensión de la geometría según la teoría de Van Hiele y las habilidades según describe Hoffer (1981). Este autor asoció el estado específico de cada habilidad con el nivel de comprensión geométrica desarrollado por los Van Hiele.

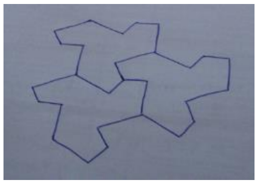
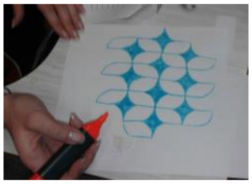
Consideramos como marco teórico para este trabajo, la noción de mosaicos de Bressan, junto con los conceptos de habilidades geométricas y su vínculo con la comprensión de Van Hiele.

Adaptamos la tabla de Hoffer (1981) para relacionar cada habilidad con el nivel de comprensión de los estudiantes.



Habilidades y Niveles de comprensión

Hemos considerado como punto de partida una secuencia que plantea la búsqueda de patrones geométricos y el estudio de las figuras planas a partir de la observación y construcción de mosaicos y que termina, inevitablemente, en la creación de nuevos diseños.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

El desarrollo de esta secuencia dejará en evidencia la posibilidad de generar actividades geométricas que, partiendo de actividades empíricas, logre desplegar el pensamiento racional y permita que los estudiantes desarrollen habilidades que podrán ser aplicables a otras asignaturas.

El taller está planeado en tres etapas:

Primera etapa del taller: Exploraremos las actividades con mosaicos que se pueden realizar para reconocer el desarrollo de habilidades y el nivel de comprensión que se pone en manifiesto, y más aún el pasaje de un nivel de comprensión cada vez mayor.

Segunda etapa del taller: Presentaremos brevemente las conceptualizaciones teóricas de Educación Matemática que dan sustento a la propuesta (las nociones mencionadas antes) y abriremos un espacio de intercambio con los docentes asistentes para considerar la adecuación de la secuencia a los distintos grupos de estudiantes de diversos años y modalidades. Además de todas las posibles aplicaciones a distintos programas graficadores como el Geogebra, y para el estudio de otros conceptos como los movimientos en el plano, semejanzas, etc.

Tercera etapa del taller: Propiciaremos que cada docente, luego de haber transitado la secuencia desarrolle un proyecto de mosaico presentado en forma individual o grupal una tesela de creación propia.

Entonces…

Cuando surge la pregunta sobre qué se debe enseñar en una geometría para todos en la educación obligatoria y se piensa qué debe saber de un ciudadano normal, más allá de su profesión, aparece la frase del Dr. Luis Santaló (1997, p.18) sobre formar cabezas bien hechas y no saturadas de información inútil que no sirve para la vida, ni despiertan la curiosidad. Es por ello que este trabajo pretende ser un aporte para echar luz sobre lo importante del desarrollo de habilidades geométricas, caracterizar actividades que las promuevan y evidenciar lo provechoso del estudio de la geometría.

Referencias bibliográficas

- Alsina, C. (1995). *Invitación a la Didáctica de la Geometría*. (3° Reimpresión). Madrid: Editorial Síntesis.

ISBN 978-84-945722-3-4

- Alsina, C., Fortuny, J. y Pérez, R. (1997). ¿*Por qué Geometría*? *De La enseñanza de la Geometría*. Colección: Materiales para apoyar la práctica educativa, México.
- Bressan, A., Bogisic, B. y Crego, K. (2013). *Razones para enseñar geometría en la educación básica.* (3° Reimpresión). Argentina: Ed. Novedades educativas.
- Bressan, A. y Gallego, M. (2010). El proceso de matematización progresiva. Núm. 168. Buenos Aires: Correo del Maestro.
- Muñoz Santoja, J., Hans Martín, J y Fernández, A. (2011) Jugando con teselas. *Revista de Didáctica de las matemáticas. Números* Volumen 77, julio de 2011,
- Carrulla, C. (1999). Rutas hacia el / Raíces del álgebra, reseña del libro de J. Mason Graham, y otros Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Revista EMA Vol.5, Núm. 1. Bogotá.
- Duval, R. (2001). La geometría desde un punto de vista cognitivo. *PMME-UNISON*. http://fractus.uson.mx/Papers/ICMI/LaGeometria.htm
- Galindo, C. (1996). Desarrollo de habilidades básicas para la comprensión de la Geometría. *Revista EMA*. *Vol. 2,* N° 1, 49-58. Bogotá. Colombia.
- Gutierrez, Á. Jaime, A. y Fortuny, J. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics* Education. Vol. 22, pp.237-251 Stable URL: http://www.jstor.org/stable/749076
- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: el modelo de van Hiele. *Teoría y práctica en educación matemática.* Alfar: Sevilla, España, pp. 295-384.
- Hoffer, A. (1981). Geometry is more than Proof. *The Mathematics Teacher, vol. 74*(1), 11–18. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/27962295
- Santaló, L. (1997). Enfoques Hacia una didáctica humanista de la matemática. (3° Reimpresión). Buenos Aires: Ed. Troquel.

Van Hiele, P. (1999). Developing Geometric thinking through Activities with play. *Teaching Children Mathematics, 6,* pp. 310-316.

ANEXO

Propuesta de actividades

ISBN 978-84-945722-3-4

El estudio de la geometría es un proceso y no un producto terminado, el alumno es el protagonista de un trabajo creativo. ¿Qué capacidades son necesarias? ¿Qué habilidades estimula un trabajo geométrico? ¿Cuáles serán las herramientas que desde la geometría también sirven para interpretar cuestiones de la vida cotidiana, apreciar el arte y la naturaleza?

Se comienza comprometiendo los sentidos, haciendo participar al alumno en una geometría sensible, que pasando por la acción y la reflexión se llega a la abstracción en un trabajo racional.

Queremos describir sintéticamente algunas de las propuestas de actividades del taller donde se pone en evidencia algunas de las habilidades básicas. Nosotros proponemos acciones pero los concurrentes terminan dando forma al taller según las experiencias y expectativas.

El taller está planeado en tres etapas en donde los participantes realizarán las siguientes actividades:

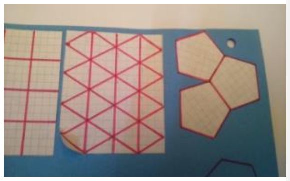
Primera etapa

Actividad N°1

Consigna: "¿Todos los polígonos regulares pueden cubrir el plano sin dejar espacio vacíos y sin que haya superposiciones? En caso contrario indicar cuáles son los polígonos que permiten teselar una superficie. Si es así, encuentren alguna justificación para explicar por qué en algunos casos se puede y en otros no."

-Se planteará a los participantes a trabajar con polígonos regulares de cartón y también, los que así lo crean, en sus PC con el programa Geogebra.

-Les propondremos que utilicen las piezas poligonales para construir mosaicos regulares y comprobar cuáles teselan o no el plano.



-Exploraremos las actividades con mosaicos que se pueden realizar para reconocer el desarrollo de habilidades y el nivel de comprensión que se pone en manifiesto, y más aún el pasaje de un nivel de comprensión cada vez mayor.

Poniéndonos en el lugar de los alumnos, ensayaremos la construcción de pequeños rompecabezas y reconoceremos en las piezas poligonales características que nos servirá de

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

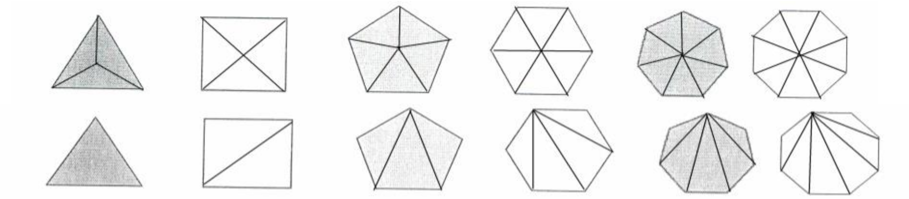
diagnóstico sobre cuánto conocemos de figuras planas. Al armar los mosaicos se generan nuevas preguntas.

Actividad N°2

Consigna: ¿Los polígonos regulares seleccionados son los únicos? ¿Por qué?

-Propondremos a las participantes a “ensayar” validaciones desde el punto de vista de los alumnos y propias y así poder analizar las habilidades puestas en juego.

Esto lleva a averiguar los ángulos interiores de los polígonos regulares a partir de conocer la suma de los ángulos interiores de un triángulo (contenido de nivel primario).



Se esperan todo tipo de explicaciones, ya sea gráficas, simbólicas y diferentes tipos de argumentaciones de los integrantes del grupo de trabajo. Estas formulaciones tendrán que ser validadas por todo el curso.

Cómo orientarlos para que desde estas u otras opciones logren deducir la amplitud de cada ángulo y de ahí el por qué solo tres polígonos regulares teselan el plano, es un trabajo donde se estimulan las habilidades de mayor nivel de comprensión.

Superar algunos planteos simples iniciales para llegar a ideas más generales será cuestiones a revisar en cada curso y en cada grupo de alumnos.

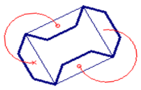
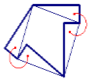
<u>Segunda etapa del taller</u>

Presentaremos brevemente las conceptualizaciones teóricas de Educación Matemática que dan sustento a la propuesta reflexionando sobre las actividades de la primera etapa.

El trabajo de reflexión será reconocer cuáles son habilidades puestas en juego en una secuencia que trabaja con geometría. Destacaremos lo importante para nuestro caso el vivenciar y reconocer en nosotros mismos las habilidades que aplicamos para resolver las consignas.

Experimentaremos brevemente el trabajo que realizaron los artesanos árabes en La Alhambra.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Podremos describir habilidades y nivel de comprensión, puestas en juego por estudiantes ante la construcción de mosaicos.

Estas habilidades, junto con las fases de comprensión de la geometría según Van Hiele, nos servirán para comprender algunos indicadores según la tabla de Hoffer.

TABLE I
Basic Skills in Geometry

SKILL \ LEVEL	I Recognition	II Analysis	III Ordering	IV Deduction	V Rigor
VISUAL	Recognizes different figures from a picture. Recognizes information labeled on a figure.	Notices properties of a figure. Identifies a figure as part of a larger figure.	Recognizes interrelationships between different types of figures. Recognizes common properties of different types of figures.	Uses information about a figure to deduce more information.	Recognizes unjustified assumptions made by using figures. Conceives of related figures in various deductive systems.
VERBAL	Associates the correct name with a given figure. Interprets sentences that describe figures.	Describes accurately various properties of a figure.	Defines words accurately and concisely. Formulates sentences showing interrelationships between figures.	Understands the distinctions among definitions, postulates, and theorems. Recognizes what is given in a problem and what is required to find or do.	Formulates extensions of known results. Describes various deductive systems.
DRAW-ING	Makes sketches of figures accurately labeling given parts.	Translates given verbal information into a picture. Uses given properties of figures to draw or construct the figures.	Given certain figures, is able to construct other figures related to the given ones.	Recognizes when and how to use auxiliary elements in a figure. Deduces from given information how to draw or construct a specific figure.	Understands the limitations and capabilities of various drawing tools. Pictorially represents nonstandard concepts in various deductive systems.
LOGICAL	Realizes there are differences and similarities among figures. Understands conservation of the shape of figures in various positions.	Understands that figures can be classified into different types. Realizes that properties can be used to distinguish figures.	Understands qualities of a good definition. Uses properties of figures to determine if one class of figures is contained in another class.	Uses rules of logic to develop proofs. Is able to deduce consequences from given information.	Understands the limitations and capabilities of assumptions or postulates. Knows when a system of postulates is independent, consistent, and categorical.
APPLIED	Identifies geometric shapes in physical objects.	Recognizes geometric properties of physical objects. Represents physical phenomena on paper or in a model.	Understands the concept of a mathematical model that represents relationships between objects.	Is able to deduce properties of objects from given or obtained information. Is able to solve problems that relate objects.	Uses mathematical models to represent abstract systems. Develops mathematical models to describe physical, social, and natural phenomena.

Imagen de Geometry is more than Proof. The Mathematics Teacher, 74(1), p.1

-Se les invitará a los participantes del taller a que durante el transcurso de las actividades remarquemos los indicadores que nos guiarán sobre qué habilidades y de qué nivel de comprensión se va accediendo, en un camino de mayor de racionalidad.

ISBN 978-84-945722-3-4

Tercera etapa del taller

Actividad N°3

Consigna. Construir un mosaico.

-Propiciaremos que cada participante, luego de haber transitado toda la secuencia (aquí sólo un detalle de la misma), desarrolle un proyecto de mosaico presentando en forma individual o grupal una tesela de creación propia. Volveremos como en un camino espiralado a analizar los trabajos de los mosaicos de la Alhambra y el trabajo de Maurits Escher, buscando las relaciones de sus trabajos con la aplicación de las ideas previas. Y orientaremos a los talleristas para que construyan su modelo aplicando todo lo aprendido en la producción de una tesela de creación propia y original.

Finalmente…

Consideraremos las siguientes potencialidades del trabajo geométrico con mosaicos:

- Un contenido adaptable a diferentes niveles de conocimiento.
- Trabajo en variedad de marcos.
- Un contenido conectado o conectable con otras áreas de conocimiento.
- Invita a adaptarse a diferentes modos de trabajo: trabajo grupal, en parejas e individual.
- Adaptabilidad al uso de material concreto y trabajo con el programas graficadores.

Esta secuencia resultará en un momento de encuentro para resolver situaciones que sirven para promocionar el estudio de la geometría dándole, en un principio un sentido lúdico, y en el final un momento de creación, sin perder el objetivo fundamental que es el de motivar y desarrollar al máximo las capacidades de los alumnos.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-382

MATEMÁTICAS Y PLÁSTICA, JUNTAS Y REVUELTAS. DISFRUTANDO CON ACTIVIDADES INTERDISCIPLINARES A PARTIR DE OBRAS DEL MUSEO THYSSEN-BORNEMISZA

Joaquín Comas Roqueta - Ana Pérez-Nieto Mercader
jcmages@gmail.com - anapereznieto@hotmail.com
IES Mar Menor - IES Sierra Minera; España

Núcleo temático: Matemáticas y su integración con otras áreas
Modalidad: T
Nivel educativo: Medio o Secundario, Terciario o Bachillerato
Palabras clave: Plástica, lúdico, investigación, interdisciplinaridad

Resumen

Presentamos, desde una perspectiva interdisciplinar, un taller de variadas actividades con el objetivo de constatar las numerosas e interesantes relaciones entre las Matemáticas y la Plástica. Queremos que nuestros alumnos disfruten con las Matemáticas descubriendo, de una manera lúdica y atractiva, algunas de las muchas interacciones con el arte partiendo de obras seleccionadas en el Museo Thyssen-Bornemisza. La variedad de actividades diseñadas a partir de obras de grandes artistas como Pollock, Mondrian o Kandisky nos llevan a plasmar nuestra proporción áurea en un obra, a trabajar con fractales o incluso a crear una obra colaborativa a ritmo de Fangoria y de su "Geometría Polisentimental".

Introducción

Son numerosas las actividades que los autores de esta comunicación han realizado relacionando la Educación Plástica y las Matemáticas durante sus años de docencia. Estas se caracterizan por presentar los contenidos de las dos materias de una forma lúdica y atractiva, con el fin de motivar al alumnado en su tarea diaria y dinamizar el aula.

La implicación del departamento de Educación Plástica en el proyecto Musaraña del Museo Thyssen Bornemisza, nos dio pie a desarrollar una serie de actividades en las que se unen arte y matemáticas. La relación con el museo y en especial con el departamento de educación Educathyssen se afianzó, siendo invitados como ponentes en el encuentro con profesores "Comienzan las clases" con el fin de formar a los docentes participantes. En él los participantes pudieron participar de una selección de actividades, las cuales presentamos a continuación.

“Geometría Polisentimenal”.

Actividad creada para trabajar geometría a partir de la música y la plástica. Por eso utilizamos a Vasili Kandinsky, como referencia de autor sinestésico que mezcla distintas disciplinas en sus obras. “*Tensión suave*” y “*Pintura con tres manchas*” son las obras con las que nos basamos y que enseñamos a los alumnos para inspirarles.

El nombre de la actividad lo pone el tema musical elegido, perteneciente al grupo “Fangoria” en su disco “*Canciones para robots románticos*” el cual tiene numerosas referencias a la geometría en su letra.

A partir de ella, los alumnos tendrán que crear una obra sinestésica de gran formato en grupo.

En las primeras sesiones, los alumnos adquieren conocimientos básicos de geometría que les ayudarán a desarrollar la actividad: línea, punto, espiral, poliedros, polígonos…

Ya en la actividad, se les muestran las obras explicándoles quien es Kandisnky, cual era su método de trabajo y por consiguiente, que es la sinestesia (asimilación conjunta o interferencia de varios tipos de sensaciones de diferentes sentidos en un mismo acto perceptivo).

Los participantes se colocarán alrededor de una mesa provista de papel continuo blanco donde se les repartirá una cera negra. En ese momento sonará la música, a cuyo ritmo tendrán que bailar alrededor, sin perder detalle de la letra. Si escuchan cualquier referencia geométrica, tendrán que parar donde estén y dibujar el elemento en cuestión. Con total libertad de tamaño, pudiéndose superponer los distintos grafismos.

Una vez terminada esta primera ronda, se les entregarán unos vasos con pintura (rojo, magenta, azul, morado, verde, amarillo y naranja) y unos pinceles.

Para no perder la motivación, la música volverá a sonar y tendrán que aplicar color en los espacios limitados por las líneas.

ISBN 978-84-945722-3-4

Figuras 1 y 2: alumnos y profesores realizando la actividad.

“Reinterpretando a Pollock”

Jackson Pollock fue nuestra inspiración para empezar a trabajar con los fractales. Y es que la obra de Pollock es fractal. Si elegimos un fragmento de ella, presenta un alto grado de autosemejanza y dimensiones fractales similares a distintas escalas. Utilizamos la obra “*Marrón y plata I*” como punto de partida.

Los participantes se situarán alrededor de un soporte de gomaespuma de 1,5m x 2m cubierto de tela, el cual tendrán que mover para desplazar unas pelotas de tenis impregnadas en pintura. Impidiendo que se caigan, tocarlas con las manos o que se paren, ya que si alguna de estas cosas sucediese se sumarían puntos y gana el equipo que menos puntos posea.

Con este juego practicamos la técnica utilizada por Pollock el “*dripping*”, goteo, mediante la cual creamos un fractal.

ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 3. Alumnos participando de la actividad.

“Sección Áurea”

Con esta actividad trabajamos la sección áurea, proporcionalidad y el número Φ, presentes en la naturaleza y en el mundo del arte. Comenzamos comprobando si las medidas de nuestro cuerpo son “perfectas”, áureas. Utilizamos para ello reglas y cintas métricas y rellenaremos una plantilla que nos ayudará a comprender las relaciones numéricas de nuestro cuerpo. Con estas mediciones realizaremos una obra con los colores que usaba Mondrian en su obra.

Transformaremos nuestras medidas en línea utilizando lana para convertirla en espiral, y después crear una obra “áurea” en la que estamos todos representados a través de números.

“*Composición nº 1 con rojo y azul*” y “*New York*” de Piet Mondrian son las obras seleccionadas en esta ocasión.

Figura 4. Fragmento de la obra resultante de la actividad.

ISBN 978-84-945722-3-4

Referencias bibliográficas

Comas, J., Gimeno, B., Herrera, M.J., Momblona, C. (2002): *Matemáticas en Plástica y Tecnología. Interdisciplinaridad en Secundaria*. Diego Marín Librero Editor, S.L. Murcia. España.

Comas, J., Peñalver, P, Pérez-Nieto, A., Salas, I. (2008). Realización de una Semana Matemática. Revista Unión, 15, 105-123.

Comas, J., Gálvez. C., Lucas, I., Martínez, D., Navas, N., Peñalver, M., Pérez-Nieto, A., Salas, I., Sánchez, M., Sánchez, A. (2009). El cementerio matemático: Who is who in the Halloween cemetery of mathematicians?. Matematicalia, Vol. 5, nº 4.

De Mates…¿Ná? (2000). Página web realizada por los alumnos de las asignaturas de Matemáticas del IES Sierra Minera (La Unión, Murcia, España), con investigaciones y curiosidades matemáticas. http://dematesna-macroideas.rhcloud.com/ Consultado 09/04/2017

Obras del Museo Thyssen-Bornemisza. http://www.museothyssen.org/thyssen/home Consultado 09/04/2017

ISBN 978-84-945722-3-4

T-383

MATEMÁTICA TANGIBLE CON EL CUBO FLEXIBLE BAFI

Mª Esperanza Teixidor Cadenas
cubodidacticobafi@gmail.com
Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas. Pedagoga, maestra de Primaria y creadora de BaFi. España

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Modalidad: T
Nivel educativo: Primario (6 a 12 años)
Palabras clave: Innovación didáctica, geometría, dificultades, enseñanza-aprendizaje

Resumen

La mayoría de los objetos que existen en la realidad son tridimensionales. La enseñanza-aprendizaje de la geometría debe comenzar investigando objetos de tres dimensiones, y a partir de su manipulación descubrir los bidimensionales, hasta llegar a los unidimensionales, que son los más abstractos. La manipulación será imprescindible para un aprendizaje significativo. Invertir el orden tradicional 1D, 2D, 3D, supondrá un reto para el docente. Para lograrlo contamos con la ayuda de un divertido material educativo llamado Bafi. En el taller cada uno manipulará un cubo didáctico Bafi, para descubrir toda su potencialidad, no solo en geometría, sino también en medidas de longitud, superficie y capacidad. Veremos cómo Bafi fomenta el interés y el aprendizaje eficaz de la geometría. Además desarrolla la visión espacial, la imaginación y la creatividad.

Justificación:

Es conocida la conveniencia de que el alumnado manipule materiales para que sea capaz de llegar a los conceptos matemáticos. La dificultad aparece cuando no contamos con materiales apropiados y, con frecuencia, en el aula acabamos haciendo lo contrario: se explica el concepto -que se memoriza- para aplicarlo a situaciones descontextualizadas. De esta forma las matemáticas son un cúmulo de conceptos a memorizar. Lo que se hace más difícil cuando se trata de la geometría.

Bafi es un cubo flexible que puede utilizarse como novedoso recurso didáctico. Al manipularlo se convierte en sucesivas figuras geométricas tales como hexágonos, pirámides, hexaedros, trapecios, rombos, y muchas más.

ISBN 978-84-945722-3-4

Por otro lado, Bafi acerca también el sistema métrico al alumnado. Por ejemplo, permite hacerse una idea de lo que es un metro cúbico, o un metro cuadrado. También se practica la estimación de longitudes con Bafi de diferentes tamaños. Con este material la clase de geometría es dinámica, logrando el interés y el deseo de aprender del alumnado.

Es una realidad que gran parte del profesorado, al igual que el resto de las personas, carecen de formación tridimensional. Este taller propone invertir el orden de la enseñanza de la geometría, empezando por la tercera dimensión, que es nuestra realidad. Así se explica en "Números", Revista de Didáctica de las Matemáticas: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/92/Experaula.pdf

Procuraremos que los conceptos matemáticos sean entendidos en profundidad, para que el alumnado adquiera una base sólida donde construir su conocimiento, desde los primeros niveles de la enseñanza.

Los participantes en el taller se entusiasmarán con el gran recurso que tienen en sus manos (el cubo flexible Bafi), para lograr una matemática tangible, que consiga un aprendizaje significativo.

Descripción del material que se utiliza en el taller

Cada cubo flexible Bafi se transforma al manipularlo en al menos 18 figuras geométricas distintas. El cubo está formado por doce tubos iguales, ensartados en un hilo elástico, que los mantiene unidos formando así un cubo flexible. Esta flexibilidad le hace muy versátil ya que se transforma en polígonos, cuerpos geométricos e incluso letras del abecedario.

Bafi es un "Modelo de Utilidad", según el Boletín Oficial de la Propiedad Industrial de fecha 21/10/2014. Al ser un cubo tridimensional, se han elegido tres colores para visualizar los segmentos que son paralelos, cuando se construye cualquier hexágono.

Hay distintos tamaños del cubo flexible. El Bafi del alumnado mide 10 cm de arista para que al formar un cubo pueda visualizar un litro, que es la capacidad del cubo = 1 dm^3.

También se mostrarán las posibilidades didácticas de otros objetos, formados de la misma manera que el cubo Bafi, que se encuentran en la exposición matemática: El universo del cubo flexible Bafi.

Ventajas de utilizar el cubo didáctico Bafi

Son muchas las dificultades que se superan con Bafi, gracias a la visualización de los conceptos que se quieren aprender. De esta manera se logra una matemática tangible a la que todo el alumnado llega, y no sólo el que tiene mayor inteligencia espacial. La meta será aprender a ver. A medida que se desarrolla aumenta la capacidad de asombro e implicación del alumnado en su propio aprendizaje.
Sin hacer una lista exhaustiva, a continuación se exponen algunos ejemplos de las ventajas que proporciona este material didáctico:

Facilidad para reconocer las figuras geométricas. El alumnado se habitúa a girar la figura que ha construido, y la distingue en cualquier situación. De esta manera, se supera el error de visualización siempre en la misma posición, que es lo que suele ocurrir en los libros de texto. Debería ser fácil pensar que un cambio de posición no puede alterar la esencia de la figura. Pero esto no ocurre espontáneamente y es necesario que se visualice y manipule**.**

Distinción entre objetos de tres, dos o una dimensión. Es frecuente el error de ver una pirámide triangular y decir que es un triángulo. Es cierto que está formado por triángulos pero no es una superficie, "que con mi mano puedo recorrer", sino un volumen donde "caben cosas dentro".

Utilidad para trabajar medidas de longitud. Se puede doblar el Bafi del alumnado hasta conseguir tres segmentos de 1 dm, 2 dm o 3 dm. Es importante que los alumnos tengan el decímetro asimilado para poder hacer cálculos aproximados de medidas. Con el cubo flexible Bafi del profesorado se puede conseguir otras medidas, lo que nos servirá para el cálculo mental ya que una distancia será la suma de varios segmentos. Tenemos tres tamaños: el mayor, de 1 metro de arista, le sigue el de medio metro de arista y por último el de 25 cm de arista. Con el Bafi cuya arista es de 1 metro puedo conseguir segmentos de 1, 2 o 3 m. Con el segundo obtengo distancias de 0'5 m, 1m o 1'5m. Y con el de 25 cm de arista logro 0`25m, 0'5m o 0'75m.

Interesante para las medidas de capacidad. Una experiencia significativa es preguntar: ¿cuántos litros caben en un cubo de medio metro de arista? La contestación de la mayoría del

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

alumnado es afirmar que contiene 500 litros, sin darse cuenta de su error. El origen de esta equivocación se encuentra en que el alumnado deduce que será la mitad de la capacidad de un cubo de un metro de arista. Si bien es cierto que el alumnado domina que en un cubo de un metro de arista caben 1000 litros, en cambio falla al creer que la mitad de la longitud implica la mitad del volumen total. Este error se puede evitar si disponemos de un cubo Bafi de un metro de arista, e introducimos dentro otro cubo Bafi de medio metro. El alumnado se dará cuenta al instante que su volumen es mucho menor. Entonces es fácil llegar a la solución: el volumen es la octava parte, donde caben 125 litros.

Interiorización del metro cuadrado con el Bafi de un metro de arista. Siempre partiremos de una realidad contextualizada, como hicieron en el Instituto Schaman, de Las Palmas de Gran Canaria. La profesora propuso al alumnado que investigara si era posible el dato de 4000 asistentes, extraído de un periódico, respecto a un concierto de la cantante Malú en la ciudad. Para ello el alumnado tuvo que comprobar las personas que caben en un metro cuadrado, los metros cuadrados del local donde se realizó el concierto… y extraer la conclusión.

Adquisición del concepto de fracción, número decimal y porcentaje, con distintos tamaños de Bafi. Se aprenden al mismo tiempo y no como bloques desconectados, ya que corresponden a una misma realidad.

Posibilidad de construir una misma figura de diferentes formas. Lo importante será que el alumnado verbalice los pasos que da para su construcción. De esta manera se comprueba su competencia matemática y lingüística, además de favorecer la iniciativa y creatividad.

Utilidad para la asignatura de lengua, al transformarse en letras. Conviene que sea el alumno el que las descubra. La clase se enriquece con la aportación de todos. Según el nivel podremos hacer distintas actividades: unas sólo de reconocimiento o diferenciación de letras y otras de relación entre letras. Por ejemplo ¿qué giro he dado para transformar una N en Z?
Con letras formamos las palabras y con cifras los números.

ISBN 978-84-945722-3-4

Ventajas de utilizar el resto de los cuerpos platónicos: icosaedro, dodecaedro, octaedro y tetraedro

Al girar el icosaedro y el octaedro se visualizan los cuerpos en revolución. Con el octaedro veremos dos conos y con el icosaedro además un cilindro.

Se puede contar con facilidad las aristas y los vértices.

Ventajas de utilizar polígonos flexibles

Se diferencia visualmente un número par de otro impar a través de las figuras que se pueden formar. Si es rectángulo o doble segmento será par. Y si se transforma en un trapecio o en triángulo, será impar**.**

También ayuda al cálculo mental, ya que se visualizan las descomposiciones de los números en dos sumandos. Por ejemplo del 10: 9+1= 8+2=7+3=6+4=5+5

Investigaciones para descubrir conceptos complejos

Relación de los volúmenes de dos cuerpos semejantes

Se trata de investigar cuál es la relación entre los volúmenes de dos cuerpos semejantes. De esta manera evitaremos el error de pensar que la mitad de la longitud es la mitad del volumen. El primero es un Bafi de 1dm de arista donde cabe 1litro y su volumen es 1dm^3. El cuerpo semejante será otro de razón de semejanza 2, ya que la arista de esta construcción nueva es el doble de la inicial. El cuerpo semejante está formado por 8 Bafis como el inicial, luego caben 8 litros y su volumen es 8 dm^3.

Calculamos la razón entre los volúmenes dividiendo el volumen del segundo cuerpo entre el primero (8 dm^3: 1 dm^3 = 8). Llegamos a la conclusión que la razón entre los volúmenes de dos cuerpos semejantes es la razón de semejanza al cubo 8 = 2^3.

Las unidades de volumen siempre se expresan con un superíndice que es el tres. Hacer hincapié en esto es necesario para que no les de igual poner dm o dm^3.

Relación de las superficies de dos figuras semejantes

Repetimos el procedimiento pero no con cubos sino con cuadrados formados con BaFi. Se trata de investigar cuál es la relación entre las superficies de dos figuras semejantes. El

ISBN 978-84-945722-3-4

primero es un Bafi de 1dm de arista cuya superficie es 1dm^2. La figura semejante será otra de **razón de semejanza 2**, ya que la arista de esta construcción nueva es el doble de la inicial. La segunda figura está formada por 4 cuadrados como la inicial, luego su superficie es 4 dm^2.

Calculamos la razón entre las superficies dividiendo la superficie de la segunda figura entre la primera (4 dm^2: 1 dm^2 = 4). Llegamos a la conclusión que la razón entre los volúmenes de dos cuerpos semejantes es **la razón de semejanza al cuadrado 4= 2^2.**

Las unidades de superficie siempre se expresan con un superíndice que es el dos.

Visualización

Se trata de aprender a ver, a descubrir empezando por lo más sencillo y avanzando progresivamente. El nivel de dificultad se va complicando. Lo importante no es que el alumnado diga el resultado sino que lo muestre. Estamos trabajando también la competencia lingüística. Nos valemos del conocido test de los cuadrados: https://es.slideshare.net/guestbbfcfa/test-de-los-cuadrados-presentation

¿Cómo se podría saber el número de cuadrados sin tener que contarlos visualmente? Cuando la figura tenga más unidades sería muy largo y tedioso llegar al número de cuadrados que contiene. ¿Hay un camino más corto para llegar a la solución? Después de investigar llegan a descubrir que es la suma de cuadrados de los números consecutivos.

$1^2 = 1$

$1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$

$1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$

A continuación hacemos con Bafi un hexágono y preguntamos: ¿Cuántos triángulos hay? Seis. ¿Y cuántos rombos? También 6. ¿Y cuántos trapecios? Igualmente 6. En una hoja isométrica se plasma cada uno de ellos y cómo lo han descubierto. Es aconsejable terminar con una pregunta reto que puede plantear el propio alumnado ¿Ocurrirá lo mismo con el octógono? A investigar.

Objetivos del taller:

ISBN 978-84-945722-3-4

El objetivo general es que el docente conozca este innovador y versátil cubo didáctico. Y como objetivos específicos los siguientes:

- Fomentar el interés y el aprendizaje significativo de la geometría, medidas y números.
- Mejorar la actitud ante las matemáticas, evitando bloqueos, ya que al manipular y visualizar, el concepto se aprende mejor.
- Favorecer la concepción espacial, porque en una figura también pueden verse otras alternativas.
- Diferenciar los objetos de tres, dos y una dimensión.
- Desarrollar la imaginación y la creatividad al existir distintas maneras de formar una figura.
- Asociar matemáticas con investigación.
- Ayudar a verbalizar los razonamientos.
- Potenciar el trabajo colaborativo.

Contenidos que se desarrollarán en el taller

1) Reconocimiento de las figuras en todas las posiciones. Hábito de girar las figuras para verlas en otras posiciones. Visión espacial.

2) Distinción de objetos de 3D, 2D y 1D.

3) Características de polígonos y cuerpos.

4) Medida de capacidad: el litro.

5) Medidas de longitud, volumen, superficie.

6) Fracciones, números decimales, porcentaje.

7) Interés y creatividad en la búsqueda de soluciones de situaciones cotidianas.

8) Relación con el lenguaje.

Referencias bibliográficas

Libros

Canals, M. A. (2009). *Superficies, volúmenes y líneas*. Barcelona: Associació de Mestres Rosa Sensat.

Artículos en revistas

Teixidor, E. (2016). 3D, 2D, 1D. Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 92, 93-103.

ISBN 978-84-945722-3-4

Teixidor, E. (2010). Pajifiguri: un material manipulativo y un cuento interactivo. Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 74, 75-92.

Información extraída de una página web

Cubo didáctico BaFi (2014). https://cubodidacticobafi.com/Consultado 17/03/2017

Slide Share. https://es.slideshare.net/guestbbfcfa/test-de-los-cuadrados-presentation/ Consultado 17/03/2017

ISBN 978-84-945722-3-4

T-393

DESAFÍO GEOGEBRA: MODELIZACIÓN GEOMÉTRICA EN CLASE CON MOVIMIENTOS ARTICULADOS

Diego Lieban
diegolieban@yahoo.es
Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Rio Grande do Sul, Brasil
(doutorando em Educação Matemática na Johannes Kepler Universität, Austria)

Núcleo temático: Recursos para o ensino e aprendizagem das matemáticas
Modalidade: T
Nível educativo: Formación y actualización docente
Palavras chave: GeoGebra, modelización geométrica[5], articulaciones

Resumen

La propuesta del taller es presentar un abordaje de modelización geométrica desde el uso combinado de recursos. Teniendo estructuras articuladas como eje central, la actividad se inicia con la exposición de dos modelos como ejemplos, desde su construcción. Luego, los participantes tendrán posibilidad de realizar sus propias construcciones, en dos versiones, físico y digital. Para eso, utilizarán, en este workshop, el kit educacional 4Dframe y también el software de geometría dinámica GeoGebra. La intención es detenerse más en la representación del funcionamiento de simples mecanismos del cotidiano para extraer las posibilidades de explorarlos en clases de matemáticas y para la enseñanza de ciencias y tecnología en general. Bajo el punto de vista matemático, dos aspectos son especialmente observados: la relación de escalas en dichas construcciones y la transposición de relaciones geométricas de objetos entre el plan y el espacio. Este trabajo es parte del estudio de doctorado del autor y la practica tiene como principio discutir y evaluar, entre profesores y futuros profesores, un modelo de aprendizaje centrado en el alumno, con especial atención para sus aspectos de colaboración y desarrollo de estrategias múltiples de solución.

Resumo

A proposta desta oficina é apresentar aos participantes uma abordagem de modelagem

[5] Nota del autor: El trabajo ha sido desarrollado originalmente en inglés, donde la expresión más habitual es *geometric modelling*. En portugués la forma más recurrente es *modelagem geométrica*, aunque aparece mucho más en el sentido de diseño asistido por computador (CAD) que asociado a la enseñanza de las matemáticas. En español he encontrado, a parte de *modelización geométrica*, algunas otras variaciones como *modelado geométrico* ó *modelación geométrico*, pero parecen ser menos usuales.

ISBN 978-84-945722-3-4

geométrica a partir do uso combinado de recursos. Tendo como foco estruturas articuladas, dois modelos serão apresentados inicialmente. Em seguida, os participantes terão a possibilidade de realizar seus próprios modelos, em duas versões, física e digital. Para tanto, trabalharão com o kit educacional 4Dframe e também com o software de geometria dinâmica GeoGebra. O objetivo é identificar e discutir diferentes posibilidades para o ensino de matemática e ciencias, em geral. Sob o ponto de vista matemático, dois aspectos são especialmente observados: a relação de escalas em tais construções e a transposição de relações geométricas de objetos entre o plano e o espaço. Como parte de projeto de doutorado do autor, esta prática tem como princípio, discutir e avaliar um modelo de aprendizagem centrada no aluno, com especial atenção ao seu aspecto colaborativo e de estratégias múltiplas de desenvolvimento.

Introdución

Modelización geométrica ha sido utilizado en distintos contextos, desde la creación de prototipos de fármacos a la potente industria cinematográfica, con las animaciones 3D. Sin embargo, podría tener más atención en clases, donde contribuiría en la preparación de jóvenes para demandas actuales como las mencionadas, por ejemplo. La expresión modelización geométrica en general está asociada al uso de técnicas digitales para la representación de objetos ó superficies, es decir, sus modelos virtuales. Por eso la vemos más como diseño auxiliado por computadoras (CAD - del inglés, *computer aided design*), cuyas tareas tratan de la aproximación de estructuras reales ya existentes ó en la idealización de nuevos modelos, buscando atender configuraciones requisitadas por el mercado ó por una necesidad particular. El tema es que normalmente la tratan en cursos muy específicos y dependen de conocimientos técnicos sofisticados, además de *software* que no suelen ser accesibles al público en general, sea por su especificidad técnica ó por valores de licencia de uso. Por su vez, el GeoGebra viene ganando aún más espacio en clases por su interface intuitiva y distintas posibilidades de uso. Eso hace con que algunas practicas pedagógicas hayan cambiado al largo de los últimos años. Además, por ser un *software* libre y con distintos materiales disponibles en la red para uno que quiera utilizarlo, ó mismo adaptarlo, GeoGebra ha sido una especial herramienta para el soporte del profesorado.

La Modelización Geométrica a través de la Geometría Dinámica

Espacios de Geometría Dinámica (DGS, *del inglés dynamic geometry system*) como el GeoGebra pueden ser considerados como una oportunidad de convertir estudiantes en exploradores. Entre sus momentos investigativos, alumnos no solo crean, sino que son capaces también de desarrollar conjecturas, tan importante para el proceso científico. Muchos estudios han defendido su utilización (e.g. Schumann, 2004; Gawlick, 2005; Bu &

ISBN 978-84-945722-3-4

Hohenwarter, 2015) y destacan la importancia en transcender los cursos tradicionales de geometría, delante de la creciente y amplia aplicación de la geometría en días actuales. Es decir, no solo en cambios de enseñanza y aprendizaje, sino también en las practicas profesionales, con nuevas demandas, como las impresoras 3D, por ejemplo. Entre las perspectivas asociadas con la modelización geométrica, identificamos la resolución de problemas, formación conceptuales, construcciones, visualización espacial, entre otros tantos. Por ejemplo, GeoGebra permite diferentes puntos de vista de un mismo objeto y, más aún, hasta visualización de secciones transversales. Tales recursos son muy útiles para la aproximación entre representaciones 2D y 3D. Además, cambios de escalas de dichas construcciones pueden ser controlados por simples deslizadores, aunque exigen del creador una comprensión del comportamiento variable de sus objetos.

Enseñanza con Recursos Físicos y Digitales

Alsina (2007) afirma que alumnos pueden tener buenas ideas a partir de las funcionalidades de objetos y eso les despierta también el proceso creativo. Gravina (1996) explica que DGS promueven las experimentaciones y generación de hipótesis en las representaciones digitales de objetos geométricos. Swan et al. (2007) defiende la idea del refinamiento del pensamiento con distintas representaciones de situaciones problema. En nuestro caso, el uso combinado y en paralelo de las representaciones físicas y digitales permiten que los autores observen y evalúen como las articulaciones se apoyan en relaciones matemáticas y que herramientas en ele software les pueden ser útiles para la representación digital a fin de tener una solución más "económica" (es decir, con menos objetos) y al mismo tiempo más precisa. Estudios recientes (e.g., Sinclair et al., 2016; Camou, 2012; Lesh and Sriraman, 2010) traen los efectos positivos de los diseños e implementación de un abordaje multirepresentacional para explorar objetos tridimensionales usando materiales reciclados, tecnologías computacional, sin abandonar el papel y lápiz. En este contexto, hemos procurado defender una propuesta que no solo suele integrar recursos, como también estrategias matemáticas (como algebra y geometría) de manera más natural al alumno.

Resumen de la propuesta

Esencialmente la actividad central del taller es proponer a los participantes que hagan el modelo digital y físico, con los recursos disponibles, de una estructura a ser compartida (no revelada anteriormente). El reto consiste en preservar tanto cuanto sea posible los movimientos de sus elementos básicos, así como mantener la coherencia entre las dos construcciones. Todas las construcciones desarrolladas en el taller son constituidas esencialmente de puntos y segmentos de reta, inspiradas en el material físico (4Dframe) a ser

ISBN 978-84-945722-3-4

utilizado y como muestran los modelos adelante.

Para tanto, la actividad está programada para ocurrir en las siguientes etapas:

Etapa I (50 min): Dividida en dos tiempos, se destina en compartir dos ejemplos ya desarrollados en experiencias previas (físico y digital), así como su proceso de construcción. Con la presentación de la catapulta (Figura1), la idea es explorar las herramientas y estrategias utilizadas, conectadas a discusiones conceptuales siempre que posible.

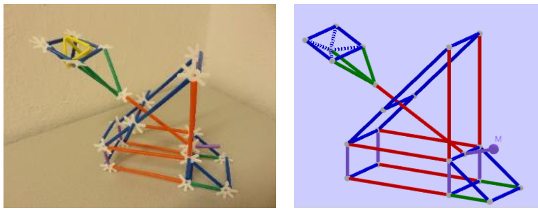


Figura 1: la catapulta representada en ambos formatos, con 4Dframe e GeoGebra

El desarrollo de la escalera (Figura 2) trae la perspectiva de promover un ambiente colaborativo de construcción, donde los participantes son incentivados a tomaren parte de la construcción con sus contribuciones. Durante el proceso, esperase valorar las distintas posibilidades de obtención del modelo. Así como en el ejemplo anterior, la exploración será no solo con la herramienta, sino también conceptual.

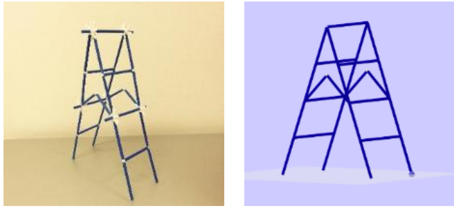


Figura 2: La escalera representada en ambos formatos, con 4Dframe e GeoGebra, respectivamente. Para interactuar con los ejemplos presentados, visite https://www.geogebra.org/m/xCxJUyyx.

Etapa 2 (20min): en conjuntos de dos o tres, los participantes tendrán oportunidad de manipular el material disponible para que puedan hacer sus propios modelos, que deben ser reproducidos digitalmente en la etapa siguiente.

ISBN 978-84-945722-3-4

Etapa 3 (90 min): es donde se concentra la mayor parte del taller, con el modelo digital a ser desarrollado en el GeoGebra por los mismos grupos que hicieron el montaje en la etapa anterior y supervisada por el ministrante. Como ejercicio, la idea es que traten de hacer con que las representaciones de los modelos sean mas próximas posible. Eventuales ajustes en el modelo físico aún podrán ser llevados en cuenta si los participantes consideraren conveniente.

Etapa 4 (20 min): en los minutos finales, habrá una breve discusión con los participantes respecto a la experiencia realizada, evaluando sus puntos positivos y negativos.

Recursos

Más que presentar un abordaje con modelización geométrica entre profesores y futuros profesores, el taller tiene por finalidad también: (i) promover un espacio colectivo de construcción, donde los participantes interactúen con diferentes perspectivas ó ideas de solución; (ii) hacer uso de la a experiencia para rediseñar y mejorar la propuesta para aplicaciones futuras.

Como recursos digital e físico, respectivamente, serán utilizados esencialmente el GeoGebra, ya presentado, y el 4Dframe, que es un material educacional de fácil manipulación, permitiendo montajes y desmontajes rápidas y llenas de posibilidades a través de sus "pajillas" y conectores flexibles y multifuncionales.

Reflexiones

La practica a ser desarrollada por los participantes por cierto suscitará la exploración natural de distintos comandos del *software* GeoGebra. En particular, destacamos que algunos de los recursos del programa deben tener especial atención por el carácter de la tarea, como: (i) representación 3D, (ii) visualización transversal y (iii) deslizador, por ejemplo. Todos tienen objetivos bien planteados, aunque la propuesta permita otras perspectivas a parte. Mientras los dos primeros visan las posibles correlaciones en transcender de la geometría plana a la espacial, el tercer tópico trata de explorar conceptos de semejanzas, escalas y razonamiento funcional, por ejemplo. Sin embargo, conviene notar que no hay ningún requisito previo para la realización del taller. Por fin, se espera que además de compartir ideas para utilización de nuevos recursos en la enseñanza de matemáticas, la actividad sea una oportunidad de promover una reflexión de los papeles de los profesores y de los alumnos en clase.

ISBN 978-84-945722-3-4

Referencias bibliográficas

Alsina, C. (2007) Less chalk, less words, less symbols more objects, more context, more actions. In W. Blum, P. L. Galbraith, H-W. Henn & M. Niss (Eds.), Modelling and Applications in Mathematics Education (pp. 35–44). New York, NY: Springer.

Bu, L., & Hohenwarter, M. (2015). Modeling for Dynamic Mathematics: Toward Technology- Integrated Aesthetic Experiences in School Mathematics. In X. Ge et al. (Eds.), Emerging Technologies for STEAM Education (pp. 355–379). Switzerland: Springer.

Camou,B.J.(2012). High school students learning of 3D geometry using iMAT (integrating Multitype-representations, Approximations and Technology) engineering. Doctoral dissertation of University of Georgia.

Gawlick,T.(2005). Connecting Arguments to Actions Dynamic Geometry as Means for the Attainment of Higher van Hiele Levels. ZDM, 37, pp.361–370.

Gravina, M. A. (1996). Geometria Dinâmica – uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. Anais do Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, pp.1–13. Belo Horizonte, Brazil.

Lesh, R., & Sriraman, B (2010). Re-conceptualizing Mathematics Education as a Design Science. In B. Sriraman & M. Niss (Eds.), Theories of Mathematics Education (pp. 123–146). New York, NY: Springer.

Schumann, H. (2004). Reconstructive Modelling inside Dynamic Geometry Systems. EduMath 19.

Sinclair, N. et al. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. ZDM Mathematics Education, 48, pp.691–719.

Stein, M. K., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). "Orchestrating Productive Mathematical Discussions Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell".Mathematical Thinking and Learning, 10, pp.313–340.

Swan, M., Turner, R., Yoon, C., & Muller, E. (2007) The roles of modeling in learning mathematics. In W. Blum, P. L. Galbraith, H-W. Henn & M. Niss (Eds.), Modelling and Applications in Mathematics Education (pp. 275–284). New York, NY: Springer.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-399

TALLER TEOREMAS DE LA GEOMETRÍA MODERNA: INCLUSIÓN EN EL AULA A TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA DINÁMICA

Eduardo Orellana
eorellana@ucsc.cl
Universidad de la Américas, Concepción - Chile

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos
Modalidad: T
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: Enseñanza, geometría dinámica, geometría clásica, geometría moderna, construcciones.

Resumen
El propósito de este taller es atraer a los participantes en la reflexión y el trabajo en el aula que un profesor debe considerar al momento de enseñar geometría. Se presentarán tareas desarrolladas en el marco de propuestas e investigaciones, las cuales serán analizadas desde la construcción con uso de la geometría dinámica por medio del software Geogebra y se considerará la conexión entre el trabajo personal de cada participante y el trabajo en la enseñanza de algunos teoremas de la geometría Euclidiana entre el siglo XII y XVIII. Específicamente, serán analizadas las bases conceptuales previas necesarias para la construcción de estos teoremas y esas conexiones que dará la geometría dinámica presentes en las tareas propuestas. El taller contempla una puesta en común donde los participantes podrán discutir los alcances e implicancias entre los distintos tipos de trabajo, lo que permitirá reflexionar desde un enfoque teórico aspectos que muchas veces no son abordados ni cuestionados, provocándose vacíos en el aprendizaje y la enseñanza de la Geometría clásica tanto en la formación del profesor como en la enseñanza escolar.

Palabras clave: *Teoremas clásicos, teoremas modernos, geometría, construcciones..*

1. Introducción

El siguiente taller tiene como referente los trabajos de investigaciones que tratan problemas tanto en las aulas de educación secundaria como en las aulas de formación de profesores en las universidades. Se ha podido detectar que se repite una ausencia de la construcción de teoremas considerando la geometría dinámica, en especial como es el caso de las aulas escolares, pero se ha tratado de fortalecer lo contrario a su desarrollo (García & López 2008; Alsina, C. & Fortuny, J. 1997; Bressan, A. & Bogisic, B. 2000; entre otros).

Respecto de estos trabajos, cabe señalar al menos dos puntos. Primero, en su mayoría, estos trabajos no tienen como objetivo específico enseñar a construir algún teorema en particular, y en general no tienen a los teoremas de la geometría moderna como foco de sus propósitos. Las excepciones respecto de estos trabajos, esto es, propuestas dedicadas explícitamente a la enseñanza de la geometría clásica con uso de softwares son el trabajo de Moriena, S. & Scaglia, S. (2003) y la investigación de Alsina (1997).

El propósito del taller es poner en práctica el trabajo personal de cada participante y contrastarlo con el trabajo que se realiza hoy en día en la enseñanza de las matemáticas, particularmente, en situaciones que han surgido desde la investigación. Este trabajo da cuenta que en geometría, el profesor trabaja una geometría sin conexiones entre una y otra junto a la falta de trabajo que considere la necesidad de elementos básicos de ella para la inclusión de esta misma en el aula para los logros, por ejemplo, de los objetivos de enseñanza escolar.

2. Dimensión de la enseñanza de algunos teoremas entre los siglos XII al XVIII

Para el desarrollo de este taller, utilizamos como constructo teórico algunos de los teoremas desarrollados entre los siglos XII y XVIII por Feuerbach (1822), Miquel (1838), Steiner (1856) inspirados en el trabajo de Poncelet (1820). Un primer problema, de índole general, se refiere a la enseñanza de la geometría, independiente del tipo de teorema que se intente enseñar a producir. Diversos estudios (por ejemplo Gamboa, 2010, Ballestero, et al., 2010) han demostrado las dificultades que supone el transformar a un estudiante en un geómetra "maduro". Pero este primer problema se agudiza en un segundo problema de carácter específico más específico, esto es, cuando el o los teoremas que se pretende enseñar son de la geometría c Además de los estudios anteriores de índole conceptual, existen otros estudios empíricos que han documentado una serie de dificultades que enfrentan los sujetos que deben usar un teorema de la geometría clásica. Van (1986) presenta algunos problemas que enfrentan los estudiantes frente a la geometría clásica:

a) La falta de revisión de textos de geometría

ISBN 978-84-945722-3-4

b) El mal manejo de los teoremas básicos necesarios para el desarrollo de posteriores que son consecuencia de estos primeros.

c) Inconsistencia entre el uso de la construcción con regla y compás y software de geometría frente a los teoremas clásicos.

d) Escasa jerarquización de la información

e) La sobre exageración de contenidos presentados en el currículo (aspectos que se prometen pero no se cumplen o viceversa).

lásica.

Para describir el trabajo en los teoremas de la geometría clásica y los posteriores al siglo XII, se considera la inclusión de la geometría dinámica para la construcción de dichos teoremas (Feurbach & Poncelet, 1822), los cuales permiten analizar una situación de enseñanza y aprendizaje, estos tienen consecuencias y repercusiones para otros como se muestra en la siguiente figura (1).

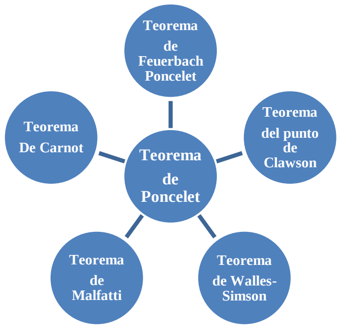


Figura 1: Teoremas principales bajo construcciones con uso de la geometría dinámica.

En el taller, la reflexión en conjunto que se realizará con los participantes sobre las situaciones de construcciones, nos permitirá favorecer la conexión entre los conceptos previos considerados de la geometría clásica como base para la construcción de los teoremas establecidos entre los siglos XII y XVIII (Levy, 1983) para así responder a la tarea de la transposición de los saberes en juego y reflexionar sobre sus alcances en el aula.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

3. Estudio previo a a partir de la misma tarea

Para realizar un análisis de las construcciones con uso de la geometría dinámica a partir de esta misma tarea es necesario identificar qué elementos aparecen en cada una de las construccionescomo por ejemplo, los elementos secundarios en el triángulo o teoremas que consideran estos elementos para la construcción de circunferencias específicas. Como se ha señalado, el objetivo es identificar teoremas básicos previos y considerarlos desde ellos en la construcción de otros posteriores existentes desde su aparición, y las respectivas consecuencias.

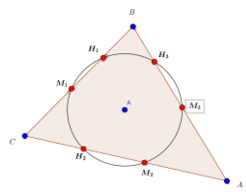
En este taller se presentan tareas que provienen de trabajos desarrollados en investigaciones de quien los propone, las cuales dan sentido a cada conexión. También, se mostrarán como estas tareas pueden ser abordadas en la formación inicial de profesores o en las aulas de la educación secundaria con la finalidad de estudiar las consecuencias en el aprendizaje del saber geométrico presente. El asistente, discutirá temas enmarcados en los dominios de la geometría. En este sentido, se han identificado necesidades de concepciones geométricas clásicas que están implícitamente abordados en los teoremas del siglo XII al XVIII: el paso de construcciones de iniciales clásicas a la consecuencia de ellos en las construcciones posteriores, el análisis del teorema, y la transición entre los diferentes teoremas finales.

4. Tareas propuestas en el taller

A continuación, se presentan algunas actividades que se trabajarán en el taller. El participante obtendrá sus conclusiones al comparar el cómo se establece la geometría presentada en el currículo escolar o la formación de profesores y el uso de esos contenidos para la construcciones de los teoremas considerados para este taller y reflexionará como los primeros influyen sobre el otro. Se cree necesario, por quien realiza el taller, el estudio de tareas de referencia como las que siguen, con el propósito de analizar y discutir su efecto en la enseñanza de la geometría.

Tarea 1

ISBN 978-84-945722-3-4

Dado un triángulo ABC, los pies de altura y los puntos medios a sus lados. ¿Existirá una circunferencia que contenga dichos puntos?, y si consideramos adicionalmente los tres puntos de Euler, ¿contendrá a los nueve puntos ahora esta circunferencia?. ¿Cómo obtener el centro de ella?. Explicar la respuesta y construir.	

Observación. Se pueden extender las conclusiones y construcciones anteriores a nuevas conjeturas que llevan a nuevas consecuencias que terminan en nuevos teoremas para comprobarlas en sus construcciones.

Cuestionamientos

¿Es posible conectar, con uso de la geometría dinámica, los elementos básicos de la geometría clásica con los teoremas de Feuerbach y Euler por parte del profesor, para fundamentar su respuesta?, ¿qué propuestas son utilizadas por el profesor para resolver el problema?, ¿qué aprendizaje se extiende?, ¿qué se privilegia con esta tarea?. En la tarea es posible resolver en una dimensión geométrica y su análisis así como en instituciones tales como la escuela o la universidad. En efecto, la tarea involucra en su enunciado una figura geométrica (triángulo), puntos medios, alturas, circunferencia así como concepciones nuevas como los segmentos y puntos de Euler. Luego, es posible abordar la pregunta desde un dominio geométrico (encontrando la solución mediante la construcción), o en un dominio intuitivo desde el uso del software Geogebra, mediante la formulación del teorema de Poncelet que cumple con la hipótesis del teorema de Euler.

Tarea 2

Dado un triángulo ABC, su triángulo ex-tangencial y su triángulo ortico. ¿Existirá un punto que sea centro de homotecia de estos dos últimos?, y si consideramos adicionalmente las tres circunferencias ex-inscritas al triángulo dado, ¿cómo son los lados	

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

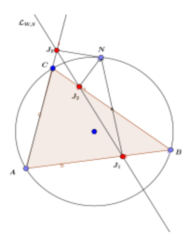
del triángulo ex-tangencial respecto a las circunferencias ex-inscritas ?. Explicar la respuesta y construir.	

Observación. Al igual que en la tarea 1, se pueden extender las conclusiones y construcciones a nuevas conjeturas que llevan a nuevas consecuencias que terminan en nuevos teoremas comprobables en sus construcciones.

Cuestionamientos

En este caso, los cuestionamientos consideran distinguir entre homotecia, y luego, reflexionar sobre las construcciones secundarias necesarias. Parte 1: ¿Qué caracteriza el trabajo en cada caso?, ¿Cómo se garantiza que la construcción realizada es correcta en cada caso? Identifique propiedades que aparecen en la veracidad de su trabajo. Parte 2: Identifique dos niveles escolares en que sería posible realizar este trabajo, atendiendo a las distintas formas de abordar la tarea en parte 1. Justificar la respuesta. ¿Cómo plantear la tarea en cada caso?, ¿qué elementos distingue y/o diferencia en cada una (definiciones, teoremas, trabajo de construcciones, uso de TIC, etc.)?. La situación es abordada desde un dominio con preguntas de la primera parte, las respuestas permiten evidenciar la necesidad de considerar los elementos básicos previos de la geometría clásica. Mientras que, en las preguntas de la parte 2, la idea es mostrar el rol de las respuestas a partir de la posición del profesor, y con esto, justificar validando los teoremas con la construcción. Estas cuestiones esenciales permiten analizar las implicancias en la formación de profesores.

Tarea 3

Dado un triángulo ABC y la circunferencia circunscrita a él, ¿es posible obtener perpendiculares a los lados del triángulo desde un punto de la circunferencia?, y si ahora se tienen los tres puntos en el triángulo que son los pies de esas tres perpendiculares respectivas, ¿serán ellos no–colineales?. Explicar la respuesta y construir.	

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Cuestionamientos

¿En qué nivel escolar es posible tratar este problema?, ¿por qué?, ¿qué sucede con el punto encontrado?, ¿qué implicancias tiene el "determinar los puntos" para construir con Geogebra?. En esta situación se introduce el triángulo Pedal, y se presentan las consecuencias del teorema. Se espera hacer un cuestionamiento cuando el punto no pertenece a la circunferencia circunscrita; cómo se enseña la circunferencia circunscrita, a pesar de la insistencia por introducir la geometría dinámica en el currículo escolar. También, nos cuestionamos si la construcción continua es abordada en la formación inicial de profesores y los posibles paradigmas que esto puede producir.

5. Conclusiones

Para finalizar, se espera que los participantes reflexionen sobre la geometría dinámica personal puesta en juego a la hora de resolver tareas considerando los teoremas de la geometría clásica entre los siglos XII y XVIII, analizando ambas dmensiones con el propósito de pensar en los estudiantes y en el éxito del aprendizaje de los saberes geométricos en juego. Además, reflexionar sobre la importancia de proponer a los estudiantes actividades en los cuales deban recurrir a diversas construcciones para su resolución, articulando las componentes geométricas clásicas previas y aprovechando la riqueza que significa usar esos contenidos clásicos en teoremas nuevos conocidos de la geometría y su implicancia en la construcción del conocimiento. Esta propuesta de la geometría dinámica para la geometría clásica nos proporciona una herramienta útil para analizar los aprendizajes y al proceso de transposición; en particular, es conveniente que sea considerado en la formación inicial de un profesor y lo que pone en juego en su enseñanza. Asimismo, gracias a la evidencia de lo que se quiere discutir en el taller, existen fenómenos ligados a la enseñanza del análisis de la geometría que no siempre son aprovechados. También es de interés enfrentar la transposición didáctica para una construcción que potencie el aprendizaje y posteriormente la enseñanza de la geometría. En una dimensión teórica se espera que los profesores articulen la construcción adecuada en sus alumnos.

Referencias bibliográficas

ISBN 978-84-945722-3-4

Alsina, C., & Fortuny, J. (1997), *¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO*, Madrid: Síntesis.

Gamboa, R. & Ballestero, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. Revista Electrónica Educare Vol. XIV, 2, 125-142.

Bressan, A. & Bogisic, B. (2000), *Razones para enseñar Geometría en la Educación Básica. Mirar, construir, decir y pensar*… Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.

Garcia, S. & Lòpez, O. (2008). La enseñanza de la geometría. Colección: Materiales para apoyar la práctica educativa. Instituto nacional para la evaluación de la educación, pag 41.

Levy, S. (1983). Introducción a la geometría moderna, Nueva York, Libros continental.

Moriena, S. & S. Scaglia (2003), "Efectos de las representaciones gráficas estereotipada en la enseñanza de la Geometría", *Educación Matemática*, vol. 15, núm. 1.

Van, P. (1986). El problema de la comprensión en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría. Tesis doctoral, Universidad Real de Utrecht.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-407

CREANDO HUMOR PARA EL AULA DE MATEMÁTICAS

Mónica Guitart-Coria - Pablo Flores Martínez
mguitart@fing.uncu.edu.ar - pflores@ugr.es
Universidad Nacional de Cuyo, Argentina - Universidad de Granada, España

Núcleo temático: III. Aspectos socioculturales de la Educación Matemática
Modalidad: T
Nivel educativo: No específico
Palabras clave: Humor, Enseñanza, Aprendizaje, Matemáticas

Resumo

El fracaso escolar en Matemáticas está muy extendido, y una de sus razones está en la actitud que tienen los alumnos hacia las Matemáticas. Crear un clima de clase que evite actitudes defensivas hacia las Matemáticas es una de las responsabilidades de los profesores. Con este fin proponemos atender al humor como recurso educativo para la enseñanza de las Matemáticas.

Los tipos de humor, las situaciones humorísticas y la forma de implementarlos son de interés para quienes utilicen el humor como recurso metodológico. Por esto, es necesario conocer las funciones que el humor puede cumplir en el aula y tener claro cuál es la intención del docente al utilizarlo, a fin de reconocer las estrategias que producen mayores beneficios.

Proponemos recorrer el humor desde sus fundamentos para crear tareas matemáticas que partan de situaciones humorísticas propias. La intención es trabajar en la creación de situaciones humorísticas como: anécdotas, memes, piropos, entre otras posibles propuestas. Esto será especialmente motivador, si se emplean respuestas imaginativas de alumnos, anécdotas, términos polisémicos, homónimos, metáforas y comparaciones, conceptos/términos de fonética chocante, ...

Presentación

Con muy buenas intenciones todo estudio sobre el humor supone partir de una definición del mismo, pero no hay una definición consensuada entre los investigadores, aunque sí hay teorías y funciones que ayudan a conocerlo.

Comenzaremos haciendo referencia a las teorías generales para luego ubicar teóricamente el uso del humor en la educación y sus múltiples vertientes.

Las teorías generales del humor son:

- *Teorías de la superioridad/denigración*

ISBN 978-84-945722-3-4

Estas teorías han sido denominadas de superioridad, menosprecio, agresión o degradación porque, bajo esta visión, el humor es una forma de agresión.

Desde la Antigüedad se ha planteado al humor como una forma de burla y agresión, con las propuestas teóricas de Platón y Aristóteles. Platón afirma que la risa nace de la malicia, porque nos reímos de lo ridículo en otras personas, sintiendo deleite en lugar de piedad al ver las desgracias. De manera similar, Aristóteles contempla la comedia como la imitación de la gente que es peor que la media, viéndola como una especie de fealdad y considera que las personas que llevan el humor al exceso son considerados vulgares bufones, tratan de ser graciosos a toda costa y, buscan más despertar una carcajada que hablar con propiedad y evitar causar dolor al blanco de sus chistes.

- *Teoría psicoanalítica*

  La visión psicoanalítica del humor de Freud es la teoría más influyente en el estudio del humor durante la primera mitad del siglo XX y da sustento a las teorías de alivio/descarga frente a reserva/control.

  Freud (2005a), en su libro "El chiste y su relación con el inconsciente", toma de Spencer (1860) la idea de que la risa sirve para descargar tensión nerviosa excesiva. Cuando la tensión acumulada en el sistema nervioso no se necesita, debe liberarse de alguna forma y, la risa es la manera de lograrlo.

- *Teorías de la incongruencia*

  Las teorías de la incongruencia del humor se focalizan, específicamente, en la cognición. Estas teorías sugieren que la percepción de incongruencia es el determinante crucial para saber si algo es o no humorístico.

  Muchos teóricos han propuesto la idea de que la incongruencia es el fundamento del humor. Será esta teoría la que fundamente cualquier propuesta de humor en el aula.

Las funciones del humor que mencionaremos no intentan ser exhaustivas y, en muchos casos, se dan de manera simultánea y se superponen en sus acciones:

- Función social
- Función de distensión y de diversión
- Función agresiva / defensiva
- Función intelectual

ISBN 978-84-945722-3-4

- Función creativa
- Función motivadora
- Función comunicacional
- Función psicológica
- Función terapéutica
- …

El humor ocupa un lugar muy especial en nuestras vidas ya que es una característica humana única, cuyo comportamiento es crítico para el pensamiento, la comunicación y la interacción social (Goel y Dolan, 2001, p.237). Además, el humor involucra diversos aspectos del ser humano, muchos de los cuales repercuten a la hora de aplicar el humor en el aula. Trabajamos con personas multifacéticas y complejas, por lo que es necesario un estudio profundo de sus características frente al humor.

El humor es un elemento que acompaña nuestras vidas en múltiples aspectos, y lo hace de manera compleja, interna y externamente, interrelacionando e integrando factores de distinta índole. Nos preguntamos entonces, ¿qué dimensiones del ser humano se ven involucradas en el humor?... ¿La dimensión biológica? ¿La psicológica? ¿La social? ¿La filosófica? ¿La cultural y sus múltiples implicaciones? ¿La histórica? ¿La antropológica? ¿La religiosa?... La respuesta es clara: Todas ellas y algunas más.

El humor se plantea a través de experiencias con una lógica que pueda ser entendida por el receptor y tras plantear una introducción y un desarrollo, presenta una conclusión (parcial o final) que rompe, de manera coherente o no, esta lógica. Esta situación se ilustra claramente en el siguiente chiste: El 86% de todas las víctimas de delitos sexuales y asesinatos, son vecinos, amigos, ex amigos o parientes de los atacantes. Además, el 70% de estos delitos ocurren de día, en la casa o en sus cercanías. La conclusión que se dio en algunos artículos periodísticos (y esperemos que haya sido en tono humorístico) fue: "Uno está más seguro en un parque público, entre extraños y por la noche, que en casa y en la cama".

El chiste supone una actividad de la inteligencia, una exploración del mundo exterior, de la que se extraen algunos rasgos, que se exageran, o ingresan en nuevas e ingeniosas combinaciones, capaces de sorprender y arrancar carcajadas.

ISBN 978-84-945722-3-4

En el análisis psicoanalítico que Freud (2005b) hace del humor, destaca su carácter espontáneo ya que, al surgir de una actuación no planificada, hace que incida directamente en el subconsciente. Watzlawick (1994), va más lejos al proponer recurrir al humor para tratar de incidir sobre aspectos no previstos por el interlocutor, aunque difiere con Freud que considera al lenguaje del chiste en un solo sentido, del inconsciente a la conciencia, mientras que Watzlawick lo ve como un camino de ida y vuelta entre el inconsciente y la conciencia.

Al comunicarnos a través del humor, éste puede emplearse en el aula, como indicador de la imagen social de las Matemáticas (Flores y Moreno, 2011), partiendo de las emociones y las características propias de los estudiantes (Guitart-Coria, 2012). El humor permitirá tener una nueva visión de las Matemáticas, más cercana y más aplicada a cuestiones cotidianas y cercanas a los afectos.

Todo esto supone ir más allá. Más allá de la enseñanza de conceptos puros, apuntando a ellos con fines actitudinales; no se trata sólo de suministrar instrucción, sino que pretende que ésta influya en la manera de contemplar el mundo en el que el alumno está sumergido, afrontándolo de manera más científica, analítica, basada en valores y con carácter socializador. Por tanto, para implementar esta propuesta, no basta con exponer de manera suficientemente clara los diversos conceptos, sino que el profesor tiene que tratar de que estos conceptos influyan en la vida del alumno, interpretando adecuadamente las informaciones referentes al concepto que se estudia, en situaciones reales. Sabemos que muchos docentes lo intentan y muchos lo logran, pero... ¿podrá el humor servir para este objetivo?, ¿podremos calar más profundamente desde lo afectivo y lo humorístico?

Planteado así, el uso del humor permite diseñar actividades para el aula que contengan el concepto que se desea enseñar dentro de una viñeta, una historieta, una anécdota, un meme, …, generando un ambiente distendido con actitud lúdica y con una fuerte intención de crear imágenes que permitan a los estudiantes reflexionar y analizar la temática (Beltrán-Pellicer, 2016).

Será necesario que los mismos docentes vivan la experiencia, partiendo de comprender qué se entiende por humor, cuáles son las principales funciones que éste cumple al usarse en el aula y analizando los distintos tipos de situaciones humorísticas con las que podemos trabajar en la actualidad.

ISBN 978-84-945722-3-4

Situaciones humorísticas

Zenteno et al. (1998-1999, pp.1319-1320) contrastan la comunicación lingüística normal y el proceso generativo del humor lingüístico: El proceso comunicativo que se utiliza para la generación del humor tiene una modalidad similar a la de la comunicación lingüística normal, con sus componentes: *formal* (fono-morfo-sintáctico), *funcional* (semántico-pragmático-contextual) y *cognitivo* (directamente relacionado con el funcional y el intelecto).

Podemos ver que en todo proceso comunicativo los participantes (en nuestro caso, los alumnos) expresan e interpretan los significados de los enunciados, activando y operando esquemas cognitivos comunes que llevan a una convergencia comunicativa. Cuando los esquemas son aparentemente comunes, pero no coincidentes, derivan en una divergencia comunicativa, que puede generar humor.

En síntesis, podemos decir que los procesos comunicacionales (normal y humorístico) siguen un camino bastante similar hasta que llegan a un punto bifurcatorio, llamado *foco de ambigüedad*, en que necesariamente se debe optar por uno de los posibles caminos, el coherente con los sucesos de la realidad que llevan a la progresión normal de la comunicación o los sucesos incongruentes y/o absurdos que son potenciales generadores de humor.

El proceso generador de humor pone de manifiesto aproximaciones cognitivas que privilegian el funcionamiento de los signos lingüísticos como *activadores de significados*, constituyendo una propuesta teórica alternativa a los modelos descriptivos clásicos que dan cuenta del lenguaje natural humano, como *medio de comunicación*.

Por esto, proponemos recorrer al humor como medio de comunicación que activa significados desde desenlaces inesperados, pero también lógico, conociendo sus fundamentos para crear situaciones humorísticas propias. La propuesta es trabajar en la creación/búsqueda de situaciones humorísticas como: chistes, anécdotas, memes, piropos, analogías, historietas, cuentos, versiones humorísticas de cuentos, carteles, entre otras posibles propuestas. Además de capitalizar las experiencias del aula como: respuestas imaginativas de alumnos, anécdotas, términos polisémicos, homónimos, metáforas y comparaciones, conceptos/términos de fonética chocante, ...

Para lograr este objetivo, se debe profundizar sobre el papel del humor en la enseñanza de las Matemáticas (Flores, 2003, Flores y Moreno, 2011, Guitart-Coria, 2012, Guitart-Coria y

ISBN 978-84-945722-3-4

Flores, 2002 y 2008), mostrando fuentes de humor que encierran Matemáticas y sugiriendo campos de utilización didáctica de estas fuentes.

Es importante que el docente que desea utilizar el humor en sus clases promueva actividades que sean desarrolladas de una forma interactiva, facilitando el intercambio continuo de información entre los participantes.

El docente que utilice el humor debe:

a) Apreciar el papel afectivo y cognitivo del humor
b) Advertir cómo el humor refleja lo que la sociedad percibe de las Matemáticas
c) Mejorar su disposición a llevar el humor al aula de Matemáticas para explotar sus funciones y permitir un aprendizaje más activo y duradero, a la vez de promover un ambiente agradable sin perder rigor ni seriedad.
d) Animarse a incluir el humor en sus clases, de manera planificada, reflexiva y con la clara intención de educar.

Análisis de las situaciones humorísticas

Al trabajar situaciones humorísticas se debe definir si el objetivo es sólo divertir, relajar, cambiar el ambiente de clase o se desea usar el humor como un recurso didáctico específico. Si el objetivo es este último, se deben seleccionar aquellas situaciones que favorezcan un aprendizaje creativo, ameno y participativo.

El uso de situaciones humorísticas en clase exige un análisis meticuloso a fin de que apunten precisamente al logro de los objetivos y no sean elementos distractores, aunque hay que tener presente que cada propuesta humorística tiene un carácter subjetivo.

Una apropiada utilización del humor requiere una labor previa de selección y planificación, teniendo en cuenta, especialmente: la edad y madurez de los alumnos, el nivel de complejidad y su relación con los contenidos curriculares.

Freud (2005a) describe los chistes con estas características:

- Conducta activa del sujeto
- Juicio desinteresado
- Apareamiento de lo heterogéneo
- Contraste de representaciones

ISBN 978-84-945722-3-4

- Sentido en lo desatinado
- Sucesión de asombro y esclarecimiento
- Peculiar brevedad

Estas descripciones suponen la presencia de un contraste de representaciones en cada situación humorística, es decir, deben darse al menos dos representaciones en conflicto, cada una con una lógica interna que compartan el emisor y el receptor. Así, en las situaciones humorísticas, aparecerán al menos, los siguientes elementos:

1. *Una lógica familiar* (Planteo). Lógica compartida entre emisor y receptor
2. *Expectativas naturales lógicas* (Nudo)
3. *Solución inesperada pero también lógica* (Desenlace). Lógica compartida entre emisor y receptor pero que sorprende a este último.

Partiendo de la idea de Watzlawick (1992) de que el chiste permite la comunicación con el inconsciente, es importante analizar los posibles significados que se le pueden atribuir a los chistes usados en clase, y con ello habremos profundizado la forma en que pueden interactuar los alumnos y el docente involucrados en esta comunicación.

Reflexiones finales sobre el uso del humor en el aula

Si bien el uso del humor en el aula es menospreciado por no ser algo formal, su estudio es complejo y muy serio, ya que supone un profundo análisis de diversos aspectos.

El término humor puede referirse a un estímulo con el propósito de producir una respuesta humorística, un proceso mental (percepción de una incongruencia divertida) o una respuesta (risa, excitación). El humor involucra aspectos cognitivos, emocionales, de comportamiento, psicofisiológicos y sociales (Martin, 2001, citado por Bennett y Lengacher, 2006, p.62).

Vemos, entonces, que fundamentar el humor es complejo desde su concepción, por lo que es necesaria una propuesta para enmarcar el uso del humor en el aula desde las perspectivas que más influyen en él o que más situaciones de conflicto pueden plantear.

La experiencia propia, la opinión de los alumnos y los informes realizados por los observadores de nuestras investigaciones hacen pensar en la efectividad del humor para lograr el cumplimiento de los objetivos propuestos en las clases de Matemáticas.

A partir de los resultados, pensamos que la educación puede verse mejorada con propuestas humorísticas y que para comprobar esto es necesario un análisis de los factores que permiten lograr este objetivo, ya que el humor en la educación puede presentarse de múltiples maneras y en diversos ámbitos, pero para utilizarlo no hace falta ser gracioso ni humorista, basta tener sentido del humor y pasión pedagógica.

Referencias bibliográficas

Beltrán-Pellicer, P. (2016). Utilizando memes con tus alumnos. *Números, 91*, 129-134.

Bennett, M. y Lengacher, C. (2006). Humor and Laughter may Influence Health. I. History and Background. *eCAM, 3*(1), 61-63.

Flores, P. (2003). *Humor gráfico en el aula de Matemáticas*. Granada: Arial.

Flores, P. y Moreno, A. (2011). *Matemáticamente competentes… para reír*. Barcelona: Graó.

Freud, S. (2005a). El chiste y su relación con el inconsciente. En S. Freud, *Obras Completas* (Tomo I, pp.1029-1167). Buenos Aires: El Ateneo.

Freud, S. (2005b). El humor. En S. Freud, *Obras Completas* (Tomo III, pp.2997-3000). Buenos Aires: El Ateneo.

Goel, V. y Dolan, R. (2001). The functional anatomy of humor: segregating cognitive and affective components. *Nature Neuroscience, 4*(3), 237-238.

Guitart-Coria, M. (2012). *Permitido reír… Estamos en clase. El humor como recurso metodológico en el aula de Estadística* (Tesis Doctoral). Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina.

Guitart-Coria, M. y Flores, P. (2002). Humor gráfico para la enseñanza y el aprendizaje del azar. *SUMA, 42*, 81-90.

Guitart-Coria, M. y Flores, P. (Julio, 2008). Permitido reír... Estamos en clase. En J. García Cerrada (Director Comité Organizador). *20th International ISHS Humor Conference*. Conferencia llevada a cabo en Universidad de Alcalá, Alcalá de Henares.

Martin, R. (2001). Humor, laughter, and physical health: methodological issues and research findings. *Psychol Bull, 127*, 504-519.

Spencer, H. (1860). Fisiología de la risa. En H. Spencer, Ética de las prisiones, pp.397-415. Madrid: La España Moderna.

Watzlawick, P. (1994). *El lenguaje del cambio*. Barcelona: Herder.

Zenteno, C., Vivanco, C. y Vivanco, H. (1998-1999). Una aproximación cognitivo-lingüística al acto humorístico. *Boletín de Filología, Tomo XXXVII*, 1308-1321.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-417

ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS: UN ESTUDIO CON PROFESORES DE EDUCACIÓN PREESCOLAR Y PRIMARIA

Maria Elizabeth Ramírez[1] – Angela María Restrepo[2] – Sandra Milena Ortiz[3]
me.ramirez12@uniandes.edu.co – angela.restrepo@uexternado.edu.co – samiorgua@gmail.com
[1]Universidad de los Andes, Colombia – [2]Universidad Externado de Colombia – [3]I.E.D. La Plazuela de Cogua, Tutora Programa Todos a Aprender, Colombia

Núcleo temático: Aspectos socioculturales de las matemáticas
Modalidad: T
Nivel educativo: No específico
Palabras clave: Actitudes, matemáticas, profesores, agrado

Resumen

A partir de la definición de actitud presentada por Gómez-Chacón (2000) y de la descripción hecha por Auzmendi (1992) de los componentes mencionados en ella, se puede decir que las actitudes hacia las matemáticas son una preparación o disposición anticipada propiciada desde lo cognitivo, por ideas, creencias, o percepciones; desde lo afectivo, por sentimientos agradables o desagradables y desde lo comportamental, por una disposición a reaccionar de cierta forma, ante las matemáticas como disciplina, o ante su aprendizaje. Teniendo en cuenta esta definición y esta caracterización, quisimos conocer y analizar las actitudes hacia las matemáticas que tienen profesores de preescolar y de primaria. Para ello construimos un instrumento que nos permita caracterizar sus actitudes y realizaremos entrevistas a algunos de estos profesores. En el taller quisiéramos presentar tanto los instrumentos que hemos diseñado, como los datos recogidos hasta el momento, con el fin de analizarlos y discutirlos con los participantes. Este análisis nos debe permitir no solo caracterizar las actitudes de los profesores de primaria hacia las matemáticas, sino poder hacer algunas recomendaciones acerca de su formación inicial.

Introducción

Las décadas de los setenta y ochenta comprenden un periodo reconocido por diferentes autores como aquel en el que las investigaciones en educación matemática, centradas principalmente en caracterizaciones de orden racional y cognitivo (Gil, Blanco, & Guerrero, 2005; Palacios, Arias & Arias, 2014), empezaron a enfocarse también en cuestiones afectivas. Esta diversificación se fue dando en la medida en la que dichas cuestiones se fueron

ISBN 978-84-945722-3-4

posicionando como aspectos relevantes en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Gómez-Chacón, 2000, en Gil *et al*., 2005); como lo menciona McLeod 1992 (...) "Las cuestiones afectivas juegan un rol central en el aprendizaje de las matemáticas y su enseñanza" (p. 575).

Dentro de los factores afectivos, junto a las creencias y las emociones, se encuentran las actitudes (McLeod, 1992), las cuales "…han ocupado un papel preponderante en la educación matemática por el número de investigaciones que han generado" (Palacios *et al*., 2014, p. 68). Estas investigaciones se han centrado en su mayoría, en estudiar las actitudes hacia las matemáticas por parte de los estudiantes (Auzmendi, 1992; Mato & De La Torre, 2010; Palacios, Arias, & Arias, 2014); sin embargo, se pueden encontrar algunos trabajos alrededor de las actitudes hacia las matemáticas por parte de los profesores. Dentro de estos se encuentran aquellos motivados por el estudio de la relación existente entre las actitudes de los profesores hacia esta disciplina y las de sus estudiantes o su rendimiento (Aiken, 1972; Fennema & Sherman, 1976; Cockcroft, 1982 y Relichy Way, 1994; Gamboa-Araya, 2016), y otros interesados por hacer contribuciones a los procesos formativos y de enseñanza por parte de los profesores partiendo del hecho de que esta relación es muy estrecha o fuertemente positiva (Gómez-Chacón, 2002; Sáenz, 2007; Cézar, 2016).

Este taller pretende, primero, presentar una definición de las categorías que se escogieron para describir y caracterizar las actitudes de los profesores hacia las matemáticas y segundo, poder analizar con los asistentes la información recogida hasta el momento. Esto nos debe poder permitir ir más allá, estudiando las posibles situaciones subyacentes a estas, y poder hacer más adelante unas recomendaciones en cuanto a la formación matemática de los docentes, particularmente de los docentes de primaria. En este documento se presentan en primer lugar los referentes teóricos, en segundo lugar la metodología, en tercer lugar los resultados que se han obtenido hasta el momento. Por último, lo que se busca discutir en el taller con los participantes.

Marco conceptual

En la literatura se encuentran múltiples definiciones de actitud que han sido construidas desde diferentes perspectivas; sin embargo, tal como lo exponen Mato y de la Torre (2009) desde

ISBN 978-84-945722-3-4

Eagly y Chaiken (1998) y Zabalza (1994), "…existe consenso entre los teóricos en afirmar que la actitud es una predisposición psicológica para comportarse de manera favorable o desfavorable frente a una entidad" (p. 198). En esta misma línea, Gómez-Chacón (2002) desde Hart (1989) la define como:

> …una predisposición evaluativa (es decir, positiva o negativa) que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento. Consta, por tanto, de tres componentes: una cognitiva que se manifiesta en las creencias subyacentes a dicha actitud, una afectiva que se manifiesta en los sentimientos de aceptación o de rechazo de la tarea o de la materia, y una intencional o de tendencia a un cierto tipo de comportamiento. (p. 5)

Para la elaboración de un instrumento que permitiera identificar las actitudes de los profesores hacia las matemáticas, nos basamos en el instrumento construido por Auzmendi (1992) en torno a cinco factores, que aún son los que con mayor frecuencia se emplean para el mismo fin. Estos cinco factores son: valor - utilidad, agrado, ansiedad, motivación, y seguridad - confianza. Al estar centrado en las actitudes de los profesores hacia las matemáticas y no en las de los estudiantes, se hizo una adaptación de estos factores configurándolos en categorías de análisis, las cuales son: (i) valor y utilidad, (ii) agrado y motivación, (iii) ansiedad, y (iv) seguridad - confianza.

A continuación presentamos la definición de las cuatro categorías de análisis.

1. **Valor y utilidad de las matemáticas**

Es el provecho o fruto que un profesor considera puede obtener de las matemáticas en diferentes contextos y escenarios. Hace referencia al valor que le otorga a esta disciplina en la cotidianidad, en la formación profesional o en la vida profesional tanto suya como de sus educandos. De la utilidad que el profesor le atribuya a esta disciplina, depende el interés que genere por el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, así como el enfoque que le dé a cada una de las actividades que le propone a sus estudiantes.

2. Agrado y motivación hacia las matemáticas

Es la complacencia o gusto que un profesor siente por las matemáticas o por la asignatura en su cotidianidad, en su formación profesional o en su vida profesional tanto por su aprendizaje

ISBN 978-84-945722-3-4

como por su enseñanza. Está compuesto por factores intrínsecos y extrínsecos que determinan en cierta medida las acciones de un profesor frente a las matemáticas. Para García (2010), "La motivación para enseñar y para seguir enseñando es una motivación intrínseca, ligada fuertemente a la satisfacción por conseguir que los alumnos aprendan, desarrollen capacidades, evolucionen, crezcan" (p. 31).

3. Ansiedad hacia las matemáticas

Es un estado de intranquilidad, angustia o inquietud vivenciado por un profesor frente a las matemáticas o a la materia en la que esta disciplina se aborda. En general, es un sentimiento de impotencia, tensión o pánico que se presenta cuando se le pide a alguien que realice una tarea matemática (Gresham, 2009). Para este caso, es un sentimiento negativo que se puede generar en un profesor en su cotidianidad, en su formación profesional o en su vida profesional, cuando deba enfrentarse a tareas enmarcadas en esta disciplina tanto en el marco de su enseñanza como de su aprendizaje.

4. Seguridad - confianza

Es una esperanza firme o convicción que tiene un profesor de poder resolver problemas o desarrollar tareas matemáticas. Hace referencia al cómo asume estos retos en su vida cotidiana, académica y profesional. Si la forma de asumir estos retos por parte del profesor lleva una carga de desconfianza generada por el temor a equivocarse, a las preguntas de los estudiantes y a no saber responder de manera adecuada, es posible que se aferre a las prescripciones del libro de texto, a lo que otros dicen y a las planificaciones utilizadas por años (López, 2010), lo que está relacionado directamente con la creencia que se tenga de la propia competencia matemática (McLeod, 1992).

Metodología

La naturaleza de este estudio es de tipo mixto, ya que se combinarán métodos cuantitativos y cualitativos. Con el fin de poder conocer y analizar las actitudes de los profesores de preescolar y primaria hacia las matemáticas, se construyó un cuestionario orientado hacia las cuatro categorías antes descritas (ver Anexo 2). Este cuestionario se complementará con

ISBN 978-84-945722-3-4

entrevistas a participantes que lo hayan contestado y acepten ser contactados. Puesto que este proyecto busca investigar acerca de las actitudes de los docentes hacia las matemáticas, las entrevistas y los cuestionarios permiten obtener información desde diferentes perspectivas que podrá ser triangulada (Maass & Schlöglmann, 2006). Al respecto, McLeod (1992) señala que investigaciones sobre actitudes proporcionan una imagen amplia y bastante indistinta de una gama limitada de respuestas afectivas a las matemáticas.

Para desarrollar esta investigación contamos con la participación de profesores de preescolar y de primaria de colegios oficiales del departamento de Cundinamarca, Colombia, que tienen a cargo (entre otras) la asignatura de matemáticas. El cuestionario fue enviado virtualmente y lo contestaron 48 docentes, de los cuales 43 son mujeres y 5 hombres. De los 48 docentes, 7 son normalistas superiores de formación inicial, 1 psicóloga y los demás son licenciados.

Para desarrollar la parte cuantitativa de este estudio construimos un cuestionario usando una escala tipo Likert. Este instrumento se compone de 30 enunciados de elaboración propia entre positivos y negativos con cuatro opciones de respuesta codificadas entre 1 y 4 (totalmente en desacuerdo = 1; parcialmente en desacuerdo = 2; parcialmente de acuerdo = 3; totalmente de acuerdo = 4), siendo el mejor puntaje 4 en el caso de los ítems positivos y 1 en el caso de los ítems negativos. Los enunciados del instrumento fueron construidos de manera que pudieran dar información acerca de las cuatro categorías escogidas. Para ello se analizaron instrumentos que ya habían sido utilizados en otras investigaciones acerca de las actitudes hacia las matemáticas, se tomaron algunas preguntas y se adaptaron al lenguaje de los docentes de preescolar y primaria y a los intereses de nuestro estudio.

El instrumento fue piloteado con una población similar a la contestó el cuestionario. Su fiabilidad fue determinada mediante el cálculo del coeficiente Alfa de Cronbach (de 0,77) y el índice de homogeneidad tanto de cada pregunta como por categorías. Esto nos permitió darnos cuenta de preguntas que no nos aportaban información (que fueron eliminadas), así como de preguntas que quizás por su redacción no fueron comprendidas completamente, por lo cual fueron reescritas. Esto también lo corroboramos con dos expertos en análisis cuantitativo y en educación que revisaron tanto el instrumento y las preguntas, como los resultados del pilotaje.

Las entrevistas serán realizadas en los próximos meses y nos darán más información sobre la manera como se relacionan estos docentes con las matemáticas y de qué manera influyen sus

ISBN 978-84-945722-3-4

actitudes hacia las matemáticas en su práctica pedagógica.

Resultados y objetivos del taller

A continuación presentamos brevemente los resultados arrojados por el cuestionario, seguido de lo que buscaremos trabajar en el taller.

Valor y Utilidad

Por el número de preguntas (6), el menor puntaje que un profesor puede obtener tras responder es 6 y el mayor 24. A mayor puntaje, mayor es el valor y utilidad que le adjudican los profesores a las matemáticas y a su enseñanza. Partiendo del valor mínimo entre las puntuaciones que es 15 y el máximo 24, el promedio obtenido es de 20,7 y la desviación estándar es de 2,35. La mayoría de las puntuaciones se ubican por encima de la media (29 puntuaciones) lo que representa un sesgo a la izquierda en la distribución. Los puntajes obtenidos por los profesores se agrupan dentro de la media y la desviación estándar entre 19 y 23 puntos y dentro de este intervalo se ubica el 66% de los datos. El valor del conjunto de datos que registra una mayor frecuencia se encuentra en el rango de 21 a 23 y es 22 (ver Anexo 1), lo cual indica que la mayoría de profesores está entre total y parcialmente de acuerdo con que las matemáticas y su enseñanza tiene un valor y utilidad. Como ya se dijo en la definición de esta categoría, de la utilidad que el profesor le atribuya a esta disciplina, depende el interés que genere por el aprendizaje de las matemáticas, así como el enfoque que le dé a cada una de las actividades que le propone a sus estudiantes.

Agrado y motivación

Dado el número de preguntas (8) el menor puntaje posible es 8 y el mayor 32. A mayor puntaje mayor es el agrado y la motivación que sienten los profesores por las matemáticas y su enseñanza. Partiendo de la puntuación mínima que es 8 y la máxima que es 32, el promedio es de 28,9 y la desviación estándar es de 4,32. La mayoría de las puntuaciones se ubican por encima de la media (31 puntuaciones) lo que representa un sesgo a la izquierda en la distribución. Los puntajes obtenidos por los profesores se agrupan dentro de la media y la desviación estándar entre 25 y 33 puntos (ver Anexo 1); de hecho el 83% de las puntuaciones quedan dentro de este intervalo. El valor del conjunto de datos que registra una mayor

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

frecuencia es 31 y se encuentra en el rango de 30 a 32 lo cual indica que a la mayoría de profesores les agrada y les motiva las matemáticas y su enseñanza. Así como en la categoría anterior, un alto agrado y motivación por las matemáticas hará que el docente se sienta satisfecho y quiera seguir logrando que sus estudiantes aprendan.

Ansiedad

En esta categoría el menor puntaje posible es 10 y el máximo 40 en razón al número de preguntas (10). A menor puntaje, mayor es la ansiedad que las matemáticas y la enseñanza le produce a los profesores. Partiendo del valor mínimo que es 16 y el máximo 33, el promedio de la puntuaciones es de 23,66 y una desviación estándar de 4,24. La mitad de las puntuaciones se ubican por encima del promedio (24 puntuaciones). Los puntajes obtenidos por los profesores se agrupan dentro de la media y la desviación estándar entre 20 y 27 puntos; de hecho el 58% de las puntuaciones quedan dentro de este intervalo. El valor del conjunto de datos que registra una mayor frecuencia se encuentran en el rango de 18 a 20 (28). La distribución de los datos muestra que en general los profesores no manejan un alto grado de ansiedad ya que no se observa un sesgo a izquierda, pero tampoco se puede concluir que manejan un bajo grado de ansiedad ya que la distribución no tienen un sesgo a derecha. La ansiedad en un profesor se presenta en su cotidianidad, al enfrentarse a tareas enmarcadas en esta disciplina, al resolver dudas de los estudiantes, por lo cual puede generar gran frustración.

Seguridad - Confianza

Por el número de preguntas (6) el menor puntaje posible es 6 y el mayor 24. A menor puntaje, menor es la seguridad - confianza que los profesores sienten frente a las matemáticas y su enseñanza. A partir de un valor mínimo de 7 y un máximo de 24, el promedio de las puntuaciones es 18 y la desviación estándar 3,39. La mayoría de las puntuaciones se ubican sobre o por encima del promedio (29 puntuaciones). Los puntajes obtenidos por los profesores se agrupan dentro de la media y la desviación estándar entre 15 y 21 puntos (ver Anexo 1) y el 77% de las puntuaciones están dentro de este intervalo. El valor del conjunto de datos que registra una mayor frecuencia se encuentran en el rango de 18 a 20 y es 20, lo cual indica que la mayoría de profesores está parcialmente de acuerdo con que las

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

matemáticas y su enseñanza les hace sentir seguridad y confianza.

A partir de los resultados obtenidos en las cuatro categorías, podemos concluir que este grupo de docentes tiene en general una actitud positiva hacia las matemáticas y hacia su enseñanza.

El taller

En el taller presentaremos brevemente el marco general de nuestra investigación y la definición que hemos construido de cada una de las categorías que escogimos para analizar las actitudes de los docentes hacia las matemáticas.

Presentaremos y analizaremos con los asistentes los resultados de la encuesta, en particular discutiremos preguntas de la encuesta que arrojaron un coeficiente de correlación de Pearson bajo, por lo cual nos interesa discutir la relevancia de dichas preguntas, su interpretación y su relación con la categoría. Presentaremos algunos datos recogidos de las entrevistas con el fin de poder relacionar los resultados de la encuesta con los de la entrevista.

Finalmente, cerraremos la discusión con los participantes sobre las posibles proyecciones para continuar la investigación y las propuestas que se le podrían hacer a los formadores de profesores, en particular los formadores de profesores de primaria y de matemáticas.

Referencias bibliográficas

Alken, L. R. (1974). Two scales of attitude toward mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 67-71.

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas media y universitaria*. Características y medición. Bilbao: Mensajero.

Cézar, R. F., Pinto, N. S., Rizzo, K., Camino, A. G., Iglesias, L. M., & Espinosa, A. (2016). Las actitudes hacia las matemáticas en estudiantes y maestros de educación infantil y primaria: revisión de la adecuación de una escala para su medida. *Revista Iberoamericana de Ciencia, Tecnología y Sociedad-CTS*, *11*(33), 227-238.

Cockcroft, W. H. (1982). *Mathematics Counts. Report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools.* London: Her Majesty's Stationery Office

Fennema, E., y Sherman, J. A. (1976). Fennema-Sherman Mathematics Attitudes Scales: Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by females and males. *Journal for Research in Mathematics Education, 7(5),* 324-326. doi: 10.2307/748467

Gamboa-Araya, R. (2016). ¿Es necesario profundizar en la relación entre docente de matemáticas y la formación de las actitudes y creencias hacia la disciplina?. *Uniciencia*, *30*(1), 57-84.

ISBN 978-84-945722-3-4

García, C. M. (2010). La identidad docente: constantes y desafíos. *Revista Interamericana de Investigación, Educación y Pedagogía, RIIEP*, *3(1),* 15-42.
Gil, N., Blanco, L., & Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *Revista iberoamericana de educación matemática*, *2*, 15-32.
Gómez Chacón, Inés María (2002) Cuestiones afectivas en la enseñanza de las matemáticas : una perspectiva para el profesor. *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de matemáticas : una mirada a la práctica docente*. Universidad de Extremadura, Cáceres, 23-58. ISBN 84-7723-510-4
Gresham, G. (2009). An examination of mathematics teacher efficacy and mathematics anxiety in elementary pre-service teachers. The Journal of Classroom Interaction, 22-38.
López de Maturana Luna, S. (2010). Historia de vida de buenos profesores: experiencia e impacto en las aulas. Profesorado. *Revista de Currículum y Formación del Profesorado, 14(3),* 149-164. Recuperado de http://www.ugr.es/~recfpro/rev143ART10.pdf
Naya, M. C., Soneira, C., Mato, M. D., & de la Torre, E. (2014). Cuestionario sobre actitudes hacia las matemáticas en futuros maestros de Educación Primaria|| Questionnaire on attitudes towards mathematics in future teachers of Primary Education. *Revista de Estudios e Investigación en Psicología y Educación*, *1(2),* 141-149.
Maass, J., & Schlöglmann, W. (2006). *New mathematics education research and practice*. Sense Publishers.
Mato, M. D. & De la Torre, E. (2010). Evaluación de las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento académico. *PNA, 5(1),* 197-208.
McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* 575-596.
Palacios, A., Arias, V., & Arias, B. (2014). Las actitudes hacia las matemáticas: construcción y validación de un instrumento para su medida. *Revista de Psicodidáctica, 19(1),* 67-91.
Relich, J., & Way, J. (1994). Measuring pre-service teachers attitudes to mathematics: further developments of a questionnaire. In J. P. Da Ponte, & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 105-112.
Sáenz Castro, C. (2007). La competencia matemática (en el sentido de PISA) de los futuros maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 25(3),* 355-366.

Anexos

https://www.dropbox.com/s/1tpktq8uarym85o/Actitudes%20hacia%20las%20matem%C3%A1ticas-Anexos.docx?dl=0

ISBN 978-84-945722-3-4

T-439

Una experiencia desde el Laboratorio de Matemáticas para la construcción de recursos pedagógicos en el aula

Wildebrando Miranda Vargas – Cristian Andrés Hurtado Moreno
brandowilder777@gmail.com – cristian.hurtado@correounivalle.edu.co
Universidad del Valle, Cali, Colombia - Universidad del Valle, Cali, Colombia

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Modalidad: Taller (T)
Nivel educativo: No específico
Palabras clave: Laboratorio de matemáticas, matemáticas experimentales, Recurso pedagógico

Resumen

En este taller se comparte de manera vivencial una experiencia con el laboratorio de matemáticas de la Universidad del Valle, en Cali - Colombia, el cual ha tenido una trayectoria de más de 2 décadas, y cuyo propósito fundamental es reflexionar sobre la importancia de distintos recursos en la actividad de aula partiendo de una perspectiva denominada matemáticas experimentales, la cual puede ayudar a potenciar el desarrollo de pensamiento matemático en los estudiantes.

En la primera parte del taller se presentan algunos presupuestos conceptuales y metodológicos que han direccionado el trabajo en el Laboratorio de Matemáticas. En la segunda parte, se interactúa con los asistentes a partir del desarrollo de un taller compuesto de 2 actividades que pueden movilizar aspectos del pensamiento numérico y algebraico en estudiantes. Finalmente se muestran algunos resultados del laboratorio de matemáticas. Con todo esto, se espera generar con los participantes un espacio de reflexión sobre posibles limitaciones y potencialidades de la experiencia presentada.

El laboratorio de matemáticas

El Laboratorio de Matemáticas de la Universidad del Valle – en adelante LMUV - es una propuesta didáctica en la que se usan distintos tipos de materiales que evolucionan hacia la idea de recurso pedagógico y que favorecen la construcción de pensamiento matemático. El LMUV Se ubica en un espacio físico donde asisten estudiantes, profesores y comunidad educativa en general, para desarrollar diferentes tipos de actividades relacionadas con la idea de *Hacer Matemáticas* y que, grosso modo, se entiende desde 3 perspectivas: a) Matemáticas de investigación, b) Matemáticas realmente existente: se usan en la cotidianidad, y c)

ISBN 978-84-945722-3-4

Pedagogía de las matemáticas: tienen una orientación hacia la enseñanza-aprendizaje de las mismas.

El LMUV se ha venido consolidando como una propuesta transversal no sólo para las 3 perspectivas mencionadas anteriormente, sino para los distintos cursos universitarios de la Licenciaturas en Matemáticas de la Universidad del Valle que acuden al espacio para apoyar el trabajo académico con los estudiantes.

Algunos de los presupuestos básicos que fundamentan el trabajo en el LMUV son los siguientes:

- Un trabajo matemático tranquilo y no limitado en el tiempo: A pesar de que existen franjas de trabajo según las particularidades de cada población, se puede continuar en el estudio de una cuestión en cualquier momento, sin que exista una presión por una nota académica.
- Una función no amarrada exclusivamente a problemáticas sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Aunque al LMUV asisten muchos colegios de educación básica y media por un interés hacia el aprendizaje, también pueden asistir grupos de estudio distintos que tengan otro tipo de motivación: investigación, orientación lúdica, necesidad de divulgación, entre otras.
- Se proponen actividades matemáticas que permiten asumir una actitud investigadora, abordar la formulación y resolución de problemas, realizar procesos de experimentación y construir procesos de colaboración y socialización.
- La pregunta como eje primordial de la interacción sujeto-objeto.

En cuanto a la estructura del LMUV se basa en un sistema de fichas de trabajo clasificadas en Mesas y Secciones. Las Mesas corresponden a un eje de reflexión particular: Numérico, Geométrico, Variacional, etc. Las Secciones presentan la relación entre dos o más mesas de trabajo. En el anexo 1 se muestra la estructura organizacional del LMUV y en el anexo 2 se muestra un ejemplo de ficha de trabajo.

Algunos fundamentos conceptuales del Laboratorio de Matemáticas

ISBN 978-84-945722-3-4

El LMUV se sustenta en la posición filosófica que considera las Matemáticas como un constructo social, donde el contacto con la realidad tangible, las necesidades prácticas y los problemas alrededor del mundo físico, han sido decisivos en los procesos de elaboración teórica (Arce, 2005). Igualmente se sustenta en diversas conceptualizaciones, algunas de las cuales se sintetizan a continuación:

- *Comunidades de estudio:* Esta idea se basa en la TAD - Teoría Antropológica de lo Didáctico - que puede entenderse como un conjunto de personas que poseen el interés común de resolver una cuestión. La cuestión no es otra cosa que las preguntas problemáticas de una situación que no ha sido resuelta y que la comunidad decide abordar, propiciando un ambiente de colaboración, intercambio de ideas y diálogo permanente. (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997)
- *Recursos pedagógicos:* Aunque la idea de recurso pedagógico tiene diferentes acepciones desde distintas posturas teóricas, retomamos la conceptualización desarrollada por Vega y Gascón (2011) quienes realizan un acercamiento provisional a dicha noción donde se entiende por recurso pedagógico "a lo que congrega en una sola unidad de análisis el uso de los materiales, artefactos educativos o documentos que los maestros traen a clase y los actos discursivos en los cuales aquellos toman un sentido y significación particulares" (p.4).

Estas conceptualizaciones hacen de este espacio un escenario con un fundamento conceptual que, tal y como ya se señaló, busca promover el pensamiento matemático en los sujetos que se apoyen de él, de acuerdo con el tipo de actividades que se promuevan según se tenga alguna intensión. Así, por ejemplo, las fichas de laboratorio que se proponen abordar en el desarrollo de este taller, aportan fundamentalmente al *pensamiento numérico,* el cual puede ser entendido como "la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones" (Mcintosh, citado por MEN, 1998, p.19); y al *pensamiento variacional*, entendido como la actividad intelectual mediante el cual el sujeto analiza,

ISBN 978-84-945722-3-4

comprender, representa y modela situaciones dinámicas, es decir, fenómenos de variación y cambio en los que las magnitudes estudiadas covarían de algún modo (MEN, 1998; Vasco, 2002).

Metodología y propósitos del taller

Este taller, cuyo propósito fundamental es socializar algunas experiencias del Laboratorio de Matemáticas de la Universidad del Valle, en Cali – Colombia, a partir de la interacción con sus asistentes mediante la puesta en escena de dos fichas creadas en este espacio, se desarrolla del siguiente modo: en los primeros 20 minutos se socializa el trabajo que se ha realizado al interior del LMUV, así como algunos presupuestos conceptuales que lo fundamentan. En los siguientes 30 minutos los asistentes desarrollan la actividad del laboratorio *La criba de Eratóstenes*, y seguidamente se realizan algunas conclusiones del trabajo matemático que es posible promover con la actividad propuesta en esta ficha, para lo cual se proponen 10 minutos más. De manera análoga a los dos momentos anteriores, se emplean 30 minutos para el desarrollo de una segunda actividad, *El salto de las ranas*, y se finaliza este trabajo con 10 minutos adicionales para realizar algunas conclusiones sobre su uso a propósito de la actividad matemática que genera. Por último, se presentan algunos resultados del trabajo realizado al interior del LMUV, con el propósito de analizar con el auditorio las potencialidades y posibles limitaciones que presenta esta propuesta.

Desarrollo del taller

A continuación se presentan las dos actividades que se han decidido abordar con los asistentes al taller.

Actividad 1: La Criba de Eratóstenes.

Se presenta aquí una actividad del Laboratorio de Matemáticas correspondiente a una sección entre las mesas de aritmética y álgebra. Mediante esta actividad, los participantes pueden observar cómo desde una etapa exploratoria, se pueden ir trabajando propiedades numéricas y si así se quiere, también se pueden obtener expresiones algebraicas para modelizar el problema e ir más lejos, y proponer algunas demostraciones con ayuda del instrumento algebraico.

ISBN 978-84-945722-3-4

La Criba de Eratóstenes es una configuración de números naturales consecutivos y organizados en filas y columnas que inicialmente se creó con la intención de obtener los números primos comprendidos entre el 1 y el 100, aunque se puede extender la configuración inicial para obtener números primos mayores que 100. Sin embargo, en la actividad que proponemos, la intención no es obtener números primos, sino encontrar una estrategia para hallar la suma de los números que conforman un cuadrado nxn, siendo n un número natural cualquiera excluyendo el cero.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 1. Criba de Eratóstenes

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

En la Criba de Eratóstenes un cuadrado nxn es una configuración de n filas y n columnas de tal suerte que el número total de elementos del cuadrado coincide con el producto nxn. La región sombreada en la Figura 1, por ejemplo, corresponde a un cuadrado nxn, para con $n = 3$, compuesto por $3x3 = 9$, y la figura completa con la criba de Eratóstenes corresponde a un cuadrado nxn, para $n = 10$.

Cada cuadrado se designa por el primeo de sus elementos, siendo este el menor número natural que hay en el cuadrado, o lo que es lo mismo, el que coincide con el cuadrado superior izquierdo. De acuerdo con esto, el cuadrado sombreado de la Figura 1, se designaría de la siguiente manera: Cuadrado $3x3$ número 14.

A continuación se realizan las preguntas que los participantes deben ir realizando en su respectivo orden con ayuda de una calculadora cuando sea necesario:

a) Escoge un cuadrado 2x2 cualquiera, y suma los 2 números de cada una de las diagonales del cuadrado. Haz esto con 5 cuadrados más. ¿Qué observas de especial en dichas sumas?
b) Encuentra un cuadrado 3x3 cualquiera donde la suma de los 3 números de cada una de sus diagonales no de lo mismo. ¿Qué puedes decir aquí?
c) Ahora escoge el cuadrado $3x3$ número 1 y suma con la calculadora rápidamente los 9 números que hay allí. Haz lo mismo con los siguientes cuadrados 3x3: número 77, 10, 125. ¿Qué puedes decir de cada una de las sumas que allí se sugieren?
d) Encuentra una estrategia para sumar los 9 números de un cuadrado por 3x3 cualquiera. La estrategia debe ser eficaz en el sentido de que permita encontrar un algoritmo, para sumar rápidamente los 9 números sin necesidad de tener que ir sumando número por número. Justifica la estrategia que encontraste y comprueba de que realmente funciona.
e) Intenta realizar una demostración de tu estrategia, introduciendo las restricciones que consideres necesarias.
f) Ahora haz lo mismo que hiciste en los puntos d y e, pero con un cuadrado $4x4$.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

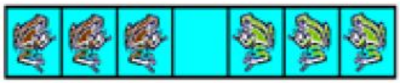
g) Encuentra una expresión que te permita calcular la suma de cualquier cuadrado nxn, realizando las restricciones necesarias. Prueba tu estrategia con el cuadrado $6x6$ número 13 y con el cuadrado $7x7$ número 22.

Reto: Encuentra una expresión que permita calcular una suma cualquiera en una configuración rectangular nxa.

Reflexión sobre la actividad: La actividad anterior permite evidenciar que además de trabajar con propiedades de los números naturales, se introducen ideas sobre las restricciones que se deben explicitar en las soluciones y la actividad puede ir evolucionando desde una etapa exploratoria, pasando a el establecimiento de conjeturas y teniendo la oportunidad de realizar demostraciones con ayuda de las propiedades que caracterizan el álgebra de números reales.

Actividad 2: El salto de las ranas

El *Salto de las ranas* es un juego que se propone para ser trabajado de manera individual, el cual necesita de una regleta compuesta de n casillas toda vez que se tengan $n-1$ ranas (o simplemente fichas) en juego, tal y como se ilustra a modo de ejemplo en la siguiente imagen para el caso de 7 casillas y 6 ranas.



El propósito del juego es pasar todas las ranas de un color ubicadas en uno de los extremos de la regleta a la posición que ocupan las ranas del otro color en el extremo opuesto, y viceversa. Para ello se deben tener en consideración las siguientes reglas de juego:

- ✓ Una rana puede avanzar si la casilla siguiente está vacía. También puede saltar a una rana de otro color siempre que la casilla siguiente esté vacía.
- ✓ Dos ranas no pueden ocupar una misma casilla.
- ✓ Las ranas no pueden retroceder.

De acuerdo con la descripción del juego, y tomando en consideración un número para de ranas (m), realiza lo siguiente:

ISBN 978-84-945722-3-4

a) Toma la regleta de 3 casillas y 2 ranas e indica el número mínimo de movimientos que se necesitan para acabar el juego.

b) Toma ahora la regleta de 5 casillas (y por tanto 4 ranas) e indica el número mínimo de movimientos que se necesitan para terminar el juego.

c) Juega *El salto de las ranas* tanto como sea necesario para completar la siguiente tabla:

Cantidad de ranas en juego	*Número mínimo de movimientos*
2	
4	
6	
8	
10	

d) Presenta una expresión general que te permita encontrar el número mínimo de movimientos necesarios para terminar el juego siempre que se tengan m ranas en juego, con m par.

e) Toma ahora en consideración el juego, pero en esta ocasión con una cantidad impar de ranas, por ejemplo, dos ranas de un color y una del otro para el primer caso (3 ranas en total), y completa la siguiente tabla:

Cantidad de ranas en juego	*Número mínimo de movimientos*
3	
5	
7	
9	
11	

f) Determina una expresión general que te permita encontrar el número mínimo de movimientos necesarios para terminar el juego siempre que se tengan m ranas en juego, con m impar.

ISBN 978-84-945722-3-4

Reflexión sobre la actividad: El desarrollo de esta actividad pone el acento en lo que en general diversos autores del campo han propuesto como una característica esencial del pensamiento algebraico, a saber: la generalización (Radford, 2003; Mason 1996, Godino, Castro, Ake & Wilhelmi, 2012). Particularmente es una actividad que se centra en la generalización de patrones numéricos, en donde analizar la forma como covarían las cantidades de las dos magnitudes puestas en consideración (cantidad de ranas y cantidad de movimientos mínimos) en fundamental para atenderla, por lo que el dinamismo de ella salta a la vista. Esta actividad permite la exploración de diversas estrategias de juego, la realización de conjeturas y su posterior comprobación, a fin de encontrar un patrón que pueda ser expresado en su forma más general.

Conclusiones

El uso correcto del material manipulativo juega un papel fundamental en los procesos de construcción y desarrollo del pensamiento matemático en los diferentes niveles educativos. Así, es posible establecer una estrecha relación entre los manipulativos y la actividad matemática que se puede desplegar con su uso conforme unos propósitos establecidos. Desde esta perspectiva aparece la idea del LMUV como un escenario que posibilita la dialéctica entre ambos a partir del desarrollo de actividades con carácter experimental, de modo tal que quienes las enfrentan pueden asumir un rol investigador, experimentar un interés por el "hacer matemáticas", abordar la resolución de problemas y asumir procesos de colaboración conjunta conformando así comunidades de estudio. Las dos actividades compartidas con los asistentes al taller son un reflejo de lo indicado.

Referencias bibliográficas

Arce, J. (2005). Laboratorio de Matemáticas para la educación matemática. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Chevallard, Y. Bosch, M. y Gascón, J. (1997): Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje, ICE/Horsori: Barcelona

Garzón, D. & Vega M. (2011). Los recursos pedagógicos en la enseñanza de la geometría. XIII Comité Interamericano de Educación Matemática. Brasil: CIAEM.

ISBN 978-84-945722-3-4

Godino, J., Castro, W., Ake, L., & Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elmental. *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA, 26, 483-511*.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran, y L. Lee (Eds.), *Approach to algebra: Perpectives for Research and Teaching*, (pp. 65-86). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

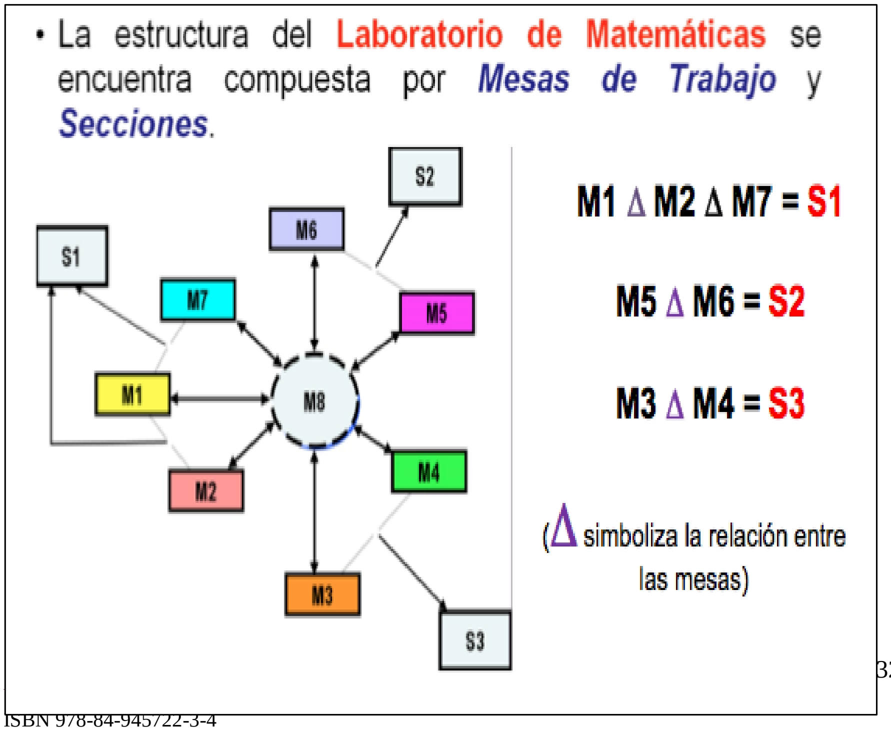
Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1998). Lineamientos Curriculares para Matemáticas. Bogotá: Editorial Magisterio.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to studentes‟ types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.

Vasco, C. (2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías., Bogotá: Editorial Magisterio.

ANEXOS

ANEXO 1: ESTRUCTURA DEL LMUV.



ISBN 978-84-945722-3-4

ANEXO 2: EJEMPLO DE UNA FICHA DE TRABAJO DEL LMUV.

Universidad del Valle

LABORATORIO DE MATEMÁTICAS

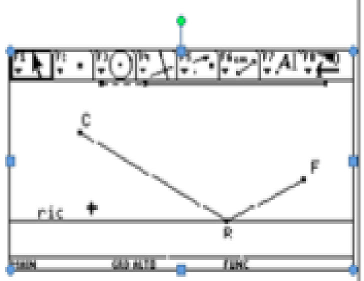
instituto de educación y pedagogía

EL FUEGO

Distancia Mínima

Un excursionista que se encuentra en el punto C ha visto un incendio en su tienda de campaña localizada en el punto F. Para apagar el incendio, él debe buscar agua en el río.

¿Cuál es el camino más corto que debe seguir el excursionista?



F003

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

T-455

CIBEM VIII – Madrid (ESPAÑA)

" EL MARTIRIO DE LAS TABLAS DE MULTIPLICAR"

Marcos Marrero Cárdenas

marcosmarrerocardenas@gmail.com

CEIP Isaac de Vega (Gobierno de Canarias, Consejería de Educación)- España

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.

Modalidad: Taller (T)

Nivel: Primario

Palabras clave: tablas de multiplicar, calculadora, regletas.

Resumen

Por lo general, las maestras y los maestros "mandan a estudiar" las tablas de multiplicar y en cuestión de meses ya se las están preguntando a los alumnos las tablas. El único criterio, en muchos casos, es valorar por parte de esos docentes, si ya es oportuno "mandarles a estudiar" otra más, ponderando si ya ha pasado tiempo suficiente entre una y otra y si el tiempo ha sido más que suficiente para su memorización.
Los alumnos piensan que las tablas de multiplicar sirven para hacer multiplicaciones (y hasta ahí su conocimiento y sentido de la responsabilidad de su estudio).
Es curioso, las editoriales cada vez hacen los carteles más grandes para decorar las paredes de las clases (no se sí piensan que mientras más grandes son los carteles más fáciles serán de recordar las mismas, no lo sé).
El estudio de las tablas de multiplicar debería comenzar enseñándoles a los alumnos el por qué y el para qué sirven las tablas de multiplicar y durante (alrededor) de cuatro años, ir construyendo su aprendizaje. Un aprendizaje que empieza desde la Etapa de Infantil y termina (por concretar un periodo), en el primer trimestre de 4º de Primaria (10-11 años).

El principal objetivo que tienen las tablas de multiplicar es el desarrollo del cálculo mental en la resolución de problemas, y no para hacer multiplicaciones.

Aunque cada vez menos, todavía perdura el pensamiento didáctico: *"Primero que se aprendan las tablas y luego pasamos a las multiplicaciones. Luego ya los problemas"*. Con

ISBN 978-84-945722-3-4

este procedimiento, las tablas carecerán de sentido y significado, supondrán una tortura para los alumnos (pues su único proceso de aprendizaje es el memorismo -aprender todo de memoria sin comprender-) y seguiremos obteniendo falta de motivación y rechazo hacia el aprendizaje.

Para el proceso de enseñanza-aprendizaje de las tablas de multiplicar se proponen varias ideas, algunas de las cuales han sido extraídas de autores como Maza (1991), Fernández Bravo (2014), Antonio Ramón Martín (1996), entre otros, y que se desarrollaran de forma práctica en este taller (se detalla más adelante):

1. Conocer por qué y para qué sirven. Herramienta para el cálculo mental en la resolución de problemas.
2. Tener paciencia. Se trata de un proceso que se debe cocinar a fuego lento durante, al menos 3 años.
3. Establecer relaciones. No se enseñan de forma lineal: 2,3,4,... Establecer relaciones como dobles y mitades (tabla del 2 y del 4, 3 y 6...) puede ayudar y enriquecer cualitativamente el proceso.
4. Usar propiedades. De este modo, si no recordáramos cuánto es $7 \cdot 8$, podríamos saber que equivale a calcular $(7 \cdot 3) + (7 \cdot 5)$. Importancia también de la propiedad conmutativa.
5. Analizarlas. Buscar regularidades entre ellas: patrones, paridad-imparidad, etc.
6. Construirlas. Con materiales manipulativos, luego con múltiples representaciones y, finalmente, trabajarlas sobre su lenguaje simbólico.
7. Concepto de "veces". Sustituir el "por" por el concepto de "veces". Es más transparente. Favorece la comprensión. Así $2 \cdot 6$ es igual a "2 veces el 6".
8. Memorizarlas. Por supuesto, porque economizan el pensamiento y favorecen el cálculo mental. Una memorización cargada de significado (no es lo mismo usar la memoria que el memorismo).
9. Materiales. Desarrollar muchas propuestas diferentes con materiales para su comprensión: regletas, fichas de colores, tiras de colores...Ofrecer su aplicación geométrica (modelos rectangulares, en productos de potencias -cuadrangulares-...) aritmética (relación con la suma, la división....).

ISBN 978-84-945722-3-4

10. Calculadora. Como herramienta fundamental para su estudio autónomo (la calculadora debe de incluir el factor constante).

Una posible propuesta podría ser la siguiente:

NOTA: No pensemos en una memorización lineal. No pensemos en añadirles melodías como si de canciones se tratara *("ir cantándolas")*. No pensemos en memorizar pero con herramientas digitales, siendo el proceso de pensamiento el mismo (introducir herramientas digitales en la escuela es ideal, siempre y cuando se tenga claro el objetivo de las actividades que en ella se desarrollan). Se recomienda ver un vídeo titulado *"Las Tics en educación y los docentes"* en relación a esta idea.

En Educación Infantil (y en todos los niveles) empezamos construyendo las tablas de multiplicar y paralelamente aplicándolas en la resolución de problemas. No tiene sentido trabajarlas de forma permanente descontextualizadas de los problemas. Si bien se hace necesario el trabajo de carácter más conductual (por repetición), no es menos cierto que se requiere una verbalización oral (y posteriormente escrita) en la resolución de problemas, muchas veces con un carácter creativo y de propia invención (Fernández Bravo 2014). Ofrecemos algunos ejemplos que el lector secuenciará según considere:

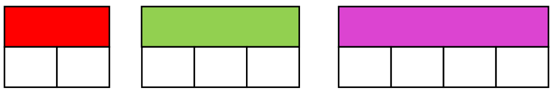
-*"Brian tiene 2 caramelos y Sofía otros 2. ¿Cuántos tienen en total?"*
- *"En el bolsillo derecho tengo 3€ y en el izquierdo el doble" ¿Dónde tengo más? ¿Cuántos tengo entonces en el bolsillo izquierdo?*
- *"Inventa un problema con 5 y 5"*
- *"Inventa un problema con la palabra doble y dime su solución"*
- *"Alberto tiene el doble de cartas que Ana. ¿Cuántas cartas podría tener Alberto?*
- *"Inventa un problema con el siguiente lenguaje simbólico: 4 · 2 y que el problema hable de frutas"*

INFANTIL:

ISBN 978-84-945722-3-4

▪ **Tabla del 1:** A través del conteo de 1 en 1 y el concepto de veces.

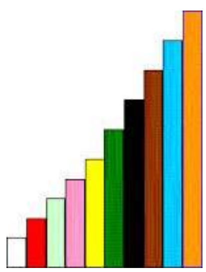
- A través de las Regletas de Cuisenaire y los trenes unitarios, con un tratamiento por correspondencia biunívoca (Fernández Bravo 2014)



...

1 y 1 = 2	1 y 1 y 1	1 y 1 y 1 y 1 y 1
2 veces el 1	3 veces el 1	4 veces el 1
2·1 = 2	3 · 1 = 3	4 · 1
1 vez el 2	1 vez el 3	1 vez el 4

- A través de las Regletas de Cuisenaire y la ordenación de sus 10 regletas



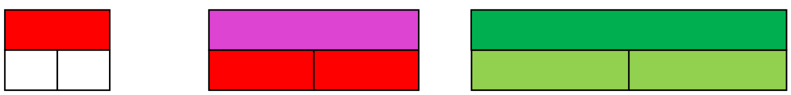
1 vez el 1, 1 vez el 2, 1 vez el 3, 1 vez el 4...

- A través de la <u>calculadora con el factor constante (+1).</u> Correspondiente al trabajo de series numéricas ascendentes.

- A través de <u>objetos concretos</u> de la vida real. Correspondiente al contexto cercano del niño.

▪ **Tabla del 2:** A través de la construcción de las sumas dobles.

- A través de las Regletas de Cuisenaire y la construcción de los dobles (los cuales abordaremos desde diferentes expresiones orales: "doble de...", " 2 veces el...", " 4 y 4", etc...



...

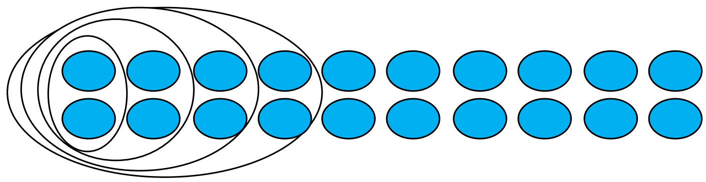
2 veces el 1= 2	2 veces el 2= 4	2 veces el 3 = 6
Doble de 1= 2	Doble de 2 = 4	Doble de 3 = 6

ISBN 978-84-945722-3-4

- A través de la <u>calculadora con el factor constante (+2).</u> Correspondiente al trabajo de series numéricas ascendentes.

- A través del <u>sistema monetario.</u> Por ejemplo contando de 2 en 2 con las monedas de 2€.

- A través de <u>fichas de colores</u>. Realizando agrupaciones/disposiciones geométricas de 2 en 2 y su inclusión jerárquica de elementos (Kami 1995)



2 veces 1 ficha $\longrightarrow$ $2 \cdot 1 = 2$

2 veces 2 fichas $\longrightarrow$ $2 \cdot 2 = 4$ ...

- **Tabla del 10:** A través de la serie numérica de 10 en 10

- A través del <u>Panel del 100</u>

- A través de los <u>Bloques multibase.</u>

- A través de la <u>calculadora con el factor constante (+10).</u> Correspondiente al trabajo de series numéricas ascendentes.

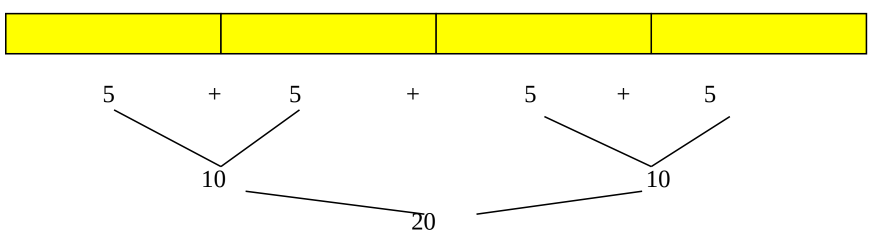
<u>PRIMERO PRIMARIA (6-7 años)</u>

- Seguimos reforzando la tabla de 1, 2 y 10
- **Tabla del 4:** Construida a partir de la tabla del 2. Conexión tabla del 4 como la tabla del 2, dos veces.

- A través de la <u>memorización de los dobles y construcción de la tabla del 4. Vamos introduciendo el lenguaje simbólico.</u>

Ejemplo con las Regletas de Cuisenaire

$4 \cdot 5 = 4$ veces el 5



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

- **Tabla del 5:** Procedemos igual que la tabla de 4. Establecemos conexión con la tabla del 4 y los dobles.

Ejemplo con las Regletas de Cuisenaire

5 · 3 = 5 veces el 3

3 + 3 + 3 + 3 + 3

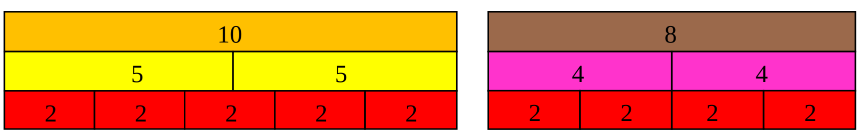
6 + 6 + 3

12 + 3 = 15

- <u>Iniciamos la conmutatividad:</u> Los alumnos podrán decir *"igual pero al revés"*. Una actividad que potencia rápidamente esta actividad, cuyo objetivo es el desarrollo del cálculo mental, lo podemos observar en la actividad de composición de los 10 primeros números: *"los muros"*. En dicha actividad, si le ofrecemos aparecerá rápidamente la posibilidad del aprendizaje de la propiedad conmutativa.

Ejemplo con las Regletas de Cuisenaire

"Construye números usando sólo regletas repetidas"



<u>10</u>

2 veces el 5 = 2· 5 = 10

5 veces el 2 = 5 · 2 = 10

<u>8</u>

2 veces el 4 = 2 · 4 = 8

4 veces el 2 = 4 · 2 = 8

- <u>Iniciamos la búsqueda de relaciones:</u> Regularidades. Patrones que se suceden en las tablas de multiplicar. Paridad/Imparidad. Repetición cíclica de finales. Un ejemplo fácil y claro lo tenemos en la tabla del 5, donde todos los finales son 5-0-5-..... Se recomienda trabajar el lenguaje simbólico de las tablas de forma vertical, ya que esta disposición facilita la búsqueda de dichas regularidades.

Ejemplo de relación con la tabla del 5 en el lenguaje simbólico

ISBN 978-84-945722-3-4

$5 \cdot 1 = 5$ ¿Qué patrón has encontrado?: Se va repitiendo 5-0-5-0...

$5 \cdot 2 = 10$

$5 \cdot 3 = 15$

$5 \cdot 4 = 20$

...

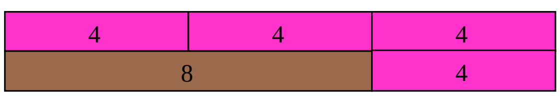
SEGUNDO PRIMARIA (7-8 años)

- Seguimos reforzando la tabla de 1, 2, 5, 4 y 10
- **Tabla del 3:** A través del estudio de los triples. Conexión con la tabla del 2 + 1 vez más.

Hablaremos de *"veces"*, y de *"triples"*

Ejemplo con las Regletas de Cuisenaire

$3 \cdot 4$



(Tabla del 2) + 4

$3 \cdot 4 = \mathbf{4 + 4} + 4$

$\mathbf{8} + 4 = 12$

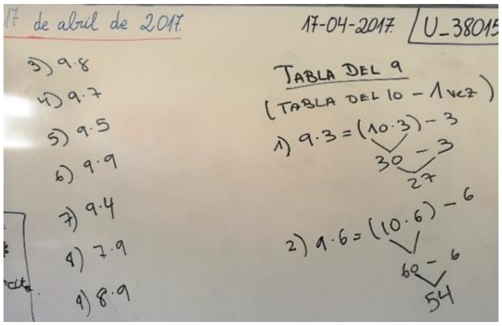
- A través de la construcción geométrica de triángulos equiláteros. Conexión con la geometría (actividad interesante para trabajar el cálculo de perímetros). Ampliable a todas las tablas de multiplicar y las construcciones de polígonos regulares.

TERCERO PRIMARIA (8-9años)

- Seguimos reforzando la tabla de 1, 2, 3, 4, 5 y 10
- **Tabla del 9:** Se introduce en relación a la tabla del 10. *"Tabla del 10 - 1 vez"*.

- Se precisa seguir construyéndolas. No obstante, los alumnos han manipulando tanto hasta este momento, respetando las fases del proceso de construcción del pensamiento y del razonamiento lógico-matemático (Bruner 1984), que su capacidad de abstracción le permite acceder cada vez más rápido a la comprensión del lenguaje simbólico.

ISBN 978-84-945722-3-4

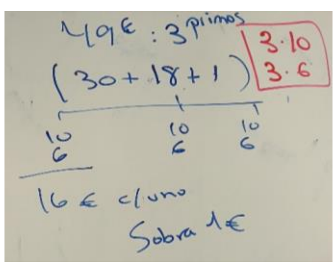


Pizarra de aula. Trabajando la tabla del 9

- <u>Tablas inversas:</u> Además de trabajar las directas (4 · 3 =12), también trabajaremos a partir de una solución: *"¿Qué productos conoces que den 24?*
- <u>Conexiones entre tablas (dobles y mitades):</u> Deben establecerse relaciones entre ellas. Así se enseñará la del 2-4, 3-6, 4-8, 5-10.

<u>CUARTO PRIMARIA (8-9años)</u>

- En el primer trimestre de 4º de Primaria, la gran mayoría de los alumnos debería dominar las tablas de multiplicar. Además, deberían saber resolver muchos problemas con su implicación si se ha ido realizando un aprendizaje contextualizado. Por otro lado, el tratamiento de la multiplicación de forma complementaria a la división y viceversa, debería de haber ido reforzando estos conocimientos.



Pizarra de aula. Algoritmo de la araña por descomposición-múltiplos. Se escriben las tablas de multiplicar relacionadas.

Y en el taller...

En este taller los participantes harán varias actividades prácticas para reflexionar sobre el aprendizaje de las tablas de multiplicar. Entre ellas, destacamos:

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

- Vivenciación de las tablas de multiplicar a través de juegos de agrupamientos (relación división-multiplicación y concepto de múltiplos y divisores)
- Actividad integrada de aplicación: geométrica-tablas de multiplicar- perímetros-escala 1:100- resolución de problemas basado en la creación de presupuestos.
- Torneo aritmético de las tablas de multiplicar para el desarrollo del cálculo mental

NOTA: Durante las actividades se verán videos de aula de alumnas realizando dichas prácticas para provocar reflexión y debate. La extensión o desarrollo de todas las actividades, dependerá del número de asistentes y transcurso del taller dentro de los tiempos establecidos.
NOTA2: Es conveniente que cada asistente lleve una calculadora básica.

Referencias bibliográficas

- Fernández Bravo, J. (2014). *Números en Color* (4ª Edición).Madrid: CCS.

-Kamii, C. (1995). *Reinventando la aritmética III. Implicaciones de la teoría de Piaget.* Madrid: Aprendizaje Visor.

- Movimiento OAOA:
www.matematicasoaoa.org

- Ramón, A (1996). Alguna consideraciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las tablas de multiplicar. Islas Canarias. **Ruta digital:**
http://www.sinewton.org/numeros/numeros/28/Articulo02.pdf

- Ramón, A. Canal Yotube "Antonio Martin 2020". *Tablas de multiplicar.* **Ruta digital:**
https://www.youtube.com/watch?v=vNVj2Xhybh4&list=PLDfo4AElVoBskW4R9Cv5lwwpaN6jnSe49

- Vázquez, R. El desarrollo del pensamiento multiplicativo. **Ruta digital:**
http://www.ricardovazquez.es/MATEMATICASarchivos/MULTIPLICACION/estructura%20multi/El%20desarrollo%20del%20pensamiento%20multiplicativo.pdf

T-456

CIBEM VIII – Madrid (ESPAÑA)

" ¿SE MUEREN 3/5 DE LOS 30 PECES DE UNA PECERA?"

Marcos Marrero Cárdenas

marcosmarrerocardenas@gmail.com

CEIP Isaac de Vega (Gobierno de Canarias, Consejería de Educación)- España

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.

Modalidad: Taller (T)

Nivel: Primario.

Palabras clave: fracciones, porcentajes, decimales.

Resumen

El estudio de las fracciones en la Educación Primaria ha sido uno de los aspectos más polémicos en las últimas décadas. El poco sentido utilitario que tienen algunas fracciones en la vida real, la aplicación de estos conocimientos en la resolución de problemas fuera de toda lógica competencial y de sentido común y un aprendizaje cargado de procedimientos nuevamente mecánicos, han puesto en entredicho su utilidad.

En este taller, los participantes podrán reflexionar sobre el uso de las fracciones en Educación Primaria a través de propuestas de videos, donde se ofrecen experiencias prácticas de aula con diversos materiales. Además, los asistentes harán una batería de ejercicios prácticos (fracción de una cantidad, relación fracción-porcentaje-decimal, aplicación de las fracciones en las unidades de medida...), todo ello con materiales manipulativos (regletas, modelos circulares-rectangulares, sistema monetario, Tangram Chino...) y, por supuesto, la calculadora.

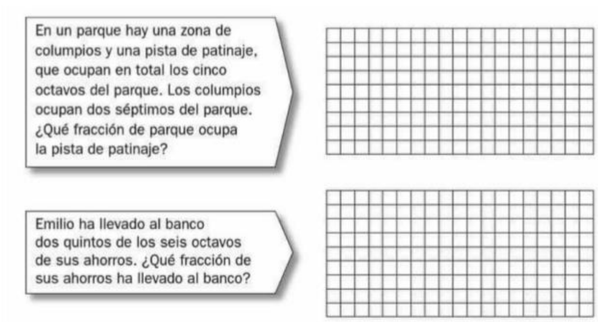
Tendríamos que empezar reconociendo qué es una fracción. Por un lado hablamos de un número. Una cantidad concreta. Por otro lado, una fracción representa una relación entre los dos números representados (concepto de número racional). Un buen ejemplo de la importancia de comenzar por entender las fracciones y su representación sin la necesidad de incorporar rápidamente números, lo vemos en algunas de las publicaciones de Maria Antònia Canals (Canals 2009).

ISBN 978-84-945722-3-4

"El 1 es 1 y el 4 es 4. Entender que 1/4 es un número que asociamos a una de las cuatro partes iguales que componen el 1, es algunas veces prematuro si el niño no tiene afianzados los conceptos previos" (Material Curricular, Grupo CERO, Segundo Ciclo)

Pero ¿para qué sirven las fracciones en la vida real? ¿son conscientes los alumnos de la relación existente entre las fracciones-porcentajes-decimal? ¿se utiliza la calculadora como herramienta fundamental para el estudio de las fracciones? ¿dónde se aplican?

Es cierto que el objetivo número uno en el aprendizaje de las matemáticas es la resolución de problemas. Pero no es menos cierto, que la mayor parte de los educandos, se enfrentan a ejercicios como estos en los cursos escolares:



Las fracciones en la resolución de problemas (Primaria)

En *Principios y Estándares para la Educación Matemática (2003)*, se expone la necesidad de trabajar desde la Etapa 3-5[6] con fracciones familiares (p.154), como medios, tercios...dentro de contenidos como las áreas o las representaciones en la recta numérica.

Creo que es importante consolidar los siguientes aspectos en el aprendizaje de las fracciones:

1. Las fracciones como parte de un todo (inicialmente en su representación gráfica y posteriormente simbólica)

2. Como concepto de fraccionar. Es decir, repartir en partes iguales.

[6] Corresponden a los niveles de la *Elementary School* de la Etapa 3-5 en EE.UU, lo que correspondería a la Educación Primaria Básica.

ISBN 978-84-945722-3-4

3. La comprensión (a través de la manipulación de materiales) y posterior memorización de fracciones con su relación decimal que sirvan como puntos de referencia para futuras estimaciones (estas son: 1/2 =0.50 , 1/3=0.33 , 1/4=0.25 , 1/10=0.10 , 1/5 = 0.20).

4. Los procesos de simplificación y ampliación en el trabajo de fracciones equivalentes para poder realizar estimaciones, teniendo en cuenta las fracciones de referencia aprendidas (de este modo, al comparar dos fracciones tales como 2/6 y 4/8 y determinar cuál es mayor, sabríamos que 2/6=1/3=0.33 y que 4/8=1/2=0.50). Es fundamental que los alumnos entiendan que las fracciones equivalentes representan la misma "parte" o el mismo punto en la recta numérica.

5. La comprensión de las diferentes formas de representación de la fracción, porcentaje y decimal (FPD) dentro de la resolución de problemas posibles, cotidianos y reales donde intervenga el uso de las FPD: descuentos, probabilidad, medidas y cantidades, razones y proporciones, operador... y conocer en qué contextos son más utilizados unas representaciones frente a otras (así, en las ofertas y descuentos encontraremos los porcentajes, en las unidades de volumen y capacidad aparecerán en mayor medida las fracciones y los decimales, etc.)

6. El uso de la calculadora para los cálculos exactos en la resolución de problemas y ejercicios, previas estimaciones, teniendo en cuenta la relación fracción-decimal.

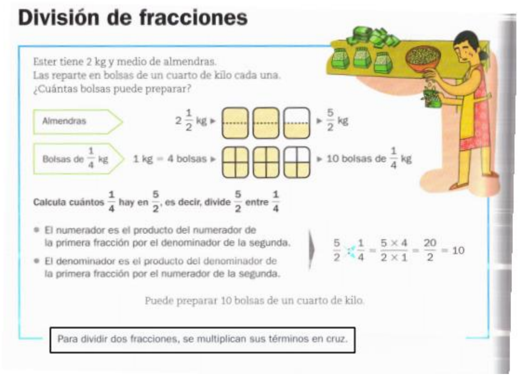
7. Validar, si se considera, el aprendizaje de las FPD dentro de situaciones más abstractas, donde el único objetivo es hacer pensar a través de los procedimientos de resolución, para ir consiguiendo estructuras mentales más complejas.

8. Conocer el valor decimal de las fracciones, puede ayudar rápidamente a realizar cálculos exactos mentales, fundamentalmente en las divisiones.

El hecho de sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones entre sí a través de un algoritmo, no aporta ningún enriquecimiento intelectual ni matemático. El único objetivo cuando se procede de este modo (y más en Educación Primaria) es rellenar las libretas, cuadernillos y libros.

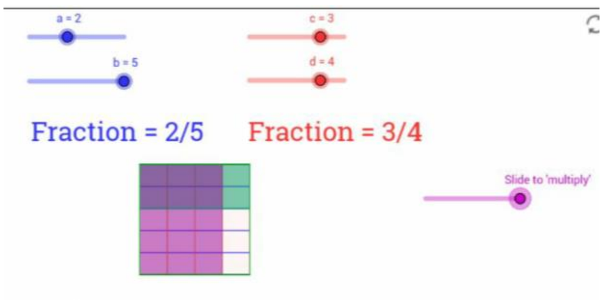
"El objetivo de la escuela debería ser rellenar los cerebros y no las libretas"

ISBN 978-84-945722-3-4



Un ejemplo del martirio de los procedimientos mecánicos

Para multiplicar fracciones, basta con utilizar folios de colores de papel cebolla y superponerlos o utilizar alguna herramienta digital como el Geogebra para entender los conceptos, así como su representación gráfica.



Ejercicio con deslizadores en Geogebra para comprender la multiplicación de fracciones usando el área del rectángulo como soporte geométrico.

Las preguntas para reflexionar serían: ¿Qué utilidad tienen en la vida real? ¿Tiene que tener todo un sentido útil en las matemáticas que se aprenden en la Educación Primaria?

¿Son estos ejercicios eficaces para alcanzar pensamientos de complejidad superior? ¿Es cuestión de cultura general?

Quizás las respuestas no están tanto en los productos matemáticos obtenidos (respuestas), sino en los procedimientos que se llevan a cabo en estos aprendizajes. Procedimientos que

ISBN 978-84-945722-3-4

deben soportarse en una metodología que parte de la pregunta para fomentar el gusto por el descubrimiento (se recomienda la conferencia TEDx de Dan Finkel: *"Five Principles of Extraordinary Math Teaching")* y que incorpore las herramientas tecnológicas para una mayor calidad en la educación matemática.

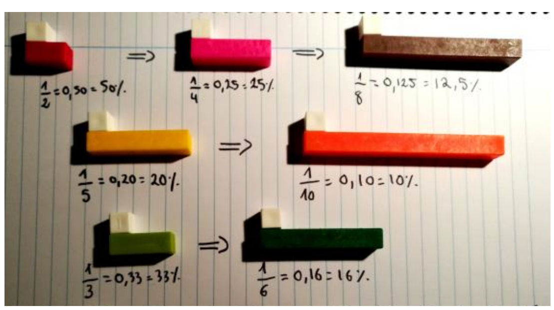
"La escuela está confundiendo los objetivos con los procedimientos" (Fernández Bravo)

"Lo que se enseña en la Escuela Primaria, debería servirle a ese individuo para los próximo 80 o 90 años" (Antonio Martín)

Y en el taller...

Veamos algunas actividades que realizarán los asistentes durante el taller:

<u>Actividad 1: Modelos circulares, las regletas y el Tangram Chino para el conocimiento del valor fracción-decimal y las fracciones equivalentes junto con la calculadora.</u>

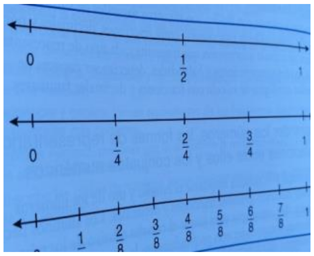


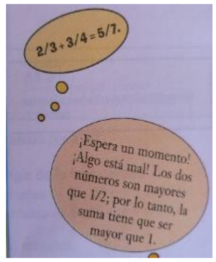
<u>Actividad 2: La calculadora y la recta numérica para la estimación.</u>

Conocida la relación fracción-decimal de determinadas fracciones familiares (1/2, 1/4,1/5...) , las cuales han sido investigadas con la calculadora, colocar otras fracciones (3/5, 2/4, 3/10) ...en una recta numérica que vaya de 0 a 1 o restar y sumar fracciones desde la estimación

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

mediante referencias de fracciones conocidas. Comprobación de los resultados con la calculadora pasando la fracción a decimal.





Extraído de Principios y Estándares para la Educación Matemática, 2003 (p.154. 223)

Actividad 3: Uso de la fracción-decimal en las divisiones para el desarrollo del cálculo mental.

a) Investigamos la relación fracción-decimal con la calculadora de las siguientes fracciones:

1/2=0.50 1/3=0.33 1/4= 0.25 1/5= 0.20 1/6= 0.16 1/7=0.14 1/8=0.12 1/9=0.11

b) Conocidas estas, preguntamos sobre estas otras: ¿2/3? ¿3/5? etc...

c) Planteamos la siguiente división 19:5 ¿Cuánto es? Luego plantearemos esta misma propuesta: 19 € : 5 personas y 19 vacas: 5 establos ¿Qué piensas?[7]

d) Ahora mostramos algunas divisiones exactas aplicando tablas multiplicar directas:

24 €: 3 personas ; 35 metros de tela:7 tiras. etc...

e) ¿Qué pasaría si fueran 23€ : 3 personas? ¿Cómo lo calcularías? ¿Serías capaz de aplicar el conocimiento fracción-decimal para resolver eficaz y mentalmente este reparto?

f) Se plantean otros similares para su práctica.

Actividad 4: Resolución de problemas con porcentajes para el cálculo mental. Uso de la estimación y la calculadora para cálculos exactos.

El uso de la calculadora posibilita de forma inmediata el cálculo exacto. Abordaremos este apartado teniendo en cuenta como objetivo la aproximación al resultado. El cálculo exacto será únicamente una buena excusa para el desarrollo del cálculo mental.

Planteamos un enunciado clásico de un problema y 3 opciones/objetivos de resolución:

"Una camisa cuesta 37 €. Si la rebajan un 20 %. ¿Cuánto pagaremos por ella?"

---

[7] Importancia de trabajar con cantidades en la escuela en la resolución de problemas y no con cifras descontextualizadas.

a) 1er objetivo/opción: la aproximación inmediata a través del cálculo mental

Redondeo a 40€

40 € (100%) → 20% --> Lo que nos descuentan

40 € (100%) → 80% --> Lo que debemos de pagar

Estimación: 8 · 4 = 32 € aproxim. (algo menos)

Exacto calculadora: 29.6€

"Una camisa cuesta 37 €. Si la rebajan un 20 %. ¿Cuánto pagaremos por ella?"

b) 2º objetivo/opción: manejo eficaz de la calculadora

Paso 1: Teclear 37
Paso 2: Teclear -
Paso 3: Teclear 20%
Paso 4: Teclear =
Paso 5: Resultado (29.6€)

"Una camisa cuesta 37 €. Si la rebajan un 20 %. ¿Cuánto pagaremos por ella?"

c) 3er objetivo/opción: desarrollo del cálculo mental (referencias del 1%, 5%,10% y 50%)

Paso 1: calculamos el 10% de 37 = 3.7

Paso 2: Multiplicamos x 2 para calcular el 20% = 3.7 +3.7 = 6.4

Paso 3: Restar 37€ - 6.4 = 29.6

Actividad 5: Las fichas de colores y el algoritmo de la araña peluda.

En este caso el enfoque va dirigido a la fracción de una cantidad. Las fichas servirán para la modelización en la resolución de problemas:

a) Supongamos que tenemos 1 kilo de queso que cuesta 12 € (12 fichas). Queremos comprar 3/4 del kilo. Es decir 3/4 de 12. ¿Cuánto pagamos?

A través de la partición de folios y fichas, podemos modelizar dicho problema y obtener que hemos colocado 3 fichas en cada parte. Con lo cual pagaremos 9€.

b) Se proponen otros similares para su práctica.

ISBN 978-84-945722-3-4

El algoritmo de la araña peluda es muy útil para comprender de una manera transparente la fracción de una cantidad

a) Supongamos: un ciclista a recorrido 3 de las 5 etapas de un Tour. Si son 120 kilómetros en total: ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido?

Tendríamos que calcular 3/5 de 120 kilómetros:

120 km : 5 etapas

(100 + 20) : 5

20	20	20	20	20
4	4	4	4	4

Cada pata de la araña, representan las etapas, con lo cual ha recorrido 72 kilómetros.

d) Se proponen otros similares para su práctica.

NOTA: Durante las actividades se verán videos de aula de alumnas realizando dichas prácticas para provocar reflexión y debate. La extensión o desarrollo de todas las actividades, dependerá del número de asistentes y transcurso del taller dentro de los tiempos establecidos.

NOTA2: Es conveniente que cada asistente lleve una calculadora básica.

Referencias bibliográficas

-Canals, Mª. (2009) *Los dossiers de María Antonia Canals. Fracciones.* Barcelona: Octaedro.

- Fernández Bravo, J. (2014). *Números en Color* (4ª Edición).Madrid: CCS.

-Grupo Cero (Valencia) (1996). *Materiales curriculares para la Educación Primaria:* Matemáticas. M.E.C.- Madrid: Edelvives

-National Council of Teachers of Mathematics (NTMC**)** (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática.* Sevilla: S.A.E.M. Thales.

Digital

-Geogebra. **Ruta digital:**

ISBN 978-84-945722-3-4

www.geogebra.org

-Movimiento OAOA. **Ruta digital:**

www. oaoamatematicas.org

-Ramón, A. Canal Yotube "Antonio Martin 2020". *Tablas de multiplicar.* **Ruta digital:**

https://www.youtube.com/watch?v=vNVj2Xhybh4&list=PLDfo4AElVoBskW4R9Cv5lwwpaN6jnSe49

-Recursos interactivos para el estudio de las fracciones. **Ruta digital:**

http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/cordoba_2003/recursos_fracciones.pdf

-TEDx: Dan Finkel. **Ruta digital:**

https://www.youtube.com/watch?v=ytVneQUA5-c

ISBN 978-84-945722-3-4

T-457

<u>CIBEM VIII – Madrid (ESPAÑA)</u>

ALGORITMOS PENSANDO: LOS ALGORITMOS DEL SIGLO XXI

Marcos Marrero Cárdenas

marcosmarrerocardenas@gmail.com

CEIP Isaac de Vega (Gobierno de Canarias, Consejería de Educación)- España

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.

Modalidad: Taller (T)

Nivel: Primario.

Resumen

Los Algoritmos Tradicionales (ATOA) llenan la mayoría de las pizarras de las aulas. Pero ¿qué es un algoritmo? ¿para qué sirve? ¿sirven todos?. Los alumnos y alumnas, mecanizan y memorizan una serie de pasos para resolver operaciones. Éstos pueden asegurar con éxito un resultado, pero, ya ha quedado demostrado, que no suponen una mejora cognitiva, no desarrollan el pensamiento lógico-matemático y eso sí, generan una dependencia (innecesaria) a la larga del lápiz y papel ("cálculo escrito").

En el siglo XXI, ¿Son el lápiz y el papel cosas que incluimos en nuestro bolso antes de salir a la calle por si debiéramos realizar alguna operación? ¿Qué sentido tiene hacer divisiones, para luego llegar a 6º de Primaria y ser incapaz de dividir mentalmente 145 € : 3 amigos?¿Para qué divisiones de dos y tres cifras, si el estudiante es incapaz de plantear un problema coherente con esas cantidades?

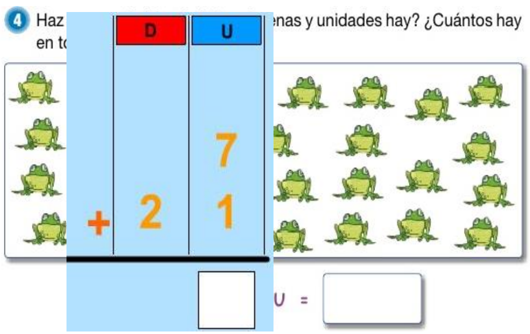
Este taller pretende ofrecer a los profesores, Otros Algoritmos para las Operaciones Aritméticas (OAOA), que desarrollen un cálculo mental para el siglo XXI a través de cálculos exactos con cantidades pequeñas y cálculos aproximados (estimaciones) con cantidades mayores, donde los exactos se obtendrán a través de las calculadoras.

Un algoritmo se define como una secuencia de pasos ordenada para obtener un resultado. Aplicado a las matemáticas y, más concretamente a la aritmética de las 4 operaciones básicas, se determina como los "pasos matemáticos" (generalmente instruidos de forma directa por el profesor) para obtener un resultado (generalmente un número).

ISBN 978-84-945722-3-4

La primera vez que un alumno escribe de forma estructurada (una organización *formal* de los números) su primera operación básica, es alrededor de los 6 años, donde ya los profesores quieren ver en esas libretas *"una suma en condiciones"*. Suele pasar que los profesores quieren decir : *"ya estoy dando la suma"* y, normalmente, cuanto antes mejor. Pero ¿dominan los alumnos de esa edad los aspectos cualitativos de los números? ¿son capaces de establecer relaciones entre ellos? ¿tiene alguna estrategia de pensamiento que no sea el conteo para abordar los números?

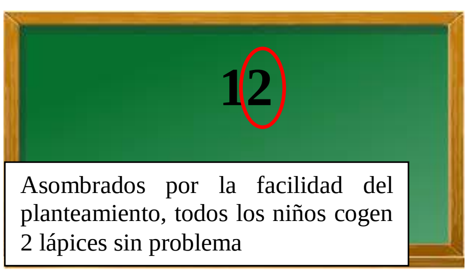
La mayoría de los alumnos han escuchado el concepto de decenas y unidades. Es más, han trabajado muchas veces actividades para ello y, sin embargo, no tienen interiorizado el sentido numérico correctamente. Veamos algunos ejemplos clásicos:



Actividades tipo para el concepto de Decenas y Unidades (1º-2º Primaria)

Los alumnos pueden hacer muchos de estos ejercicios. Sin embargo, después de muchos meses de trabajo, se les plantea a los alumnos este pequeño reto individualmente:

"Observa el número que está en la pizarra. Ahora vete a la caja de los lápices y coge la cantidad de lápices que se señalan"



Asombrados por la facilidad del planteamiento, todos los niños cogen 2 lápices sin problema

"Observa de nuevo el número. Ahora vete a la caja de los lápices y coge la cantidad de lápices que se señalan"

12

ISBN 978-84-945722-3-4

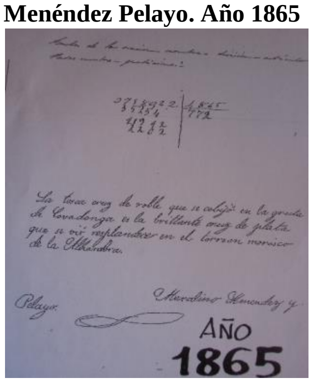
Asombrados por la "facilidad" del planteamiento, todos los niños cogen 1 lápiz.

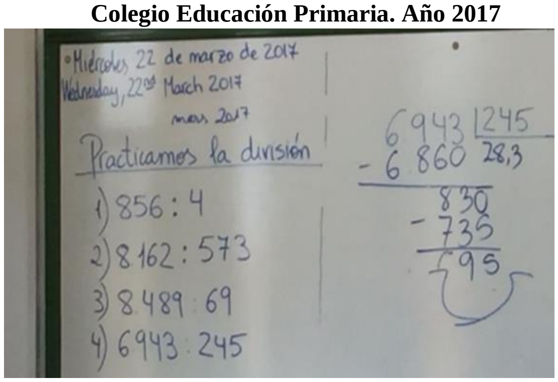
Si le preguntamos a los niños cuántos lápices tienen en la mano, sin duda responderán "tres". Ellos verán 12 en la pizarra y 3 en su mano y no entenderán el por qué.
Analicemos cuáles pueden ser los motivos de la falta de claridad del sentido numérico:
1. Escaso o nulo paso del alumno por la fase manipulativa, fundamental para la construcción significativa de los conceptos matemáticos a través de objetos reales o materiales estructurados (Regletas de Cuisenaire, por ejemplo). Esta quizás es una de las mayores contribuciones de los docentes al fracaso de las matemáticas y su escasa comprensión. La importancia de esta fase inicial, es ampliamente defendida y desarrollada desde los años 60 por autores como Jerome Bruner (1960).
2. Focalización de la didáctica de la matemática sobre los aspectos cuantitativos de los números y no en su carácter cualitativo (valor absoluto y relativo, valor de posición).
3. Trabajar con cifras en la escuela y no con cantidades, las cuales le otorgan mayor capacidad de concreción y comprensión a la matemática en la educación básica.
4. Excesiva obsesión por parte de los docentes de *"ver cuanto antes"* algunos supuestos síntomas de avances en el curriculum (como el algoritmo de la suma), sin consolidar algunos cimentos fundamentales previos.
Los algoritmos tradicionales para las operaciones aritméticas (pensemos, por ejemplo, en una suma tradicional colocando "unidades con unidades y decenas con decenas en columnas y acarreando") surgieron en una época de la historia donde se necesitaba realizar recuentos, conteos y agrupaciones de una forma estructurada y, las calculadoras o el acceso a las misas, era una cuestión casi puntual. Estos algoritmos (pensemos en los clásicos libros de contabilidad) tuvieron validez hasta los años 80.
La incorporación de las nuevas tecnologías y, especialmente de la calculadora, supuso y una revolución total en la educación matemática.

ISBN 978-84-945722-3-4

Llevamos 40 años de retraso en la educación matemática. En las escuelas siguen vivas estas prácticas inútiles que no desarrollan el cálculo mental.

Menéndez Pelayo. Año 1865 **Colegio Educación Primaria. Año 2017**





En el marco Europeo (pruebas PISA), pese al gran auge y difusión de la educación en Finlandia, es Holanda y su matemática realista (Instituto Freudenthal), la que obtuvo mayor puntuación son. Ya ambos países abandonaron los algoritmos tradicionales hace décadas. Por otro lado, Singapur, con un cambio radical en la didáctica de las matemáticas en las últimas décadas, se ha colocado como número uno en el contexto internacional (Pruebas TIMSS) ¿Qué ha pasado en esos países para que se haya producido ese cambio metodológico? ¿Guardará alguna relación dicho cambio con la mejora sobresaliente de los resultados y el abandono de los ATOA?

"Para introducir la idea de aritmética mental reproducimos la definición del Instituto Freudenthal Aritmética mental: es el cálculo interno con representaciones numéricas mentales en lugar de escritas. Esto incluye el uso de datos memorizados y las propiedades de los números y las operaciones y las maneras en que éstas se relacionan. Sin embargo, no es lo mismo que hacer cálculos y escribir algunos pasos cuando sea necesario. No debería ser visto como lo opuesto a la aritmética escrita"

Glosario de Van der Heuvel-Panuizen (2001)

En el Curriculum de Canarias, (DECRETO 89/2014, de 1 de agosto, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Canarias) se expone claramente, entre otras cosas, indicadores evidentes en los criterios de evaluación y las acciones procedimentales relacionadas con la metodología que defendemos aquí:

- Uso de materiales manipulativos para desarrollar le razonamiento lógico-matemático a través de la observación, el descubrimiento y la investigación.
- Uso de materiales manipulativos para concretar las ideas matemáticas y favorecer tanto su comprensión como su aplicación.

"Saber hacer sumas y restas puede no ser un indicador de saber sumar y restar"

Por último, recordar que el cálculo mental siempre va enfocado a la mejora en la resolución de problemas y no con el objetivo de saber hacer sumas y restas.

- Conocimiento, aplicación y desarrollo del lenguaje simbólico, una vez se ha cargado de significado el mismo.

ISBN 978-84-945722-3-4

- Uso didáctico de la calculadora como herramienta básica de trabajo, tanto como para el desarrollo del cálculo mental, como otros aspectos como la posibilidad de buscar patrones y regularidades, establecer conexiones, cálculo de los resultados exactos de operaciones poco cotidianas o la capacidad la autocorrección.
- Desarrollo de varios algoritmos para cada una de las 4 operaciones básicas: algoritmos flexibles, basados en las propiedades y en la descomposición de los números y donde se potencia la invención de estrategias creadas por los propios educandos.

Y en el taller...
En este taller de práctica y reflexión, los asistentes podrán ver sesiones de aula donde se evidencia la mejora inmediata del cálculo mental en alumnos que implementan otros algoritmos para las operaciones aritméticas. Además, se realizarán varias practicas de esos mismos algoritmos flexibles donde el sentido numérico cobra especial importancia y en donde la metacognición de los procesos aparece de forma evidente, gracias a la verbalización de las acciones mentales obtenidas para dichos cálculos.
Finalmente, dispondremos de un tiempo de reflexión conjunta donde los participantes nos contarán sus impresiones a nivel didáctico y emocional.

Referencias bibliográficas

-Fernández Bravo, J. (2014). *Números en Color* (4ª Edición).Madrid: CCS.
- Fernández Bravo (2007). Hacia una revisión crítica de la enseñanza del número de dos cifras. Número 11. ISNN:1815-0640. Unión.
-Grupo Cero (Valencia) (1996). *Materiales curriculares para la Educación Primaria:* Matemáticas. M.E.C.- Madrid: Edelvives
- Heuvel-Panhuizen, M. V. D. (2000). Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. Instituto Freudenthal. Utrecht: ICME9, Universidad de Utrecht.
-National Council of Teachers of Mathematics (NTMC**)** (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática.* Sevilla: S.A.E.M. Thales.
- Plunkett, S. (1979) Decomposition and All That Rot. Mathematics in School, v.8, n.3, p. 2-5
Digital
-Movimiento OAOA. **Ruta digital:**
www.oaoamatematicas.org
- Ramón, A. Canal Yotube "Antonio Martin 2020". **Ruta digital:**

https://www.youtube.com/watch?v=vNVj2Xhybh4&list=PLDfo4AElVoBskW4R9Cv5lww

paN6jnSe49

ISBN 978-84-945722-3-4

T-465

Anexo 1 (Cuadro sobre el análisis de tareas propuestas por el OEM)

QUADRO DE ANÁLISE DE TAREFAS				
CRITÉRIOS	**POSSIBILIDADES**			
TIPOS DE TAREFAS	Exercícios	Problema	Exploração	Investigação
ESTRUTURA	Fechado	Semiaberta/Intermediaria (com sugestões de como fechar sem perder o caráter investigativo)/ semiaberta/intermediária)	Aberta	
FOCO DO ENSINO	CONCEITUAL	PROCEDIMENTAL	CONCEITUAL/PROCEDIMENTAL	
REFERÊNCIA	Matemática pura	Semirealidade	Realidade	
DESAFIO	Reduzido	Intermediário	Elevado	
TEMPO	Curto (1 ou 2 aulas)	Médio (3 ou 4 aulas)	Longo/médio (mais de 4 aulas)	
Possibilidade geral de Comunicação	Diretiva	Dialógica		
Background (familiariedade com conteúdos)	Sim	Não		

Cuadro 1. Descripción del análisis de tareas.
Fuente: OEM-Bahia

Diagnóstico (Anexo 2)

1. ¿Qué entiende por estrategia?

2. ¿Qué tipo de estrategias conoce?

3. Enuncie algunas estrategias que utiliza en su práctica pedagógica

4. ¿Cómo define las estrategias de enseñanza?

5. ¿Qué estrategias utiliza antes de implementar una determinada tarea?

ISBN 978-84-945722-3-4

____

6. ¿Qué estrategias utiliza durante la implementación de una determinada tarea?

____

7. ¿Qué estrategia utiliza después de la implementación de una determinada tarea?

____

8. ¿Qué importancia o impacto tiene la implementación de aquellas estrategias de enseñanza en su práctica pedagógica?

____

____

____9. ¿Por qué implementa las anteriores estrategias de enseñanza antes mencionadas?

Tarea matemática: Clasificando los triángulos (Anexo 3)

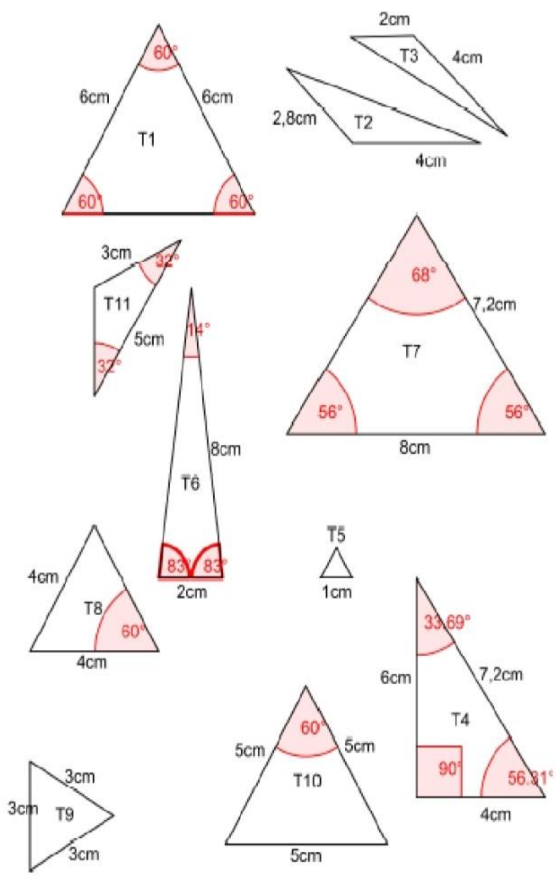
Está tarea involucra las exploraciones con triángulos. Vamos a comenzar!

1. Utilice los triángulos de la hoja anexada para llenar la tabla a seguir

	Número de lados con medidas iguales	**Número de ángulos con medidas iguales**
Triángulo 1 (T1)		
Triángulo 2 (T2)		
Triángulo 3 (T3)		
Triángulo 4 (T4)		
Triángulo 5 (T5)		
Triángulo 6 (T6)		
Triángulo 7 (T7)		
Triángulo 8 (T8)		
Triángulo 9 (T9)		
Triángulo 10 (T10)		
Triángulo 11 (T11)		

2. A partir de la completación de la tabla, ¿Cómo podemos agrupar los triángulos de la hoja correspondiente a los triángulos? Describa las características de cada grupo formado.

ISBN 978-84-945722-3-4



Concepciones sobre estrategias de enseñanza mediante tareas matemáticas en la práctica pedagógica del profesor: Una mirada desde las plataformas virtuales educativas

Jakeline Amparo Villota Enríquez – Maribel Deicy Villota Enríquez
javillota@hotmail.com – mares-696@hotmail.com
Universidad Santiago de Cali, Colombia; Universidade Federal de São Carlos

Núcleo temático: Formación de profesores de Matemáticas
Modalidad: Mini curso
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: Estrategia. Estrategia de enseñanza. Concepciones. Formación de profesores. Tareas matemáticas.

Resumen
Este mini curso aborda las concepciones de los profesores utilizadas en la implementación de estrategias de enseñanza a través de tareas matemáticas mediante plataformas virtuales. Inicialmente, se realizará un diagnóstico identificando estrategias de enseñanza por ellos utilizadas, evidenciando sus concepciones a priori. Luego se presentará una conceptualización de estrategias de enseñanza, iniciando con el concepto de estrategia, para llegar a la relación que existe entre las estrategia de enseñanza y las tareas matemáticas. Posteriormente se implementará una tarea matemática, de las construidas por el grupo colaborativo "Observatório de Educação Matemática" (OEM), con la finalidad de que los participantes la exploren. En seguida, se presentarán algunos estudios visualizando la implementación de estrategias de enseñanza a través de tareas matemáticas mediante plataformas virtuales, resaltando cambios significativos en la práctica pedagógica. Finalmente, después de haber experimentado la teórica y la práctica de las estrategias de enseñanza, se realizará nuevamente el diagnóstico inicial con el propósito de evidenciar cambios en las concepciones de los participantes, intentando visualizar las reflexiones que se generaron después del taller, en aras de retroalimentar sus prácticas pedagógicas

Introducción

Las estrategias de enseñanza en el campo de las Matemáticas constituyen uno de las temas más debatidos a nivel científico. Partiendo de la premisa que la integración de los resultados efectivos en el salón de clase debe pasar por una reflexión consciente de lo planeado por el profesor, es esa una concepción que, con el tiempo, le llevará a cuestionar su práctica pedagógica.

En un estudio de caso, Thompson (1992)indica que una de las grandes armonías entre las concepciones de las estrategias de enseñanza y la práctica pedagógica está ligada a la capacidad de reflexión del profesor. Así, la reflexión favorece la práctica pedagógica del profesor y por ende la coherencia entre sus concepciones y las estrategias de enseñanza, permitiéndole alcanzar resultados útiles para fortalecer la calidad de la enseñanza de la Matemática en el salón de clases.

En este sentido, las concepciones y las estrategias de enseñanza son elementos que están presentes en la práctica pedagógica del profesor, aunque en el momento en que se utiliza determinada estrategia en el salón de clase, eso no sea visualizado por los estudiantes directamente (Moreano, Asmad, Cruz, & Cuglievan, 2008). Es decir, el profesor tiene un conjunto de concepciones que no las evidencia directamente al momento de implementar diferentes estrategias de enseñanza.

ISBN 978-84-945722-3-4

Si las estrategias de enseñanza constituyen una de las grandes herramientas que tienen los profesores para fortalecer la consecución de los objetivos trazados dentro de cualquier tarea propuesta al estudiante (Kohler, 2005); entonces, ellas dependerán en gran medida de la reflexión, indagación y cuestionamiento de la utilización que el profesor hace de ellas, generando así elementos clave para la construcción de sus concepciones. Partiendo de estas consideraciones, se puede decir que es sobre la reflexión, investigación y cuestionamiento de dichas estrategias, que se construyen las concepciones de las mismas.

Dado lo anterior, este mini curso iniciará con la implementación de un diagnóstico que tiene como finalidad conocer la concepciones iniciales que tienen los profesores sobre las estrategias de enseñanza. En seguida, se mostrará un marco teórico concerniente a las estrategias de enseñanza, que contiene: conceptualización, tipos de estrategia de enseñanza e implementación de las mismas en el salón de clases. En seguida, se implementará una tarea matemática, con el propósito de que los participantes, a través sus concepciones y las temáticas tratadas, la exploren. Posteriormente, se mostrarán algunos estudios relacionadas con las estrategias de enseñanza y tareas, y, finalmente se realizará nuevamente el diagnóstico a los participantes.

A continuación, en la siguiente sección, se presentará de manera detallada la conceptualización de diferentes términos que fortalecen este mini curso.

Conceptualización de estrategia

El concepto de estrategia aparece inicialmente ligado al ámbito militar y tuvo un desarrollo práctico desde Alejandro Magno (356-323 a.c.), pasando por Aníbal (249-183 a.c.), Escipión el Africano (236-184 a.c.), Julio César (100-44 a.c.), incluso Federico el Grande (1717.1786) y Napoleón (1769-1821), hasta que Carlos von Clausewitz (1780-1813) lo establece teóricamente en su obra "De la guerra", que consta de 8 libros, definiéndola como "el arte de los generales".

En los siglos XIX y XX este concepto tiene un desarrollo tardío como herramienta científica o metodológica para resolver los problemas que presentaba la política frente a los intereses nacionales o de grupos nacionales que compartían intereses comunes frente a grupos antagónicos que no compartían intereses (Santos Pico, 2004).

Para comienzos del siglo XXI, en este ámbito militar, la estrategia se entiende como un recurso metodológico que facilita esta tarea, especialmente en época de crisis, por lo que se

ISBN 978-84-945722-3-4

puede concluir que el concepto de estrategia, desde esta perspectiva, no es otra cosa que el arte de vencer al contrario.

En el ámbito educativo, y particularmente en lo cognitivo, el desarrollo del concepto de estrategia ha permite avances en la investigación educativa, al distinguir dos tipos de sujetos: el epistémico y el psicológico. Por sujeto epistémico se entiende según Inhelder (1978), "todo lo que hay de común a las estructuras intelectuales de los sujetos de un mismo nivel de desarrollo", y por sujeto psicológico, "lo que es propio del individuo", como por ejemplo la necesidad de una organización general que debe operarse entre el objetivo a alcanzar y los medios disponibles (p. 5).

Teniendo en cuenta que la descripción de las estrategias (sujeto psicológico) permite plantear situaciones de enseñanza (sujeto epistémico), se puede definir el concepto de estrategia como: **"todo sistema y toda secuencia de procedimientos, susceptibles de ser repetidos y tranferidos a otras situaciones, y que constituyen los medios para alcanzar el fin al que tiende el sujeto"** (Inhelder, 1978, p. 7). Una apliación de estas definiciones se puede evidenciar en un trabajo sobre estrategias de aprendizaje de estudiantes de nivel básica (Ruíz & Riascos, 2014).

Aunque tiende a confundirse con técnica, de ésta podemos decir que es entendida como el cómo hacer algo. Pozo y Póstigo (2000), propone que la adquisición de técnicas ya sean motoras o cognitivas, se basa en un aprendizaje asociativo, reproductivo, identificando tres fases en la adquisición de una técnica:

a. La presentación de unas instrucciones verbales a través de un modelo: puede ser un listado de instrucciones o la representación de un modelo gráfico o la combinación de ambos y, de manera ideal, se debe desglosar la técnica en sus componentes mínimos, lo cual requiere un análisis de la tarea.
b. La práctica o ejercicio de las técnicas presentadas por parte del aprendiz hasta su automatización: la función de esta fase es condensar y automatizar la secuencia de acciones en una técnica o rutina sobreaprendida.
c. El perfeccionamiento y transferencia de las técnicas aprendidas a nuevas tareas: se basa en procesos de ajuste de la técnica a las nuevas condiciones de aplicación, que implicará tanto procesos de generalización como de especialización.

Díaz Barriga y Hernández (2002) identifican cuatro tipos de estrategias:

ISBN 978-84-945722-3-4

1. Autorreguladoras: estrategias de alto nivel que permiten regular procesos de aprendizaje y de solución de problemas.
2. De Apoyo: estrategias de administración de recursos que pueden ubicarse también en el plano motivacional y cuya función es mantener un estado mental y un contexto de aprendizaje adecuados para la aplicación de operaciones de aprendizaje. Mantienen la concentración, reducen la ansiedad, administran el tiempo de estudio, mantienen la atención, etc.
3. De Aprendizaje: procedimientos que el alumno usa en forma deliberada, flexible y adaptativa para mejorar sus procesos de aprendizaje significativo de la información.
4. De Enseñanza. procedimientos que los agentes de enseñanza usan en forma reflexiva y flexible para promover el logro de aprendizajes significativos en los alumnos (Mayer 1984; Schuell, 1988; West, Farmer y Wolf, 1991, citados en Díaz Barriga y Hernández, 2002, p. 141). Las estrategias de enseñanza son medios o recursos para prestar ayuda pedagógica.

Conceptualización sobre estrategias de enseñanza

Actualmente, existen sin duda diferentes herramientas que el profesor utiliza en su práctica pedagógica en aras de fortalecer el aprendizaje del estudiante, entre ellas, por ejemplo, tenemos las estrategias de enseñanza. Es decir, las estrategias de enseñanza, son elementos importantes, las cuales, son implementadas diariamente por el profesor durante el desarrollo de diferentes tareas[8] propuestas a los estudiantes, con el propósito de que el alcance la conceptualización de las distintas temáticas abordados en aquellas tareas.

En este sentido se pueden entender las estrategias de enseñanza como el conjunto de decisiones que el profesor toma para abordar un determinado tema, partiendo de un objetivo previo, es decir, son las orientaciones planeadas y generadas por el profesor en el momento de realizar una determinada tarea[9].

---

[8] La tarea matemática es considerada como aquel segmento de actividades abordadas en el salón de clases en donde los estudiantes son invitados a resolver problemas, desenvolver conceptos matemáticos utilizando ideas y estrategias para realizar procedimientos y así ofrecer oportunidades para el aprendizaje de la Matemática. (MARGOLINAS, 2013; BURKHARDT; SWAN, 2013)

[9] "Tarefas" é abordado como uma determinada situação de aprendizagem proporcionada pelo professor; ou seja, é uma situação no qual o professor propõe um tipo de tarefa (exercício, problema, exploração, investigação e etc.) para estudantes, convidando-os a desenvolvê-la, usando diferentes estratégias no dito desenvolvimento Villota (2016).

ISBN 978-84-945722-3-4

En este mini curso definiremos las estrategias de enseñanza como aquellas orientaciones que el profesor da a los estudiantes con el fin de promover el aprendizaje; es decir, se trata de las orientaciones que el profesor proporciona a sus estudiantes con el propósito de desarrollar en ellos distintas capacidades para la interpretación de la información relacionada con una determinada tarea. En este caso particularmente, las estrategias de enseñanza se refieren al conjunto de orientaciones que el profesor da a sus estudiantes con el fin de promover el desenvolvimiento de la tarea matemática (Villota, 2016).

Es importante resaltar, que las tareas matemáticas que se presentaran en este estudio son realizadas por el grupo colaborativo "Observatório de Educação Matemática" (OEM-Brasil)[10], donde los integrantes construyen materiales curriculares, particularmente tareas matemáticas. Este grupo, tiene como objetivo delinear propuestas de tareas para la enseñanza de tópicos previstos en el programa de la disciplina Matemática, con la finalidad de inspirar a cambios en la práctica pedagógica del profesor.

Así, en el anexo (1) encontramos el cuadro sobre la estructura que el OEM para construir las diferentes tareas matemáticas. Cabe resaltar que el OEM, tiene como enfoque construir aquellas tareas exploratorias con el propósito de utilizar diferentes estrategias de enseñanza como, por ejemplo, la interacción entre estudiantes.

Las estrategias de enseñanza sirven de puente entre los contenidos curriculares y la forma de abordarlos, tal como lo argumenta Camilloni (1998, p. 186), citada por (Anijovich & Mora, 2010):

> [...] es indispensable, para el docente, poner atención no sólo en los temas que han de integrar los programas y que deben ser tratados en clase sino también y, simultáneamente, en la manera en que se puede considerar más conveniente que dichos temas sean trabajados por los alumnos. La relación entre temas y forma de abordarlos es tan fuerte que se puede sostener que ambos, temas y estrategias de tratamiento didáctico, son inescindibles.

Es decir, que las estrategias implementadas por el profesor inciden directamente en el desarrollo de los contenidos curriculares, exploración y comprensión de los mismos en el momento de ser experimentados por el estudiante. Por lo que, la preparación de las estrategias de enseñanza juegan un papel trascendental en el aprendizaje del estudiante, puesto que, ellas

[10] Sitio oficial del grupo colaborativo OEM. Se encuentra diferente material curricular para ser utilizado por diferentes profesores que enseñan Matemáticas. http://www.educacaomatematica.ufba.br/

ISBN 978-84-945722-3-4

intentan ser mediadoras entre los contenidos curriculares y la forma de abordarlos y no por el contrario obstáculos para el proceso de aprendizaje.

De este modo, la exploración de las diferentes tareas matemáticas puede manipularse mediante las plataformas virtuales educativas[11], entre ellas; tenemos la Sofia XT, Educaplay entre otras; las cuales, nos facilitan elementos virtuales como: Sopa de letras, wikes, etc., en aras de fortalecer el proceso de aprendizaje del estudiante. En otras palabras, las tareas matemáticas pueden ser desarrolladas mediante distintas plataformas virtuales educativas.

En consecuencia, las estrategias utilizadas por el profesor pueden ser clasificadas según el momento de implementación, tal como lo hacen Díaz y Hernández (2002); quienes las categorizan en tres grandes grupos: Pre-instruccionales, co-instruccionales y pos-instruccionales, como se muestra a continuación:

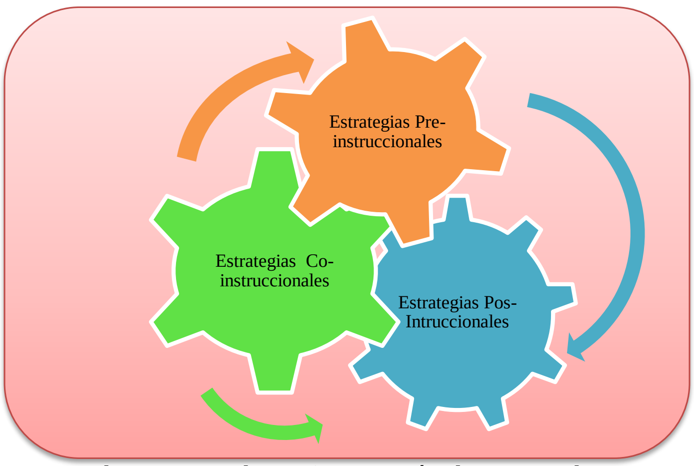


Figura 1. Tipos de estrategias de enseñanza, según el momento de su presentación en una secuencia de enseñanza. Fuente: Villota, Riascos (2017)

De este modo, para Díaz Barriga y Hernández (2002) citado por Villota (2016, p. 55), aborda estas tres categorías argumentando que las estrategias pre-instruccionales "son aquellas que

[11]Según Fernandez (2009) argumenta que una plataforma e-learning, plataforma educativa web o Entorno Virtual de Enseñanza y Aprendizaje es una aplicación web que integra un conjunto de herramientas para la enseñanza-aprendizaje en línea, permitiendo una enseñanza no presencial (e-learning) y/o una enseñanza mixta (b-learning), donde se combina la enseñanza en Internet con experiencias en la clase presencial (PLS Ramboll 2004; Jenkins, Browne y Walker, 2005).

ISBN 978-84-945722-3-4

dan apertura a una determinada tarea, teniendo como fin preparar y alertar al estudiante en relación a qué y cómo aprender"; es decir, estas estrategias tienen como propósito dar apertura al desarrollo de una determinada situación de enseñanza propuesta por el profesor.

Seguidamente, las estrategias co-instruccionales fortalecen el desarrollo de los contenidos curriculares durante el desenvolvimiento de una determinada situación de enseñanza propuesta por el profesor; es decir, estas estrategias se utilizan durante el desarrollo de dicha situación en aras de propiciar la exploración por el estudiante.

Posteriormente, las estrategias pos-instruccionales se presentan después que el estudiante ha realizado el desarrollo de la determinada situación de enseñanza propuesta por el profesor, permitiéndole socializar y dar encerramiento a la misma. Estas estrategias, ayudan a integrar todo el proceso de exploración antes, durante y después de que el estudiante a desarrollo la determinada situación de enseñanza.

Consecuentemente, la categorización de las estrategias de enseñanza antes mencionadas y tratadas por Díaz Barriga y Hernández (2002) ayuda a fortalecer su utilidad, ya que, el profesor pueda darle uso teniendo en cuenta el momento a ser implementada, tal como lo afirma Villota (2016, p. 56):

> La clasificación de las estrategias de enseñanza, más allá de brindar un esquema de organización, intenta darle al profesor una visualización más amplia sobre su uso, con el propósito de que pueda implementarlas en las distintas actividades, como por ejemplo, las tareas matemáticas

De esta manera, indudablemente las estrategias utilizadas por el profesor y su utilidad están estrechamente relacionadas con su práctica pedagógica y por ende con el proceso de aprendizaje del estudiante.

Referencias bibliográficas

Anijovich, R., & Mora, S. (2010). *Estrategias de Enseñanza: Otra mirada al quehacer en el aula.* Buenos Aires, Argentina: Aique Grupo Editor

Camilloni, A. (1998). Sobre la programación de la enseñanza de las ciencias sociales. En R. Anijovich, & S. Mora, *Estrategias de enseñanza: Otra mirada al quehacer en el aula.* Buenos Aires, Argentina: Aique.

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task anda activity. En B. Christiansen, A. G. Wowson, & M. Otte, *Perspectives on mathematics education.* Dordrecht, Holanda: D. Reidel Publishing Company.

Freire, P. (2007). *Pedagogia da autonoma: Saberes necessários à prática educativa* (Vol. 36). Sao Paulo, Brasil: PAz e Terra.

Geromel, R. C., & Redling, J. P. (2012). Tarefas alternativas para o ensino e a aprendizagem de funçoes: análise de uma intervençao no ensino médio. *Boletin de Educaçao Matemática - Bolema , 26* (42A), 193-229.

Kohler, J. (2005). Importancia de las estrategias de enseñanza y el plan curricular. *Liberabit Revista de Psicología , 11*, 25-34.

Fernández-Pampillón, A. (2009) Las plataformas e-learning para la enseñanza y el aprendizaje universitario en Internet. In Las plataformas de aprendizaje. Del mito a la realidad. Biblioteca Nueva, Madrid, pp. 45-73. ISBN 978-84-9742-944-3

Martínez, M. (2003). Concepciones sobre la enseñanza del resta: un estudio en e ámbito de la formación permanente del profesorado. Barcelona, Barcelona: Universitat Autónoma de Barcelona.

Pozo, J. I., & Póstigo, Y. (2000). *Los procedimientos como contenidos escolares.* Barcelona, España: Edebé.

Ruíz, H., & Riascos, Y. (2014). ¿4^3 se puede leer como "cuatro subido a la tres"?: un estudio sobre las estrategias de construcción de la representación Polinomial. *Relime: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa , 17* (2), 191-218.

Thompson, A. G. (1992). Teachers´belief and conceptions: A synthesis of the reaserch. En d. A. Grouws, *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (págs. 127-146). New york, USA: Macmillan.

Villota, J. A. (2016). Estratégias utilizadas pelos professores que ensinam Matemáticas mediante a implementaçao de tarefas. Bahia, Brasil: Universidade Federal da Bahia.

Villota Enríquez, J. A., Villota Enríquez, M., & Ogecime, M. (2017). Estrategias de enseñanza utilizadas en el desenvolvimiento de tareas matemáticas: Importancia en su utilidad. *Revista Sigma , 12* (2), 53-70.

ISBN 978-84-945722-3-4

Moreano, G., Asmad, U., Cruz, G., & Cuglievan, G. (2008). Concepciones sobre la enseñanza de matemática en docentes de primaria de escuelas estatales. *Revista de Psicólogia , 26* (2), 299-334.

Santos Pico, M. J. (2004). *Apuntes de Estrategia: sobre Seguridad y defensa Nacional* (Primera ed.). Bogotá, Colombia: Universidad Militar Nueva Granada.

Inhelder, B. (1978). Las estrategias cognitivas: Aproximación al estudio de los procedimientos de resolución de problemas. *Anuario de Psicologia* (18), 3-20.

Díaz Barriga, F., & Hernandez Rojas, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: Una interpretación constructivista.* México, México: McGraw-Hill.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-477

DESARROLLO DE CINCO ACTIVIDADES STEAM CON FORMATO KIKS

J.M. Diego-Matecón[1] – Arturo Bravo[2] – Óscar Arcera[3] – Pablo Cañizal[3] – Teresa F. Blanco[4]– Tomás Recio[1] – Ignacio González-Ruiz[1] – Maitane Perez Isturiz[1]
josemanuel.diego@unican.es – matematicaslope@gmail.com – oscararceralopez@gmail.com – pablo.canizal@gmail.com – teref.balnco@usc.es – tomas.recio@unican.es – ignacio.gonzalezruiz@unican.es – maitane.perez@unican.es
[1]Universidad de Cantabria (España) – [2]I.E.S. Lope de Vega (España) – [3]Colegio San José – [4] Universidad de Santiago de Compostela

Modalidad: Taller (T)
Nivel educativo: Secundaria
Núcleo temático: Matemáticas y su integración con otras áreas
Palabras clave: educación secundaria, motivación, proyecto KIKS, STEAM

Resumen

Este taller describirá las líneas maestras del proyecto europeo KIKS (Kids Inspire Kids for Science, Technology, Engineering, Art, Mathematics) y su metodología. Los equipos de alumnos KIKS de dos centros cántabros (el IES Lope de Vega y el Colegio San José), presentarán, junto a sus profesores, cinco actividades diseñadas por ellos y tituladas Cámara Oscura, Razón Áurea, La Memoria, Focos Led y Telégrafo Inalámbrico. Se enfatizará la transversalidad de las mismas y, específicamente, los aspectos matemáticos implicados, tales como la observación, por las personas que se introduzcan en la Cámara Oscura, de la geometría de la proyección plana del exterior sobre el interior de la Cámara; o el diseño y construcción de instrumentos para identificar la Razón Áurea en objetos cotidianos y de la naturaleza; o los aspectos algorítmicos y de programación presentes en el Telégrafo Inalámbrico, donde se usa un sistema electrónico formado por una placa Arduino y una placa de prueba. Finalmente, se transmitirá a los profesores asistentes una información básica que les permita replicar la experiencia y extender la comunidad y filosofía KIKS a otros centros y países. El cupo será de 50 participantes, rotando por cada actividad en grupos de diez, hasta pasar por todas.

Introducción

Este trabajo describe cinco actividades STEAM desarrolladas dentro del proyecto KIKS (Kids Inspire Kids for STEAM). KIKS es un proyecto de la Unión Europea, dentro del programa Erasmus+, conformado por centros educativos de los cuatro países participantes: España, Finlandia, Hungría y Reino Unido. Su objetivo es impulsar las áreas STEAM

ISBN 978-84-945722-3-4

(Science, Tecnology, Engineering, Art y Mathematics) en secundaria; y su filosofía es fomentar el interés, la motivación y creatividad de los estudiantes de este nivel por el aprendizaje de las STEAM. Para ello KIKS impulsa la creación de una comunidad educativa, integrada por diversos equipos de estudiantes de los países participantes. Ellos son los encargados de elaborar, bajo la supervisión de sus profesores, tareas STEAM, y contribuir a su difusión entre sus homólogos internacionales. Información más detallada sobre el proyecto puede encontrarse en (Istúriz et al., 2017 y Búa et al., 2016).

La metodología STEAM se basa en el aprendizaje integrado de las disciplinas científicas y el arte (Fenyvesi, Téglási y Szilágyi, 2014). Esta integración tiene lugar principalmente mediante la resolución de actividades o proyectos, trabajando conjuntamente los contenidos y herramientas de las disciplinas mencionadas anteriormente (Rocard et al., 2007). Estas actividades o proyectos son situaciones abiertas, no estructuradas, en las que se provocan de manera intencionada procesos de investigación científica dentro de un marco práctico de diseño y resolución de problemas reales. Esta metodología suele, por lo tanto, dar como resultado el desarrollo de un producto por parte de los alumnos, en el que se ponen en práctica los conocimientos científicos de los mismos para resolver diversos problemas. También puede darse el proceso contrario, en el que el tratamiento de situaciones reales requiere al alumno el estudio teórico de contenidos de las materias implicadas (Fortus et al., 2005).

Actividades STEAM con formato KIKS

Las actividades STEAM con formato KIKS tienen como característica particular que se realizan en lengua inglesa, para que los alumnos puedan presentarlas a sus homólogos internacionales con el objetivo de despertar su motivación por las diferentes áreas STEAM. Además requieren ser presentadas en dos formatos: (1) Un documento de texto o Power Point en el que se describe la actividad, su desarrollo y resultado final, haciendo principal hincapié en la parte analítica de la misma. (2) Un vídeo donde se explica la parte práctica de la actividad que es difícil de representar por escrito: presentación del material, trabajos manuales realizados, mediciones, construcción de artefactos, y una demostración del funcionamiento de los mismos en los casos que corresponda.

ISBN 978-84-945722-3-4

Dada la extensión limitada del artículo, a continuación describimos brevemente cada una de las cinco actividades KIKS (Cámara Oscura, Telégrafo Inalámbrico, Memoria, Razón Áurea y Focos Led) llevadas a cabo por los estudiantes de 15/16 años de dos centros Cántabros: IES Lope de Vega y Colegio San José. Información más detallada de estas, y otras, actividades KIKS puede encontrarse en: http://www.kiks.unican.es/.

Cámara Oscura

La actividad de la cámara oscura surgió a partir de una idea de los alumnos de 16 años del I.E.S. Lope de Vega. Integra al menos cuatro disciplinas STEAM: las Matemáticas, la Ciencia, la Tecnología y el Arte. Los objetivos fueron cinco: (1) construir una cámara oscura, (2) aprender la historia de las cámaras oscuras, (3) conocer las características básicas de la óptica geométrica, (4) entender el funcionamiento óptico del ojo y (5) realizar experimentos relacionados con la visión binocular.

Esta actividad comenzaron a desarrollarla dos alumnos, incorporándose más tarde otros compañeros y llegando a implicarse, posteriormente, todo el centro. Para construir la cámara oscura se utilizaron materiales de desecho y de bajo coste. En particular, se fabricó con una sombrilla de playa grande y con un plástico negro que la cubría totalmente. El plástico se sujetaba al suelo con unos listones de madera que impedían la entrada de luz desde exterior.

Imagen 1. Montaje de la cámara oscura

ISBN 978-84-945722-3-4

Imagen 2. Estudiantes presentando las cámaras oscuras construidas

En esta actividad los alumnos trabajaron contenidos, procedimientos y destrezas relacionados con la proporcionalidad (en la disciplina de matemáticas), la luz y la fisiológica de ojo (en las disciplinas de Ciencias), el diseño y construcción de superficies esféricas a partir de materiales planos (en la disciplina de Tecnología), y la fotografía (en la disciplina de Arte).

Telégrafo Inalámbrico

Esta actividad fue realizada por alumnos de 15/16 del Colegio San José y la idea surgió a partir de la experimentación con otros proyectos tecnológicos. Integra al menos tres disciplinas STEAM: Ciencia, Tecnología e Ingeniería. Los objetivos fueros tres: (1) la familiarización con componentes electrónicos (resistencia, led, buzzer, ldr, etc.), (2) la comprensión y creación de algoritmos, mediante la programación en Arduino, a través de diferentes entornos de programación en bloques (bitbloq, mbloq, IDE de Arduino, etc.) y (3) el uso de placas protoboard para conexiones electrónicas.

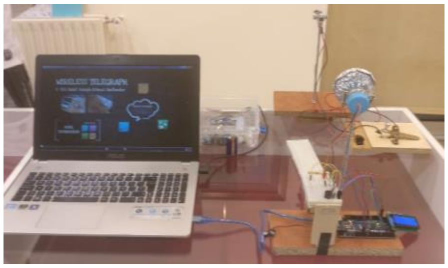


Imagen 3. Telégrafo inalámbrico

En esta actividad han participado seis alumnos y se llevó a cabo en horas de tecnología y en otras de tutoría. La actividad consistió en hacer una modificación del telégrafo tradicional y construir uno inalámbrico utilizando como componentes electrónicos principales un LED (Light Emitter Diode), una LDR (Light Dependent Resistance) y un sistema electrónico formado por una placa Arduino y ProtoBoard. Se trató

ISBN 978-84-945722-3-4

de una actividad abierta, teniendo en cuenta que el diseño que se plantea puede dar lugar a diferentes soluciones y a ampliaciones de los objetivos iniciales, como podría ser el diseño de sistemas de control remotos. Es una actividad de grupo, en la que pueden trabajar de 4 a 6 alumnos.

En esta actividad los alumnos trabajaron competencias y destrezas recogidas en las *TOP 10 Skills in demand in 2020* y que son consideradas hoy en día como las demandas del mercado laboral para los próximos años: Resolución de problemas Complejos, Creatividad, Trabajo en Equipo, Reflexión y Toma de Decisiones y Flexibilidad Cognitiva. Es una actividad que implica un reto relacionado con avances tecnológicos del mundo real, ya que necesita de las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación) para su correcto desarrollo.

Imagen 4. Alumnos soldando parte del telégrafo

Memoria

Esta actividad surgió a partir de una idea de los alumnos de I.E.S Lope de Vega e integra al menos dos disciplinas STEAM: Ciencia y Matemáticas. Los objetivos de la actividad fueron: (1) Averiguar si la memoria depende de los sentidos con los que se percibe la realidad, (2) Incidir en la importancia de la memoria, (3) Buscar reglas nemotécnicas y patrones en series de números aleatorios, como pueden ser los decimales del número 'pi', para conseguir memorizarlos y (4) Estudiar cómo memorizan los niños de seis años.

ISBN 978-84-945722-3-4

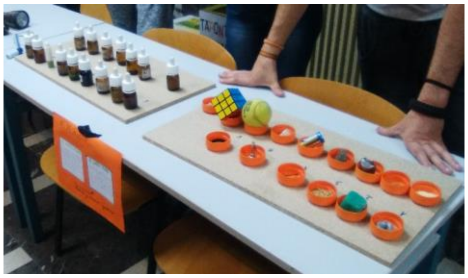


Imagen 6. Objetos a memorizar

En esta actividad han estado implicados cuatro alumnos y ha sido llevada exclusivamente por ellos, sin apenas intervención del coordinador. En particular se destacaron 3 experimentos para evaluar la memoria a corto plazo, en relación a tres de los cinco sentidos: visión, olfato y tacto. Los alumnos seleccionaron una muestra de sujetos, niños de seis años, a quienes les ofrecieron diez objetos diferentes que tenían que tocar con los ojos cerrados para luego recordar el orden en que les fueron presentados. Repitieron el experimento para el sentido del olfato presentando olores característicos. Finalmente se presentaron visualmente tarjetas con diferentes cantidades de elementos. Los resultados indicaron que el sentido de la visión facilita la memorización a corto plazo en mayor medida que los otros sentidos. Un cuarto experimento, sobre la memorización de secuencias numéricas, consistió en memorizar hasta 500 cifras del número ‘pi’, utilizando algoritmos propios para dar una estructura a la serie de números decimales y demostrar así que los límites de la capacidad memorística están más allá de donde se pudiera suponer.

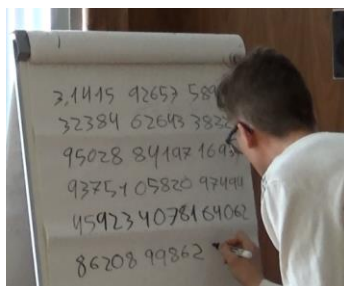


Imagen 5. Alumno escribiendo las cifras memorizadas del número pi

En esta actividad los alumnos trabajaron contenidos, procedimientos y destrezas relacionados con el funcionamiento del cerebro y la capacidad memorística (en las disciplinas de Ciencias) y la utilización de algoritmos (en la disciplina de Matemáticas) para facilitar la estructuración de secuencias numéricas y por lo tanto acrecentar la capacidad memorística.

Razón Áurea

ISBN 978-84-945722-3-4

Esta actividad surgió a partir de una idea de los alumnos de I.E.S Lope de Vega, a partir de una propuesta del profesor de artes plásticas, e integra al menos tres disciplinas STEAM: Ciencia, Arte y Matemáticas. Los objetivos de la actividad fueron fundamentalmente dos: (1) descubrir la presencia de la razón áurea en la naturaleza y el arte, y (2) cuestionarse si la razón áurea está realmente en la naturaleza o está más bien en la mirada que ponemos los humanos en las cosas.


Imagen 7. Comprobando la razón áurea en el cuerpo humano

En esta actividad han participado cuatro alumnos y para ella no se ha asignado ninguna sesión dentro del horario lectivo. En esta actividad los alumnos tuvieron que definir matemáticamente la razón áurea, comprobar las proporciones de nuestro cuerpo diseñando y usando el compás de tres puntas, utilizar aplicaciones informáticas para analizar las proporciones áureas del rostro humano, determinar manipulativamente la razón áurea de un segmento, y explicar las relaciones de proporcionalidad directa usando las propiedades físicas de bandas elásticas. Para la construcción de los artefactos, como por ejemplo el compás de tres puntas, se ha contado con la colaboración del Departamento de Tecnología, aunque no ha sido preciso asignar presupuesto alguno porque se ha utilizado material de bajo coste: listones de madera, bandas elásticas, láminas trasparentes, rotuladores, etc.

En esta actividad los alumnos trabajaron contenidos, procedimientos y destrezas relacionados con la proporcionalidad, el teorema de Tales y las progresiones geométricas (en la disciplina de matemáticas), la percepción de la proporción y las proporciones en la naturaleza (en las disciplinas de ciencias), la construcción con madera de aparatos de medida (en la disciplina de Tecnología), y el estudio de la razón áurea en manifestaciones artísticas (en la disciplina de Arte).

Focos Led


Imagen 8. Relaciones de proporcionalidad directa con bandas elásticas

Esta actividad surgió a partir de una idea del profesor y se llevó a cabo por los alumnos de 15/16 años del Colegio San José de Santander. Se trabajan principalmente contenidos de Ingeniería y Tecnología. Los objetivos específicos de la actividad fueron tres: (1) conocer las características y funciones de componentes electrónicos, (2) analizar y describir el funcionamiento de un circuito electrónico y sus diferentes componentes y (3) diseñar y realizar su propio montaje electrónico.

Imagen 9. Linterna con nueva batería

La actividad se diseñó para un grupo de 16 alumnos, con seis sesiones estructuradas de una hora de duración cada una. Consistió en cambiar la bombilla de una linterna tradicional por focos led, lo que conlleva el cambio de la batería, el diseño de las conexiones del circuito en placas protoboard, y el soldado y cableado de todos los elementos en la nueva linterna. Para esta actividad se utilizaron materiales reciclados entre los que se incluyen linternas, baterías externas, resistencias, cables e interruptores. Como material nuevo se adquirieron focos leds de bajo coste.

Imagen 10. Linterna con focos led

En esta actividad los alumnos han trabajado contenidos, procedimientos y destrezas relacionadas con el cálculo de la resistencia apropiada para el funcionamiento de los focos led (en la disciplina de física y matemáticas), relacionados con el diseño del circuito eléctrico (en la disciplina de ingeniería), y el montaje y cableado de las nuevas linternas (en la disciplina de tecnología).

Conclusión

En este trabajo se han descrito parcialmente cinco actividades STEAM con formato KIKS desarrolladas por dos centros de Cantabria. Estas actividades se han realizado utilizando diferentes espacios horarios, siempre que había un momento disponible, aunque, por lo general, fuera del horario de clase: utilizando recreos, horas en las que algún profesor se encontraba ausente o por Internet, a través de Twitter. Los profesores destacan que esta experiencia ha resultado especialmente motivadora para el alumnado, no sólo porque se trataba de desarrollar proyectos reales en los que el alumno tenía que crear un producto final, sino por el formato KIKS en el que se encuadraban. Un formato que implicaba realizar actividades en inglés con el fin de ser presentadas, físicamente o mediante videoconferencia, para motivar a otros estudiantes en el aprendizaje de las STEAM.

Referencias bibliográficas

Búa, J. B., Blanco, T. F., Diego-Mantecón, J. M., Istúriz, M. P., González-Ruiz, I., Recio, T., González, M. J. y Polo, I. (2016). Proxecto KIKS: interdisciplinaridade de dimensión europea. Actas del XXIX Congreso Enciga. Galicia, España.

Fenyvesi, K., Téglási, I., & Szilágyi, I. (Eds.). (2014). Adventures on Paper-Math-Art Activities for Experience-centered Education of Mathematics. Eger: Eszterházy Károly College.

Fortus, D., Krajcikb, J., Dershimerb, R. C., Marx, R. W., y Mamlok-Naamand, R. (2005). Design-based science and real-world problem solving. International Journal of Science Education, Vol 27, No. 7, pp. 855–879.

Istúriz, M. P., González-Ruiz, I., Diego-Mantecón, J. M., Recio, T., Búa, J. B., Blanco, T. F., González, M. J. y Polo, I. (2017). Kids Inspire Kids for STEAM (KIKS). Proceedings of CERME 10. Dublin, Ireland.

Rocard, M., Csermely, P., Walwerg-Henriksson, H., y Hemmo, V. (2007). Science Education now: a renewed pedagogy for the future of Europe. Bruselas: Comisión Europea. ISBN-978-92.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-485

Taller de juegos matemáticos aplicables al aula

SET Grup de jocs d'ABEAM
Jordi Deulofeu Piquet - Laura Morera Úbeda - Luis Cros Lombarte - Manel Martínez Pascual - Maria Bellés García - Teresa Longueira Guerrero
Jordi.Deulofeu@uab.cat - laura@explorium.cat – lluis.cros@sarria.epiaedu.cat - mmart659@xtec.cat - maria.belles.garcia@gmail.com - teresa.longueira@gmail.com
ABEAM (FEEMCAT) España

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
Modalidad: Taller
Nivel educativo: Secundaria
Palabras clave: juegos, manipulativo, recursos, lógica

Cantidad máxima de participantes: 60

Resumen

Los juegos de mesa son un buen recurso para trabajar los contenidos curriculares del área de matemáticas de forma competencial. En el taller que proponemos se presentarán diversos juegos comerciales, así como sus adaptaciones, con la finalidad de llevarlos al aula. De la misma manera, los juegos han servido para analizarlos con los alumnos y fomentar su competencia lingüística.

En la primera parte del taller se realizará una presentación del grupo y de las diferentes propuestas que hemos llevado a cabo, junto con sus resultados. A continuación, dividiremos a los asistentes en grupos donde podrán conocer, jugar y reflexionar con cada uno de los juegos. El análisis didáctico y las diferentes variantes que se podrían generar para convertir los juegos en actividades ricas de resolución de problemas, se realizarán in situ y se propondrá un sistema de rotación con el objetivo que los participantes puedan conocerlos todos.

La finalidad de este taller es mostrar el juego como recurso didáctico y ofrecer a los asistentes una propuesta para llevarlos al aula.

Presentación del grupo

Este taller se realizará por diferentes miembros del grupo de trabajo didáctico sobre juegos (SET-Grup de jocs) que forma parte de la *Associació de Barcelona per a l'estudi i l'aprenentatge de les Matemàtiques* (ABEAM). Este grupo se constituye por la inquietud de varios profesores de llevar al aula juegos de mesa en los que es necesario utilizar pensamiento lógico-matemático para establecer una buena estrategia de juego.

El objetivo del grupo es analizar y adaptar juegos de mesa para poder utilizarlos como recurso de aprendizaje principalmente en el ámbito de las matemáticas.

El grupo está constituido por profesores de primaria, secundaria, bachillerato, universidad y estudiantes de màster y del grado de educación primaria.

Nos reunimos como mínimo una vez al mes para poder analizar los juegos que queremos llevar al aula. Además, realizamos la recomendación de un juego en el boletín mensual *ABEAM NEWS Families*. También hemos organizado, para los alumnos de segundo de ESO participantes en el concurso de resolución de problemas *Fem Matemàtiques,* una jornada de juegos y hemos incorporado un par de juegos en la prueba de grupos de la segunda fase del concurso.

La importancia del juego en el aula:

Desde el grupo SET creemos que este taller puede ser interesante ya que con él pretendemos mostrar cómo se pueden llevar al aula ciertos juegos de mesa que se pueden encontrar en la casa de cualquiera de nuestros alumnos y cómo ese mismo juego podemos adaptarlo y aprovechar la motivación y el entretenimiento que lleva el propio juego para trabajar contenidos del currículum de matemáticas, a cualquier nivel. En el taller nos centraremos en juegos para trabajar contenido de secundaria aunque estos se pueden jugar y trabajar.

ISBN 978-84-945722-3-4

El juego en el aula es muy importante y da muy buenos resultados. Primero de todo es un buen estimulo de aprendizaje, ya que los alumnos están más motivados por el simple hecho de manipular objetos y poder hablar con el compañero sobre eso que está haciendo.

Desde nuestro ámbito lo que queremos potenciar con la utilización de los juegos es el pensamiento lógico-matemático y tiene muchos puntos de contacto con la resolución de un problema de matemáticas. Este pensamiento se desarrolla:

En la comprensión del objetivo y de las normas y su aplicación. Para poder jugar a un juego es necesario que todos los jugadores lean las normas y las comenten para que estas se puedan aplicar correctamente durante el desarrollo del juego. La comprensión del objetivo y las reglas de un juego es similar a la comprensión del enunciado de un problema y es fundamental para su resolución.

En la generación de estrategias para ganar el juego. Esto ayuda a la hora de realizar la resolución de problemas ya que permite establecer pautas para priorizar información y escoger entre diferentes caminos de resolución analizando el más óptimo. En determinados juegos, principalmente aquellos en los que no interviene el azar, hay un claro paralelismo entre las estrategias que permiten hallar una manera para ganar y las heurísticas propias de la resolución de problemas.

En el análisis y la reflexión de las diferentes situaciones de juego. Cuando en el juego nos planteamos qué situaciones nos podemos encontrar según el desarrollo del juego es lo mismo que podemos hacer en el aula con las preguntas *¿y si...? ¿qué pasaría si...?* cambiando la situación inicial que se ha propuesto. Este tipo de preguntas son similares a las que se realizan en la fase de revisión de la resolución de un problema.

Por otra parte, con una práctica adecuada de los juegos se puede potenciar el uso y la aplicación de estrategias de colaboración y cooperación que tanto demandamos en nuestro alumnado.

ISBN 978-84-945722-3-4

Taller de juegos

Para realizar el taller nos dividiremos en cuatro grupos de 15 personas. Los grupos irán rotando cada 20 minutos por 4 stands diferentes en los que se encontrarán los siguientes juegos: Set, Ubongo-Katamino, Ricochet-Micro Robot y De Mudanzas. Los últimos 20 minutos, en dos grupos de 30 personas, se jugará al Speed Cups en un formato grande.

De todos los juegos que podríamos haber seleccionado hemos elegido juegos que trabajan la lógica y la geometría de manera directa aunque en su análisis podemos hacer que los alumnos se introduzcan en el ámbito de la probabilidad, la estadística o la combinatoria e incluso adaptarlos para trabajar funciones.

La elección de estos juegos se ha hecho atendiendo a diversos factores:

1º Son juegos muy atractivos para jugar en casa con lo que el alumno cuando se lleva al aula puede conocerlo y no se pierde tiempo en la explicación de las normas. Y al revés, son juegos que los alumnos, después de usarlos en el aula, pueden pedirlos para jugar en casa.

2º Son juegos que se pueden jugar un tiempo corto o acortar una partida para poder aprovechar la sesión de clase para jugar y trabajar los conceptos que queramos.

3º Son juegos que incluyen el trabajo de contenidos que suelen presentar problemas de comprensión a nuestros alumnos, tanto en el ámbito competencial, como la resolución de problemas o en el conceptual, como la geometría, o bien conceptos imprescindibles para ayudar a razonar, que están olvidados en el currículum de matemáticas, como son la lógica y diversas formas de razonamiento matemático.

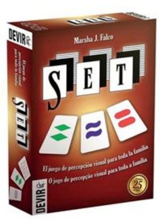
4º Finalmente, son juegos que permiten, una vez los conoces, poder trabajar con la pregunta: "¿Qué pasaría si....?" dando pie a crear situaciones nuevas que sacan al alumno de la situación de confort que ha conseguido al dominar la situación inicial. Esta característica vuelve a establecer una similitud entre los juegos y los problemas de matemáticas, a propósito de la generación de nuevos problemas (*problem posing*) que acompaña la fase final o de revisión de un problema.

A continuación se presenta una pequeña explicación de los cinco juegos del taller. En cada stand del taller se entregará a los participantes la ficha de cada juego con las instrucciones resumidas del juego, las competencias que trabaja, contenidos que desarrolla y una serie de

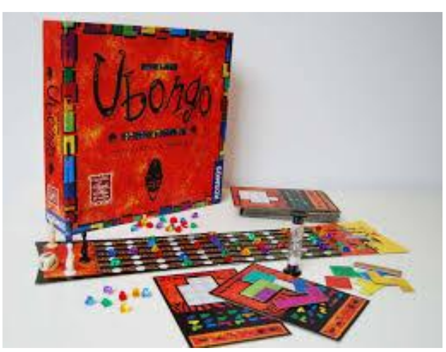
ISBN 978-84-945722-3-4

preguntas e indicaciones para aprovecharlo en el aula. Las fichas también se pueden encontrar en el siguiente enlace: **https://goo.gl/7sfCl4** o en este código QR

Set: es un juego de cartas de lógica y percepción visual que se puede jugar de forma individual o en grupo. La recomendación es ser como máximo 8 jugadores (mínimo 2). Se puede jugar a partir de 6 años y su duración es de unos quince minutos.



Ubongo-Katamino: son dos juegos de geometría en 2D y 3D respectivamente que se pueden adaptar muy bien para el aula en diferentes



ISBN 978-84-945722-3-4

niveles, dependiendo de la profundización a la que se quiera llegar. En concreto, Ubongo, es un juego de 2 a 4 jugadores, a partir de 7 años, cuyo objetivo es construir un puzle con 2 o 3 fichas que son poliminós (triminós, tetraminós y pentominos).

Ricochet-Micro Robot: son dos juegos de lógica espacial en los que hay que encontrar el camino más óptimo para llegar de la posición inicial hasta el objetivo. Es un juego muy adecuado para trabajar las diferentes estrategias para poder resolver un mismo problema.

De **Mudanzas:** es un juego tipo puzzle volumétrico y de construcción en el que debe colocarse un conjunto de prismas ortogonales en un espacio determinado por las cartas que tienen los jugadores.

Speed Cups: es un juego de visualización espacial y de destreza manual ideal para todos los niveles y para adaptaciones a gran tamaño.

ISBN 978-84-945722-3-4

A modo de conclusión.

Tal como hemos expuesto al inicio, entendemos que muchos de los juegos de mesa que se han creado y comercializado en los últimos años, entre ellos los presentados en este taller, constituyen un excelente recurso para generar actividades de un gran valor educativo que permiten desarrollar un trabajo de tipo competencial en matemáticas donde la creatividad y la toma de decisiones utilizando razonamientos matemáticos, son elementos clave que permiten mejorar la capacidad para resolver problemas de nuestros alumnos.

Referencias bibliográficas

Badillo, E., Edo, M., Deulofeu, J. (2012). L'adquisició de competències matemàtiques d'alumnes de primària en contextos de jocs de taula i resolució de problemes. *NouBiaix,* 30, 29-43.

Corbalán, F., Deulofeu, J. (1998). Juegos manipulativos en la Enseñanza de las Matemáticas. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 7, 71-80.

Deulofeu, J. (2016). Juegos de mesa para aprender matemáticas. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 74, 7-13.

Navarro, A., Deulofeu, J. (2016). Aprendiendo a resolver problemas en un contexto de juegos de estrategia. *SUMA* 82, 9-17.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-506

TÉCNICAS DE GESTIÓN DE AULA Y USO DE LAS NNTT PARA EL APRENDIZAJE DEL SXXI

Carolina Hassmann
carolinahassmann@gmail.es
Colegios Ramón y Cajal de Madrid. España
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas. España
Universidad Camilo José Cela. España

Núcleo temático: Recursos para la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas
Modalidad: T
Nivel educativo: Medio o Secundario. (Terciario o Bachillerato).
Palabras clave: cooperativo, flipped classroom, NNTT, digital

Resumen
Los asistentes elaborarán un vídeo con preguntas abiertas o autocorrectivas para elaborar un recurso para una clase invertida (flipped classroom). Aprenderán a diseñar un itinerario de aprendizaje para que el alumno pueda trabajar de forma autónoma. Se usarán algunas estructuras de Kagan para realizar una introducción al trabajo cooperativo. Se proporcionará una introducción a la gamificación en el aula lo que de tiempo.

Los asistentes aprenderán cómo pueden editar un video con Edpuzzle, seleccionar el fragmento deseado para añadirle preguntas abiertas o autocorrectivas o añadir comentarios. Se enseñará a los asistentes a ver y descargar los resultados para integrarlos en una hoja de Excel. Este recurso en muy útil tanto para evaluaciones iniciales sobre un tema, prácticas o repasos, así como recurso para elaborar una clase invertida (flipped classroom). Aprovechando la coyuntura se hará una rápida ojeada de unos 10 minutos de la taxonomía de Bloom revisada y del concepto de clase invertida. Como ejemplo de aplicación del recurso elaborado los participantes aprenderán a diseñar un itinerario de aprendizaje autónomo para alumno. Esto puede ser de espacial interés para profesores latinoamericanos de países en los que hay una gran utilización de recursos de formación a distancia. Durante el taller, algunas de las dinámicas se impartirán usando Estructuras de Kagan, que se comentarán al final para introducir las técnicas de trabajo cooperativo en aula, así como se proporcionarán algunas sugerencias de gestión de aula para su ejecución en el aula. (Ejemplo de estructuras: dame

ISBN 978-84-945722-3-4

una toma una, round robin, rally robin, cabezas pensantes…) Las estructuras se utilizarán según el desarrollo del taller las vaya definiendo, pero serán todas del conjunto de estructuras más versátiles y generales posible.
Si el tiempo lo permite a los asistentes se les enseñará como utilizar la herramienta Kahoot para gamificar los repasos en aula y promover el estudio competitivo y/o colaborativo, a elección del maestro. Este taller también es apto para los maestros de los cursos de primaria. En paralelo, si la mayoría de asistentes no pueden acceder a un aula con dispositivos móviles, se dará la opción de usar una aplicación alternativa que utiliza códigos QR imprimibles para el mismo resultado. En relación a este tema se podrá introducir el concepto de código QR dinámico o estático y sus posibles aplicaciones para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

Referencias bibliográficas

Dossier de Estructuras de Kagan. (Disponible en http://www.orientacionandujar.es/2014/07/23/aprendizaje-cooperativo-estructuras-de-spencer-kagan)

The Flipped Classroom (http://www.theflippedclassroom.es)

La taxonomía de Bloom (http://ebolo.es/welearning/innovaschool/modulos/flipped1/245_taxonoma_de_bloom_revisada.html)

Trabajo cooperativo. Estructuras y Técnicas básicas. Presentación de María Pérez. (https://www.slideshare.net/mariafotografa/aprendizaje-cooperativo-estructuras-y-tcnicas)

Tutoriales Edpuzzle (https://www.edpuzzle.com)

Tutoriales Kahoot (https://getkahoot.com/support/faq/)

Generador de códigos QR (http://www.codigos-qr.com)

Trabajo “Aplicación de nuevas técnicas y estrategias del Aprendizaje Cooperativo y Significativo en la Enseñanza de la Matemática: Dos alternativas que sustentan la capacitación y/o preparación del joven del siglo XXI en el Continuo Devenir Humano”. Autor: Lic. Díaz Ciriaco José. Maestría en Educación Matemática. Universidad de Carabobo. Venezuela.

(Disponible en http://www.ilustrados.com/tema/7399/Aplicacion-nuevas-tecnicas-estrategias-Aprendizaje-Cooperativo.html)

ISBN 978-84-945722-3-4

T-533

DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO DE LA PRÁCTICA MATEMÁTICA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

Eric Flores-Medrano – Dinazar Escudero-Avila – José A. Juárez
eflores@fcfm.buap.mx; eadinazar@hotmail.com; jajul@fcfm.buap.mx
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México

Núcleo temático: Formación del profesorado en matemáticas
Modalidad: T
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: argumentación, demostración, ejemplificación, definición

Resumen

El conocimiento que requiere un profesor de matemáticas para realizar su labor tiene distintas componentes. Una de estas, que ha sido explorada desde diferentes perspectivas teóricas, es la relativa al conocimiento de las formas de proceder y producir en matemáticas. En este taller se trabajarán actividades que permitan determinar cuál es la utilidad de este conocimiento, en qué formas se manifiesta en nuestra labor como docentes y cómo los estudiantes pueden desarrollar competencias de razonamiento matemático a partir de tareas centradas en las prácticas generadoras de conocimiento matemático. De manera particular, nos enfocaremos en el análisis de las prácticas argumentativas en el salón de clases, de la demostración, ejemplificación y definición.

Cuando nos referimos al conocimiento que un profesor de matemáticas usa en su labor, generalmente pensamos en un conocimiento disciplinar y en un conocimiento didáctico-disciplinar. Considerar estos dos grandes bloques de conocimiento tiene sus bases en el trabajo de Shulman (1986). Algunos autores los han retomado y han establecido bloques internos con la finalidad de realizar investigaciones con mayor precisión analítica (e.g. Ball, Thames y Phelps, 2008). Particularmente la propuesta denominada *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* se ha constituido como un modelo potente debido al sistema concreto de subdominios y categorías al interior de cada dominio de conocimientos (Flores-Medrano, Escudero-Avila, Montes, Aguilar y Carrillo, 2014).

De entre las diferentes naturalezas de conocimiento que se le atribuyen al profesor, una destaca del resto por su aparente falta de relación con los contenidos matemáticos y por su carácter transversal en la matemática misma. Se trata del Conocimiento de la Práctica Matemática (otros autores lo nombran Conocimiento sobre Matemáticas- *Knowledge About*

Mathematics). Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013) lo definen como el conocimiento de las formas de proceder y producir en matemáticas. Flores-Medrano (2015) destaca que demostrar, ejemplificar, definir y usar heurísticos son las prácticas matemáticas más comunes entre los docentes de matemáticas y que es posible estudiar el conocimiento que estos tienen sobre dichas prácticas una vez que se identifiquen características concretas que permitan analizarlas puntualmente.

En este documento se desarrolla la propuesta de un taller que toma en consideración diferentes prácticas matemáticas, así como elementos que propician el desarrollo del conocimiento sobre estas en docentes de matemáticas.

Elementos teóricos

Hablar de desarrollo profesional del profesor de matemáticas sin un marco de referencia que nos indique cuál es un estado ideal puede ocasionar que los cambios reportados sean poco aprovechados o sistematizados. Contar con un marco sólido de conocimiento profesional es un punto de partida que permite ser referente, pero también ser sistematizador en dicho desarrollo profesional. El modelo denominado *Mathematics Teachers ́Specialised Knowledge* (MTSK) ha sido desarrollado considerando el conocimiento que es específico del profesor de matemáticas. Se trata de un conocimiento nuclear dentro del cuerpo de conocimiento profesional (Flores-Medrano et al. 2014). Dicho modelo considera que el conocimiento especializado del profesor de matemáticas tiene dos naturalezas principales: la naturaleza matemática y la naturaleza didáctico-matemática. Para fines analíticos, cada una de estas componentes, a las cuales se les ha denominado dominios de conocimiento, están conformadas por tres subdominios diferenciales entre sí. Al interior de los subdominios se ha conformado un sistema de categorías que permite tener mayor localización en los estudios. La Tabla 1 muestra los dominios, subdominios y categorías del MTSK.

Particularmente, el Conocimiento de la Práctica Matemática considera las categorías: Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos, Formas de validación y demostración, Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal, Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas, Prácticas particulares del quehacer matemático, y Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones.

ISBN 978-84-945722-3-4

Subdominios		**Categorías asociadas al subdominio** *Conocimiento sobre:*	
Conocimiento matemático	**Conocimiento de los temas**	Procedimientos	*¿Cómo se hace?*
			¿Cuándo puede hacerse?
			¿Por qué se hace así?
			Características del resultado
		Definiciones, propiedades y sus fundamentos	
		Registros de representación	
		Fenomenología y aplicaciones	
	Conocimiento de la estructura de las matemáticas	Conexiones de complejización	
		Conexiones de simplificación	
		Conexiones transversales	
		Conexiones auxiliares	
	Conocimiento de la práctica matemática	*Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos*	
		Formas de validación y demostración	
		Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal	
		Procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas	
		Prácticas particulares del quehacer matemático (por ejemplo, modelación)	
		Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones	
Conocimiento Didáctico del Contenido	**Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas**	Teorías de aprendizaje	
		Fortalezas y dificultades	
		Formas de interacción con un contenido matemático	
		Intereses y expectativas	
	Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas	Teorías de enseñanza	
		Recursos materiales y virtuales	
		Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

	Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas	Expectativas de aprendizaje
		Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado
		Secuenciación con temas anteriores y posteriores

Tabla 1. Dominios, subdominios y categorías del MTSK

En este escrito desarrollaremos las bases teóricas que dan sustento al desarrollo del conocimiento de la práctica matemática por medio de algunas actividades concretas.

Método

Las actividades con las que se busca generar desarrollo profesional en el profesor de matemáticas deben de tener por lo menos dos aspectos claros: qué se va a desarrollar y cómo la actividad permite dicho desarrollo. A continuación describiremos una serie de actividades que serán usadas en el taller y se responderá a los dos aspectos antes mencionados. Las actividades están enfocadas en desarrollar aspectos relacionados con las prácticas argumentativas y usos de razonamientos en el aula de matemáticas, así como en la generación de definiciones, demostraciones y ejemplos.

<u>Actividad 1. Tipos de razonamiento y estructuras argumentativas: un camino hacia la demostración</u>

De acuerdo con Duval (1999), la demostración matemática es un estadio superior en el razonamiento matemático: requiere de justificaciones y argumentaciones coherentes y válidas. En Carrillo et al. (2016) se mencionan tres tipos básicos de razonamiento que son utilizados comúnmente en las aulas de matemáticas: el razonamiento abductivo, el inductivo y el deductivo.

El razonamiento abductivo es el que se pone en juego para generar conjeturas (Fernández, 2005). Salvo casos en los que la madurez cognitiva, lógica y conceptual permitan generar conjeturas plausibles, este tipo de razonamiento se caracteriza por las imprecisiones en los resultados matemáticos propuestos.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

El razonamiento inductivo se caracteriza por ser aquel con el que las personas llegan a una conclusión a partir de la observación de algunos casos particulares (Cañadas, 2007). En este tipo de razonamiento suelen generalizarse propiedades identificadas en un grupo de objetos. El razonamiento deductivo es aquel que suele generar mayor precisión en los resultados, toda vez que se trata de una serie de concatenaciones de razonamientos previamente comprobados como verdaderos (Fernández, 2005).

En el taller se mostrarán ejemplos de razonamientos hipotéticos en un aula de matemáticas, los cuales podrán categorizarse en estos tres tipos de razonamiento y cuya veracidad de las conclusiones no necesariamente dependerá del tipo de razonamiento sino de la elección de premisas y de las conexiones lógicas establecidas entre estas.

Finalmente, la relación entre la argumentación y la demostración cobra sentido cuando esta segunda acepta una variedad de formas. En Carrillo et al (2016) se destacan las demostraciones experimentales, las inductivas de un caso, las inductivas de varios casos, las inductivas completas y las deductivas. Para cada uno de estos tipos se trabajará, mediante un ejemplo, la relación con los tres tipos de argumentos.

Actividad 2: La definición y su papel en la demostración

Independientemente de la elección metodológica del profesor con respecto de sus clases, las definiciones son ampliamente utilizadas en la enseñanza de las matemáticas. Según Flores-Medrano (2015) el problema de que las definiciones sean, habitualmente, construidas a partir de propiedades, tiene como consecuencia que los profesores y estudiantes asuman como tales a un listado de propiedades sin analizar qué tipo de características debe cumplir estas para convertirse en una definición.

Escudero, Gavilán y Sánchez-Matamoros (2014) hacen una extensa revisión sobre lo que distintos autores consideran como caracterizaciones de la definición matemática. Las características encontradas con mayor consenso en las investigaciones consultadas fueron la precisión en la terminología (uso de términos básicos o previamente definidos); no circularidad (no hacer referencia al concepto en la propia definición); no ambigua (caracterización de manera unívoca de una clase de objetos); no contradictoria o estructuralmente inequívoca (las características empleadas deben ser consistentes); invariante bajo cambio de representación (un objeto pertenece a una clase de objetos, y es definible ahí, independientemente de su representación); equivalencia (se puede dar más de

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

una formulación de un mismo concepto); elegancia (de entre las definiciones equivalentes, la más elegante es aquella que usa conceptos generales más básicos); minimalidad (no redundancia de las características, ninguna de las características es deducible del resto), y degeneración (ejemplos del concepto que no se ajustan a la idea intuitiva del concepto). Estos atributos encierran, además de una caracterización de la definición matemática, algunos aspectos de su uso como práctica y de las implicaciones en sus posibles variedades.

Con base en estas características de la definición, en el taller se trabajarán ejemplos que contemplan nuevamente los tipos de demostración recogidos en Carrillo et al (2016) y se analizará el papel que tiene la definición en los procesos de demostración, así como los elementos predominantes de la definición dependiendo de cada tipo de demostración.

Actividad 3: Ejemplos y contra ejemplos como prácticas en el proceso de demostrar

Los ejemplos ayudan en la conformación de la imagen que se tiene de un concepto (Vinner, 1983). Los profesores utilizan los ejemplos en múltiples situaciones escolares y con objetivos muy distintos. Conocer usos didácticos de los ejemplos y conocer ejemplos concretos para situaciones matemáticas concretas son dos facetas de conocimiento que comúnmente podemos observar en los profesores. La primera se relaciona con el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas y la segunda con el conocimiento del tema. Además existe una tercera faceta correspondiente a las características matemáticas del ejemplo de forma abstracta. Esta característica está íntimamente relacionada con el papel que tiene el ejemplo (y el contraejemplo) en los procesos de demostración y conceptualización de los contenidos matemáticos (Ayalon, Watson y Lerman, 2017). Esta actividad, que servirá como cierre, pretende destacar dos aspectos: el ejemplo no demuestra (aunque existen mecanismos muy interesantes que pueden llevar hacia la demostración como lo son los procesos inductivos de varios casos o la creación de ejemplos genéricos) y el contraejemplo sí refuta (veremos la lógica matemática detrás de este hecho).

Conclusiones

Este trabajo, que se presentará en formato de taller, aporta una serie de consideraciones teóricas que permiten hablar, por un lado, de un posible desarrollo profesional entre los profesores participantes (el desarrollo de conocimiento que propician las actividades) y, por otro lado, de elementos que conforman el conocimiento de la práctica matemática en

ISBN 978-84-945722-3-4

profesores de la disciplina. En ambos casos se plantean aspectos concretos desde una perspectiva teórica y un esbozo de actividades que serán utilizadas durante el taller. Dar conclusiones acerca de los efectos que tienen dichas actividades en el desarrollo profesional de los profesores requerirá de la puesta en marcha durante el congreso.

La práctica matemática que se coloca al centro del diseño del taller es la demostración, concordando con Duval (1999) en cuanto a la importancia que tiene la demostración en el desarrollo de la matemática misma. En términos de Godino y Recio (2001), utilizamos una noción escolar de la demostración que se nutre de otros campos institucionales, pero que mantiene su esencia escolar, cuidando en todo momento de escapar de la visión platónica que los mismos autores detectan que tiene en los cursos tradicionales en los que es utilizada.

La definición y la ejemplificación se tornan en procesos clave para la demostración, pero también se presentarán con características que las hacen prácticas independientes con respecto a la demostración. Una caracterización completa es mostrada en el cuerpo de este documento.

Finalmente, con respecto al desarrollo profesional hay que aclarar que en este taller se pretende incidir en una de sus facetas, la referente a los procesos cognitivos del profesor y a su aplicación en contextos de aula. Sin embargo, reconocemos que esta no es la única faceta y que los procesos reflexivos profundos y continuos juegan un papel fundamental en un desarrollo profesional integral. Nuestros estudios venideros abordarán estos aspectos y el diseño de este taller ha sido el punto de partida para la generación de nuevos materiales.

Referencias bibliográficas

Ayalon, M., Watson, A., & Lerman, S. (2017). Students' conceptualisations of function revealed through definitions and examples, *Research in Mathematics Education*, http://dx.doi.org/10.1080/14794802.2016.1249397

Ball, D. L., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Cañadas, M.C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. Tesis doctoral. Granada, España: Universidad de Granada.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., Montes, M., Escudero, D., & Flores, E. (Eds.) (2016). *Didáctica de las matemáticas para maestros de primaria*. Madrid, España: Paraninfo.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México, D. F.: Grupo Editorial Iberoamericana.

Escudero, I.M., Gavilán, J.M. y Sánchez-Matamoros, G. (2014). Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(1), 7-32.

Fernández, A.N. (2005). Modelos de razonamiento abductivo. *Contrastes*, *10*, 155-180.

Flores-Medrano, E. (2015). *Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)*. Tesis doctoral. Huelva, España: Universidad de Huelva.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, A. y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano y M.A. Montes (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp. 57-72). Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Godino, J.D. y Recio, A.M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la Educación Matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, *19*(3), 405-414.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *American Educational Researcher Association*, *15*(2), 4-14.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*, 293–305.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-538

DICTADO EN EL LENGUAJE MATEMÁTICO

Sueli Cunha – Jaime Velasco – Diogo Rangel
sueli.cunha@ime.uerj.br – jaimevelasco@ime.uerj.br – diogorangel.m@hotmail.com
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – Brasil

Núcleo temático: VII – Investigación en Educación Matemática
Modalidad: T - Taller
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: Lenguaje Matemático, Educación Matemática, Alfabetización en Matemáticas

Resumo
Muchas de las dificultades en el aprendizaje del Lenguaje Matemático se deben a la incomprensión de lo que se dice. No se conoce, en general, la sintaxis de este lenguaje y, a veces, no se relacionan notaciones "muy parecidas" que, en realidad no son solamente "parecidas", pero están relacionadas por una semántica. El estudio de la Gramática del Lenguaje Matemático busca justamente la comprensión de la sintaxis y de la semántica de este lenguaje. La meta de este taller es presentar, a los profesores, actividades que pueden facilitar la enseñanza y el aprendizaje del Lenguaje Matemático. Esto empieza con la descripción de su alfabeto de base; luego, se presentan las reglas básicas de la sintaxis, así como algunas clases gramaticales o la forma de construir nuevas "palabras" de este lenguaje. Después, se hace una actividad de traducción de la lengua natural al Lenguaje Matemático y viceversa; finalmente, se hace un dictado en Lenguaje Matemático (es decir, se habla en español y se escribe en Lenguaje Matemático). Lo que se espera con esta actividad es verificar que, como dice Danyluck (citada en Souza, 2010): "Ser alfabetizado en matemáticas, entonces, es entender lo que lee y escribir lo que entiende…" (p. 2).

Introducción

La comprensión del Lenguaje Matemático es el objeto de estudio de muchos autores. Por ser un lenguaje sin oralidad, para leer una expresión matemática se debe traducirla a otro lenguaje, natural (español, por ejemplo; portugués, francés, etcétera.). Por lo tanto, se debe primero comprender lo que es dicho en Lenguaje Matemático y después decirlo en un lenguaje natural (Silveira, 2014; Cunha, 2017a; Viali & Silva, 2007). Bélanger y De Serres (1998) constataron que "muchos de los errores que los estudiantes hacen en las matemáticas son de naturaleza lingüística"; y completa: "un lenguaje se torna inteligible sólo en la medida que conocemos sus códigos, sus convenciones, una grande parte de su vocabulario y la manera cómo sus elementos se estructuran" (p. 45). Es interesante observar que así como las

ISBN 978-84-945722-3-4

lenguas naturales, el Lenguaje Matemático posee sus dialectos (por ejemplo, *algebrés*, *logiqués*, *geometriqués* - relativo al álgebra, lógica y geometría, respectivamente).

El objetivo de este taller es primeramente presentar la gramática del Lenguaje Matemático y observar cómo se torna más simple la lectura de una expresión matemática (traducción del Lenguaje Matemático a un lenguaje natural) y, consecuentemente, la comprensión de su sentido; por otro lado, cómo se traduce en Lenguaje Matemático una expresión escrita en un lenguaje natural. En seguida, por medio de un *dictado* (es decir, escribir directamente en Lenguaje Matemático una expresión matemática dicha en un lenguaje natural) se podrá verificar la capacidad de escribir en este lenguaje. Al final, será hecha una evaluación del taller, donde los participantes podrán, no sólo decir lo que piensan del taller, como también comentar los errores que sus alumnos cometen en la escuela para que todos podamos identificar la fuente de los dichos errores, desde el punto de vista de la gramática del Lenguaje Matemático. A seguir, son descritos ejemplos de actividades que serán realizadas en el taller en tres dialectos: *algebrés, geometriqués* y *logiqués*.

Desarrollo del taller

Las actividades del taller se desarrollarán en la siguiente secuencia:

1) *Introducción a la gramática del Lenguaje Matemático* (Parte I): en esta parte son presentados los conceptos básicos: el alfabeto, vocabulario (símbolos y sus significados), clases de palabras, operaciones y operadores. Serán presentadas las particularidades de cada uno de los tres dialectos (Cunha, 2017b);
2) *Ejemplos de traducción del español en el Lenguaje Matemático* (Parte II);
3) *Actividad I*: práctica de la traducción ejemplificada en la etapa anterior;
4) *Ejemplos de traducción del Lenguaje Matemático en el español* (Parte III);
5) *Actividad II*: práctica de la traducción ejemplificada en la etapa anterior;
6) *Actividad III*: <u>dictado en el Lenguaje Matemático</u> – en esta etapa serán dictadas sentencias matemáticas en los tres dialectos estudiados, separadamente o en conjunto;
7) *Actividad IV*: evaluación de las actividades precedentes – en esta parte, se espera que los participantes den sus impresiones de las actividades realizadas anteriormente o que pregunten como sería escrita o leída una expresión matemática o un concepto.

Parte I – Conceptos básicos

Siguen algunos conceptos básicos que serán presentados:

1) Alfabeto: compuesto por letras latinas o griegas, símbolos (operadores, diacríticos, etcétera); por ejemplo:
   a) símbolos en *algebrés*: operadores aritméticos ($+,\ -,\ \times,\ \div$);
   b) símbolos en *geometriqués*: diacrítico que indica ángulo ($\angle ABC$), símbolo que indica perpendicularidad entre rectas ($r \perp s$);
   c) símbolos en *logiqués*: operadores lógicos ($\sim,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow$);
2) Palabra: concatenación de letras del alfabeto que tiene algún sentido;
3) Término: concatenación de letras del alfabeto que tiene algún sentido solamente cuando hay un complemento (diacrítico);
4) Categorías (clases) gramaticales: grupos de palabras formados en función de sus significados; las clases gramaticales pueden ser divididas en subclases gramaticales (constantes: enteras, reales);
5) Formación de palabras: una nueva palabra puede ser formada mediante la adición de un afijo (prefijo, sufijo u otros) (Cunha & Velasco, 2017);
6) Identificadores (nombres): es lo que identifica (o representa) un objeto. Los identificadores siguen algunas reglas; por ejemplo:
   a) en *algebrés*, las variables son identificadas por las letras x, y, z (si son variable reales);
   b) en *geometriqués*, los puntos son representados por letras mayúsculas latinas ($A, B, C, \cdots$), mientras que las rectas son representadas por letras minúsculas (usualmente, r, s y t);
   c) en *logiqués*, las proposiciones son representadas por letras minúsculas latinas, a partir de la p (p, q, r), si son proposiciones simples, mientras que la proposiciones compuestas son representadas por letras mayúsculas latinas P, Q, R;
7) Puntuación: los signos de puntuación permiten ver la diferencia entre enunciados. Por ejemplo, en *logiqués* $p \wedge (q \vee r)$ es distinto de $(p \wedge q) \vee r$, visto que la primera representa una secuencia (o simultaneidad), mientras que la segunda representa una alternativa;

ISBN 978-84-945722-3-4

Parte II – Traducción del español en el Lenguaje Matemático
Siguen algunos ejemplos de este tipo de traducción, en los tres dialectos:

1) En *algebrés*:
   a) Juan tiene 3 años más que Maria: $J = M + 3$;
   b) Anna compró $2kg$ de zanahoria por $1{,}70€/kg$ y 3kg de tomate bola a $0{,}78€/kg$. Represente la cantidad total gasta por Anna: $t = 2 \times 1{,}70 + 3 \times 0{,}78$;
   c) El cuadrado de la suma de dos términos: $(x + y)^2$;
   d) La suma de los cuadrados de dos términos: $x^2 + y^2$.
2) En *geometriqués*:
   a) Dados dos puntos distintos cualesquiera en un plano, existe una única recta que los contiene: $\forall A, B \in \alpha, \exists!\, r \mid A, B \in r$.
   b) Existe un punto en un segmento que lo divide en dos segmentos congruentes: $\exists M \in AB \mid AM \equiv MB$.
   c) En *logiqués*: Considerando dos sentencias (o proposiciones) simples: "*123 es un número impar" y "123 posee cuatro guarismos*". La primera puede ser representada por p y la segunda por q. Así,
      i) "123 posee cuatro guarismos pero no es un número impar" es traducida por $q \wedge \sim p$;
      ii) "123 es un número impar de cuatro guarismos" es traducida por $p \wedge q$.

Parte III – Traducción del Lenguaje Matemático en el español
Siguen algunos ejemplos de este tipo de traducción, en los tres dialectos:

1) En *algebrés*:
   a) $\sum_{k=1}^{5} 2i$ es traducida por "la suma de los cinco primeros números pares";
   b) $2x + 3y = 16$ es traducida por "la suma del doble de *equis* con el triple de *i griega* es igual a dieciséis".
2) En *geometriqués*:
   a) $A, B \in r, A \neq B,\ A, B \in \alpha \Rightarrow r \subseteq \alpha$ es traducida por "si dos puntos distintos de una recta están en un plano, entonces esta recta está en este plano";

ISBN 978-84-945722-3-4

b) $AB /\!/ CD$, $AD /\!/ BC \Rightarrow AB \equiv CD, AD \equiv BC$, es traducida por “los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes”.

3) En *logiqués*: Considerando dos sentencias (o proposiciones) simples: “*Juan se cayó de la silla*” y “*Juan se hirió*”. La primera puede ser representada por p y la segunda por q. Así,

a) $p \wedge \sim q$ es traducida por “Juan se cayó de la silla, pero él no se hirió”;

b) $q \rightarrow p$ es traducida por “si Juan se hirió, entonces él se cayó de la silla”.

Reflexiones Finales

El estudio de la gramática del Lenguaje Matemático, tema principal de trabajo de nuestro grupo de estudio (*Mate$_{Gra}$mática*), puede confirmar lo que dice Silveira (2014): “El Lenguaje Matemático considerado como un lenguaje universal debe ser comprendido en todas las otras lenguas” (p.51); es decir, cualquiera que conozca su gramática puede comprenderla. Además, la autora añade que se debe enseñar y aprender el Lenguaje Matemático como una lengua extranjera.

Hemos hecho una actividad semejante en portugués; comparando el resultado de estas dos actividades (en portugués y en español) podremos identificar los errores “comunes” a los dos y los errores particulares de cada idioma “extranjero” al Lenguaje Matemático.

Referencias bibliográficas

Bélanger, M. & De Serres, M. (1998). Les erreurs langagières en mathématiques. *Correspondance, 3*(4). http://correspo.ccdmd.qc.ca/Corr3-4/Math.html. Consultado 20/04/2017.

Cunha, S. (2017a). Considerações sobre a Aprendizagem Contínua do *Matematiquês* – a Linguagem Matemática. En M. G. B. Maia & G. F. Brião (Orgs), Alfabetização Matemática: perspectivas atuais, Capítulo 3, pp. 25-60. Curitiba, Brasil: Editora CRV.

Cunha, S. (2017b). La gramática del Lenguaje Matemático. In: VIII CIBEM – VIII Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática. Madrid, España. 10 a 14 de julho (2017).

Cunha, S. & Velasco, J. (2017). Los afijos en el Lenguaje Matemático. In: II CEMACYC – II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe. Cali, Colombia. 29 octubre al 1 noviembre. A presentar.

ISBN 978-84-945722-3-4

Silveira, M. R. A. (2014). Tradução de textos matemáticos para a linguagem natural em situações de ensino e aprendizagem. Educ. Matem. Pesq., 16(1), 47-73. http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/download/15338/pdf. Consultado 18/04/2017.

Souza, K.N.V. (2010) Alfabetização Matemática: Considerações sobre a Teoria e a Prática. Revista de Iniciação Científica da FFC, 10(1). http://www.bjis.unesp.br/revistas/index.php/ric/article/download/273/259. Consultado 18/04/2017.

Viali, L. & Silva, M.M. A Linguagem Matemática como Dificuldade para alunos do Ensino Médio. In: IX ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática. Belo Horizonte (MG), Brasil. 18 a 21 de julho (2007). http://www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Comunicacao_Cientifica/Trabalhos/CC45872422091T.doc. Consultado 03/01/2017.

ISBN 978-84-945722-3-4

ANEXO TALLER 554

PROBLEMA 1 - "Un anciano dejó al morir 65 monedas de oro que debían repartirse entre sus cinco hijos de modo que cada uno recibiese 3 monedas menos que el hermano que le antecede. Haz el reparto."

I) COMPRENDER

a) Datos: 65 monedas y 5 hijos

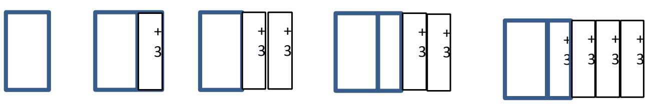
b) Objetivo: cuánto dejó a cada uno

c) Relación: A cada hermano 3 monedas menos que el que le antecede

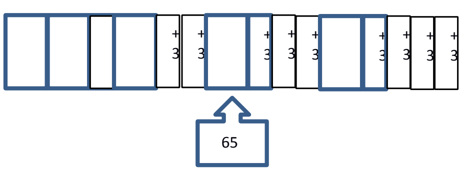
II) PENSAR

Estrategia: Organización de la Información

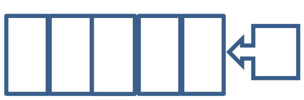
Diagrama: Partes-todo



III) EJECUTAR



Quito lo que conozco 65- (3+3+3+3+3+3+3+3+3+3)= 65-30=35



35:5= 7

IV) RESPONDER

El hermano pequeño recibe 7 monedas de oro

El cuarto hermano recibe 10 monedas de oro

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

El tercer hermano recibe 13 monedas de oro

El segundo hermano recibe 16 monedas de oro

El primer hermano recibe 19 monedas de oro

Comprobación:

7+10+13+16+19=65 monedas. Solución única con las condiciones dadas.

PROBLEMA 2 - UNA EXCURSIÓN A LA PLAYA

Andrés decide hacer una excursión al mar, a una playa que se encuentra a 120 km de su casa. En el camino se para a recoger a sus amigos Bruno y Carlos que lo acompañarán en el viaje: primero se detiene para recoger a Bruno, y después recorre todavía 10 km y se detiene a recoger a Carlos. En este punto el camino que todavía tiene que hacer para llegar al mar supera en 2 km el triple de la distancia ya recorrida.

¿Cuál es la distancia que separa la casa de Bruno del borde del mar?

Explicad vuestra respuesta.

I) COMPRENDER

Datos:

Una excursión a una playa que se encuentra a 120 km.

Dos amigos lo acompañarán: primero recoge a Bruno, y después recorre todavía 10 km para recoger a Carlos.

Objetivo:

Cuál es la distancia que separa la casa de Bruno del borde del mar.

Relación:

Cuando recoge a Carlos, el camino que todavía tiene que hacer para llegar al mar supera en 2 km el triple de la distancia ya recorrida.

Diagrama:

Diagrama lineal.

II) PENSAR

Estrategias:

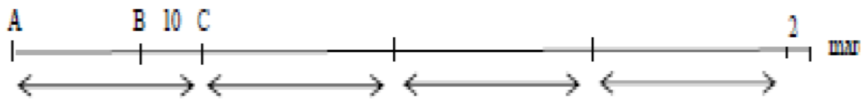
ORGANIZAR LA INFORMACIÓN

III) EJECUTAR

Comprender, mediante una representación gráfica, que la distancia de la casa de Andrés hasta el mar (120 km) equivale a la distancia entre la casa de Andrés y la casa de Carlos

ISBN 978-84-945722-3-4

más el triple de tal distancia y todavía 2 km más.



Darse cuenta de que (en km) 118 (120 – 2) es cuatro veces la distancia entre la casa de Andrés y la casa de Carlos y que ésta es por tanto de 118 : 4 = 29,5 (en km).

Se puede encontrar entonces la distancia entre la casa de Andrés y la de Bruno, con la resta de 10 km: 29,5 – 10 = 19,5 (en km). Deducir por tanto que, por complemento a 120, la distancia buscada entre la casa de Bruno y el mar es 120 – 19,5 = 100,5 (en Km).

Otra manera de proceder es multiplicar por 3 la distancia entre las casas de Andrés y Carlos y añadir 10 y 2: 29,5 × 3 + 10 + 2 = 100,5 Km.

También se puede multiplicar por 3 la distancia entre la casa de Andrés y la de Bruno, multiplicar por 4 la distancia entre la casa de Bruno y la de Carlos, y después hacer la suma sin olvidar los últimos 2 kilómetros: 19,5 × 3 + 10 × 4 + 2 = 100,5 Km.

Finalmente podemos utilizar el álgebra, indicando con x la distancia entre la casa de Andrés y la casa de Bruno, con x +10 la distancia entre la casa de Andrés y la casa de Carlos para obtener así la ecuación 120 = 4 (x + 10) + 2, cuya solución es 19,5 que será necesario restar de 120.

120 = 4 x + 40 +2 4x = 120 – 42 4x = 78 x = 78 / 4 x = 19,5

120 – 19,5 = 100,5 km.

Solución: 100,5 Km

IV) RESPONDER

Comprobación:

19,5 + 10 = 29,5 29,5 x 4 + 2 = 118 + 2 = 120 km

Análisis: La solución es única.

Respuesta: La distancia que separa la casa de Bruno del borde del mar es de 100,5 Km.

ISBN 978-84-945722-3-4

PROBLEMA 3 - EL TANQUE

Carlos quiere llenar el tanque de su jardín con 49 litros de agua. Para llevar el agua tiene tres cubos, uno de 3 litros, otro de 4 litros y el último de 5 litros. Carlos quiere hacer el menor número de viajes posible, llevando un solo cubo a la vez, lleno hasta el borde. Sin embargo, desea utilizar cada cubo al menos una vez.

¿Cuántos viajes tendrá que Carlos, como mínimo, para llenar el tanque?

Explica cómo encontraste tu respuesta y di cuántas veces podría haber utilizado cada tipo de cubo para llenar el tanque.

COMPRENDER

Datos 49, 5, 4, 3

Relación: mínimo, un cubo caca vez, usar todos los cubos

Objetivo: el número de viajes

PENSAR

Estrategia: Organización de la Información

EJECUTAR

Simplifico lo primero la información que tengo que poner, pues al menos debe llevar una vez cada cubo. Llevando una vez 5+4+3 = 12, quedan 37 litros por transportar

Como se trata de dar el mínimo número de viajes, tendré que utilizar el mayor de los cubos: 5x6 son 30 litros, y le añado 4 y 3 para los 7 litros restantes.

He obtenido la siguiente solución: 5 - 5 - 5 – 5 - 5 - 5 - 5 - 4 – 4 - 3 - 3

ISBN 978-84-945722-3-4

RESPONDER

Carlos tiene que dar 11 viajes y lleva 7 veces el cubo de 5, dos veces el de 4 y dos veces el de 3.

Pero también tenemos que darnos cuenta de que hay más soluciones, pues podemos cambiar un cubo de 5 y uno de 3 por dos de 4. El número de viajes no varía, pero sí los cubos que se emplean.

He obtenido también la siguiente solución: 5 - 5 - 5 – 5 - 5 - 5 - 4 - 4 – 4 - 4 - 3

Título: La resolución de problemas en educación primaria

Autores: María Nila Pérez Francisco y Francisco Morales Villegas
Dirección electrónica: nilacapicua@yahoo.es elarqueropaco@gmail.com
Institución/país: Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas Isaac Newton, España

Modalidad: Taller
Nivel educativo: Educación Primaria
Palabras clave: problemas, heurísticos, Newton,

Resumen

Queremos proponer un método para la resolución de problemas, de probada valía, que integra las conocidas ideas de Polya, Schoenfeld y las de Miguel de Guzmán y les incorpora otros aspectos que las hacen más eficaces. Nuestra propuesta se enmarca dentro del Proyecto Newton Canarias que lleva varios años trabajando, con mucho éxito, la resolución de problemas en centros escolares, especialmente a partir de recogerse en el currículo LOMCE Canarias la resolución de problemas como un contenido con entidad propia.

En el taller se ofrecerán materiales y ejemplos en los que se mostrará cómo abordar las fases, los diferentes diagramas y las estrategias (básicas: ensayo-error, modelización y organización de la información; auxiliares: simplificar y analogía y específicas: eliminar, ir hacia atrás, buscar patrones y generalizar) que proponemos para alumnado de primaria.

Nuestra propuesta es de aplicación directa en los centros educativos, en cualquier contexto que estos se encuentren, y propicia el desarrollo de la competencia matemática en primaria. Por otra parte, supone para los docentes una vía de formación y de trabajo en equipo.

En los últimos cursos escolares, la Consejería de Educación del Gobierno de Canarias en colaboración con el Consejo Escolar de Canarias y la Sociedad Isaac Newton, han llevado a cabo un proyecto de resolución de problemas con la finalidad de mejorar los resultados en el área de matemáticas.

La propuesta de trabajo se basa en las propuestas realizadas por Polya, Schoenfeld y Miguel de Guzmán, incorporando además el trabajo de distintos tipos de diagramas.

Esta propuesta se organiza en torno a 4 fases de trabajo: comprender, pensar, ejecutar y responder. En cada una de ellas, se llevan a cabo diversos pasos intermedios. Las cuatro fases forman un ciclo que se cierra si logro el objetivo, y se reinicia si no lo consigo.

Enlace del Proyecto Newton, matemáticas para la vida:

http://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/edublogs/proyectonewton/category/principal/

Enlace de la Sociedad Canaria Isaac Newton

http://www.sinewton.org/web/

¿Qué aporta el método?

Al profesorado le da una opción de trabajo con el alumnado en la difícil cuestión de enseñar a resolver problemas; más allá del "léelo de nuevo", "piensa", "concéntrate"…

Al alumnado le aporta:

a) El conocimiento de una estrategia general para abordar la resolución de cualquier problema.

b) Utilización de un pensamiento lógico no asociado estrictamente a las operaciones aritméticas.

c) El aprendizaje de unos elementos lógicos de distribución espacial que, en forma gráfica, le ayuden a disponer los datos del problema.

d) El conocimiento de algunos, muy pocos y sencillos, métodos heurísticos específicos que le permitan vislumbrar un camino en la búsqueda de la solución.

e) La sistematicidad de su pensamiento que le haga seguir una línea de trabajo sin cansarse, hasta que consiga una solución o vea que el camino emprendido no le lleva a ningún sitio.

f) El gusto de la exploración matemática, encontrando placer hasta cuando se equivoca, y la ilusión de emprender un nuevo camino distinto al anterior si aprecia que éste no es el correcto.

ISBN 978-84-945722-3-4

g) Apertura de pensamiento para llegar a entender que un problema puede tener una, muchas o ninguna solución, sin que por ello sea más o menos valioso.

EXPLICACIÓN DE LAS FASES

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Proyecto
Newton
"Matemáticas para la vida"
Una vía para el aprendizaje
significativo de las matemáticas

- **COMPRENDER:**

En esta fase el alumnado debe determinar tres aspectos.

a.- Búsqueda, enumeración, análisis y clasificación de datos.

b.- Determinación del objetivo

c.- Relación entre datos y objetivo.

Es conveniente realizarlo en gran grupo, sin escatimar tiempo, para que todo el alumnado comprenda el problema.

Este aspecto es fundamental pues permitirá al alumnado después establecer un diagrama y elegir una estrategia adecuada.

Ejemplo: GATO, CONEJO, COBAYA

Tres amigas, que viven en tres pueblos vecinos, se encuentran. Cada una tiene consigo su propio animal de compañía

- El gato de Milena es atigrado y le encanta cazar ratones.
- Luisa y la chica que posee un conejo blanco y negro llevan gafas.
- La que vive en El Sauzal tiene una cobaya.
- Claudia y su amiga que vive en El Rosario adoran los caramelos.

¿Cuál es el nombre de la chica que vive en Tacoronte? ¿Qué animal tiene?

Datos: Tres amigas: Claudia, Luisa y Milena. Tres mascotas: gato, conejo, cobaya.Tres lugares: El Rosario, Tacoronte, El Sauzal

Objetivo: Averiguar el nombre de la chica que vive en Tacoronte y qué animal tiene

Relación: Las cuatro informaciones

ISBN 978-84-945722-3-4

- **PENSAR**:

Analizar la información del paso anterior y seleccionar una estrategia. Diseñar un diagrama.

Selección de la estrategia

Estrategias básicas:
- Ensayo-error
- Modelización
- Organización de la información

Imprescindibles en primaria

Estrategias auxiliares:
- Analogía
- Simplificación

Estrategias específicas:
- Buscar patrones
- Ir hacia atrás
- Generalización

<u>Estrategias básicas</u>

Ensayo-error: Consiste en hacer pruebas. Establecer hipótesis y probar. Es adecuada cuando hay mucho que averiguar. Requiere una tabla simple donde las columnas definen los datos objetivos y las relaciones del problema y las filas cada ensayo.

Modelización: Convertir la información que ofrece el problema en una estructura matemática. Necesitamos crear un modelo que nos permita reproducir las condiciones del problema para obtener una solución.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Organización de la información: Consiste en reunir la información del problema, darle estructura matemática transformando en un diagrama adaptado al problema. A partir de éste ir buscando la información en el orden que el diagrama plantea.

Estrategias Auxiliares

Analogía: Utilizar el proceso seguido en la resolución de otra situación que presenta similitudes con la que se está resolviendo.

Simplificar: Si la numeración de los datos es muy alta, resolverlo con números más sencillos y utilizar el modelo empleado para resolver el problema original. Si el problema es complejo, y lo permite, separarlo en subproblemas. Resolver el problema en casos independientes.

Estrategias Específicas

Buscar patrones: requiere localizar una propiedad que cumplen ciertos números o figuras y ver si la cumplen todos los números o figuras del mismo tipo.

Eliminación: Eliminar soluciones posibles de una lista dada. Elaborar una lista de alternativas y eliminar a partir de la observación.

Ir hacia atrás: Es una estrategia adecuada cuando sabemos el resultado final y nos piden la situación inicial. Es adecuado un diagrama lineal encadenado.

Aconsejamos acompañar al alumnado en las distintas propuestas de diagramas que se puedan hacer. En este inicio, el profesor puede proponer su diagrama en igualdad de condiciones, sobre todo cuando ellos no sean capaces de proponer alternativas.

Diagrama: Tabla de doble entrada

	Gato	Conejo	Cobaya	El Rosario	El Sauzal	Tacoronte
Claudia						
Luisa						

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Milena						

Estrategia: Organizar la Información y Eliminar.

Analizar las cuatro informaciones, una después de otra, y anotar las deducciones sucesivvas con un SÍ o un NO (eliminar) en la tabla de doble entrada.

- **EJECUTAR**:

Llevar a cabo la estrategia. 1ª información: Milena tiene un gato, entonces, las otras no lo tienen.

	Gato	Conejo	Cobaya	El Rosario	El Sauzal	Tacoronte
Claudia	No					
Luisa	No					
Milena	Sí	No	No			

Vemos la 2ª información: Luisa no tiene un conejo, luego tiene una cobaya y por tanto, Claudia un conejo. Un SÍ en la casilla Luisa-cobaya. Un SÍ en la casilla Claudia-conejo. Un NO en las restantes.

	Gato	Conejo	Cobaya	El Rosario	El Sauzal	Tacoronte
Claudia	No	Sí	No			
Luisa	No	No	Sí			
Milena	Sí	No	No			

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Siguiente información: La que vive en El Sauzal tiene cobaya. Un SÍ en la casilla Luisa-Sauzal y un NO en las otras cuatro.

	Gato	Conejo	Cobaya	El Rosario	El Sauzal	Tacoronte
Claudia	No	Sí	No		No	
Luisa	No	No	Sí	No	Sí	No
Milena	Sí	No	No		No	

Siguiente información: Claudia no vive en El Rosario, luego es Milena. Un SÍ en la casilla Milena-Rosario y un NO en las otras.

	Gato	Conejo	Cobaya	El Rosario	El Sauzal	Tacoronte
Claudia	No	Sí	No	No	No	
Luisa	No	No	Sí	No	Sí	No
Milena	Sí	No	No	Sí	No	No

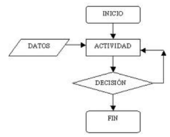
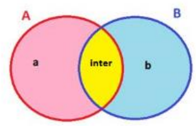
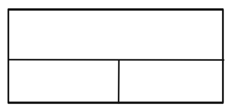
Solo queda que Claudia puede vivir en Tacoronte.

- **RESPONDER:**

En primer lugar, verificar la corrección de la solución y su coherencia. A continuación, comprobar si es de solución única o hay varias soluciones. Por último, dar una respuesta en una oración completa, no solo numérica (exige volver a leer el objetivo)

Respuesta: Claudia vive en Tacoronte y tiene un conejo. No hay otra solución posible.

TIPOS DE DIAGRAMAS

<u>Diagramas de flujo</u>. Representación visual de la secuencia de pasos y decisiones que se necesitan dar para realizar un proceso.	
<u>Diagrama de Venn</u>. Muestran la agrupación de colecciones de objetos y permiten conocer si hay elementos comunes.	
<u>Diagrama partes-todo</u>. Es propio de la estructura aditiva. Se da una relación de inclusión de las partes en el total.	
<u>Diagramas de orden</u>: indican pasos o una secuencia en el orden en que sucede.	
<u>Tabla simple.</u>	
<u>Tabla de doble entrada</u>	

ISBN 978-84-945722-3-4

T-573

TITULO DEL TRABAJO EXTENSO

Gustavo reyes Sandoval – Irma del Carmen López Bonilla
Reyessgus68@gmail.com – mitas6@hotmail.com

Escuela Normal Superior del Estado de Puebla, México

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
Modalidad: T
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: Formación de profesores, Innovaciones tecnológicas, perfil del profesor.

Resumen
Toda persona tiene un entorno personal, una forma de aprender a lo largo de la vida. Si nos ubicamos en cualquier época todos hemos tenido una estructura de fuentes primarias de información para aprender y conexiones sociales. Esta propuesta trata de fomentar el conocimiento en primer plano de los PLEs para que a partir de esto se estructure una serie de redes de conocimiento para el aprendizaje y la enseñanza. El Entorno Personal de Aprendizaje (PLE) debe ser parte fundamental en el desarrollo profesional de profesor, debe ser utilizado conociendo las partes esenciales de los PLE, leer/ acceder a la información, hacer/ reflexionar haciendo y compartir red personal de aprendizaje. El objetivo de esta propuesta es establecer el entorno personal de aprendizaje como herramientas necesarias para fortalecer el trabajo docente.

Descripción del taller.

Conceptos	Tiempo	Materiales	Evaluación
Conocer y definir Entorno Personal de Aprendizaje Historia del Entorno personal de Aprendizaje Conceptos y componentes de	**20 minutos**	Power Point Computadora con acceso ilimitado a internet	Rubrica

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

un Entorno Personal de Aprendizaje.			

Descripción

Conocer a detalle la historia de los entornos personales de aprendizaje

Un PLE que *"…es el conjunto de herramientas, fuentes de información, conexiones y actividades que cada persona utiliza de forma asidua para aprender"*
(Adell y Castañeda, 2010, pág. 23)

Conceptos	Tiempo	Materiales	Aplicaciones
Etapa PLE Leer/Acceder a la información Herramientas: Creación de un blog Videos educativos Podcast mapas conceptuales	**65 minutos**	Internet con acceso a blogger Computadora	Herramientas para la creación de blogs educativos :Wordpress Herramientas para la creación de blogs educativos: tipos y modelos de blogs. Vimeo Windows Movie Maker Text 2 Mind Map Gliffy WiseMapping Popplet

Descripción

El uso del blog en la clase presencial.
Guía sobre el uso educativo de los blogs.
Descargar documento: Guía para grabar tus propios vídeos educativos.pdf

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Conceptos	Tiempo	Materiales	Aplicaciones
Etapa PLE Compartir Red Personal de Aprendizaje PLE Herramientas: Redes Sociales	**35 minutos**	Internet con acceso a blogger y redes sociales. Computadora	Facebook Twitter Whatsapp

Descripción

Lista de reproducción MOOC: Aplicación de las Redes Sociales a la Enseñanza
100 Ways You Should Be Using Facebook in Your Classroom
Configuración y herramientas de privacidad de Facebook
Usos de Twitter en educación.
Cómo usar hasthtags educativos.

Referencias bibliográficas

Castañeda, L. y Adell, J. (Eds.). (2013). *Entornos Personales de Aprendizaje: claves para el ecosistema educativo en red*. Alcoy: Marfil.

Cómo usar hasthtags educativos, http://blog.smconectados.com/2014/04/06/como-usar-los-hashtag-educativos/ Consultado: 14/03/2017

Configuración y herramientas de privacidad de Facebook , https://www.facebook.com/settings/?tab=privacy#_=_N: Consultado: 14/04/2017

El uso del blog en la clase presencial., http://jjdeharo.blogspot.mx/2007/11/el-uso-del-blog-en-la-clase-presencial.html. Consultado: 09/04/2017

Guía sobre el uso educativo de los blogs., http://serviciosgate.upm.es/docs/asesoramiento/Blog_educativo.pdf. Consultado: 10/04/2017

Descargar documento: Guía para grabar tus propios vídeos educativos, https://miriadax.net/documents/57984668/62586026/Guía+para+grabar+tus+propios+vídeos+educativos.pdf. Consultado: 14/04/2017

Usos de Twitter en educación., http://eduteka.icesi.edu.co/articulos/TwitterEducacion. Consultado: 12/04/2017

100 Ways You Should Be Using Facebook in Your Classroom, http://www.onlinecollege.org/2009/10/20/100-ways-you-should-be-using-facebook-in-your-classroom/. Consultado: 14/04/2017

ISBN 978-84-945722-3-4

T-594

CÓMO ENSEÑAR EN PRIMARIA A "PENSAR CON FUNCIONES"

Rafael Ramírez, Rodolfo Morales, María C. Cañadas y Aurora del Río
rramirez@ugr.es, alefut7@hotmail.com, mconsu@ugr.es, adelrio@ugr.es
Universidad de Granada (España)

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.
Modalidad: T
Nivel educativo: Primaria
Palabras clave: Diseño tareas, Educación Primaria, Funciones, Pensamiento funcional.

Resumen

Presentamos un taller en el que abordamos el trabajo con funciones en educación primaria a través del pensamiento funcional, con la intención de que sea útil para los maestros en sus aulas. Este tipo de pensamiento implica centrar la atención en las relaciones entre cantidades que varían de forma conjunta, expresar esas relaciones en diferentes sistemas de representación (verbal, pictórico, tabular, gráfico y simbólico) y su generalización.

Una tarea que busca promover el pensamiento funcional se puede caracterizar como una oportunidad para que el alumno pueda establecer relaciones entre cantidades que varían, representar, justificar y generalizar esa relación.

Proponemos una metodología activa en la que nos centramos en la descripción y el reconocimiento de los elementos del pensamiento funcional en procesos de enseñanza. Tras la introducción y un debate con los asistentes, presentaremos diferentes tareas, con diferentes focos de interés dentro del pensamiento funcional (relaciones funcionales, generalización, representaciones, etc). A continuación, deberán analizar y proponer modificaciones según diferentes supuestos de enseñanza prácticos que involucran diferentes

indicadores (nivel educativo, agrupación de los estudiantes, metodología, materiales, atención a la diversidad, etc).

Introducción

El pensamiento funcional implica centrar la atención en las relaciones entre cantidades que varían de forma conjunta, expresar esas relaciones en diferentes sistemas de representación (verbal, pictórico, tabular, gráfico y simbólico) y su generalización (Cañadas, Brizuela, Blanton, 2016; Cañadas y Molina, 2016). Su introducción a partir de los primeros cursos de escolarización es recomendada por diversos autores, dado que se considera un enfoque potente para desarrollar el pensamiento algebraico en los alumnos desde edades tempranas (Kaput, 2000; Blanton, Levi, Crites, y Dougherty, 2011). Además, contribuye a sentar una base sólida para futuros aprendizajes del concepto de función, ayudando a solventar las dificultades que presentan los alumnos cuando se enfrentan por primera vez a este concepto en la educación secundaria (Ellis, 2011).

Las dos de las relaciones entre variables que Confrey y Smith (1991) proponen para trabajar las funciones con los estudiantes son la covariación y la correspondencia. La relación de covariación es aquel cambio simultaneo entre dos variables que se produce por la existencia de una relación entre ellas (Gómez, 2016). Identificar este tipo de relación es reconocer ese cambio entre las cantidades de ambas variables. Por ejemplo, para la función f(x)=x, si se percibe que es necesario sumar tres más a la cantidad de la variable dependiente dado que la cantidad de la variable independiente aumento en tres. La relación de correspondencia es aquella regla que se establece entre los pares correspondientes de las cantidades de ambas variables. Identificar una relación de correspondencia es identificar esa regla que permite calcular cualquier cantidad de una de las variables. Por ejemplo: sumar cinco a la cantidad de la variable independiente para encontrar cualquier cantidad de la variable dependiente para la función f(x)=x+5.

Una tarea que busca promover el pensamiento funcional se puede caracterizar como una oportunidad para que el alumno pueda establecer relaciones entre cantidades que varían,

ISBN 978-84-945722-3-4

representar, justificar y generalizar esa relación (Soares, Blanton y Kaput, 2005). Para ello, debe de haber una función involucrada en el problema. En particular, para educación primaria debe tratarse de una función lineal. Por ejemplo, identificar la relación entre el número de orejas o colas y la cantidad de conejos en una granja se trata de un problema que puede promover el pensamiento funcional de los estudiantes según como se trabaje. Si se va proporcionado información sobre algunos casos particulares: con un conejo, dos orejas; con dos conejos, cuatro orejas… ampliando las cantidades involucradas, se puede guiar a los alumnos hacia una generalización de la relación involucrada.

De las investigaciones, deducimos la dificultad de discriminar aspectos muy específicos del pensamiento funcional en las respuestas de los estudiantes. Sin embargo, se pueden extraer ideas para aproximar el concepto de pensamiento funcional al maestro de Primaria. El objetivo de este taller es suministrar ideas y estrategias docentes para que el maestro seleccione y diseñe tareas que favorezcan el desarrollo de este tipo de pensamiento en los estudiantes de Primaria.

Metodología del taller

Inicialmente sintetizamos los principales aportes de las investigaciones sobre pensamiento funcional. Nos centramos principalmente en la descripción y el reconocimiento de sus elementos en procesos de enseñanza. En una puesta en común inicial reflexionaremos acerca de las concepciones de los asistentes referentes al pensamiento funcional y al uso de las funciones en Educación Primaria. A partir de este intercambio de ideas, mostramos un proceso basado en la descripción de pensamiento funcional que puede resultar operativo para seleccionar, adaptar o crear tareas. En el siguiente esquema señalamos los focos de trabajo (Figura 1). Presentaremos ejemplos de tareas que han sido utilizada en investigaciones sobre pensamiento funcional, analizaremos sus características para desarrollar el pensamiento funcional y la modificaremos con la intención de convertirla en una tarea de enseñanza. Para ello, tendremos en cuenta las modificaciones posibles para adaptarla al nivel educativo, reformular el contexto, gestionar el agrupamiento de los estudiantes, considerar los recursos y graduaciones posibles para la atención a la diversidad. La metodología será el trabajo en grupos reducidos, repartiendo los ejemplos y realizando puestas en común. Finalmente, se plantea una reflexión final sobre la adaptación realizada de las tareas.

ISBN 978-84-945722-3-4

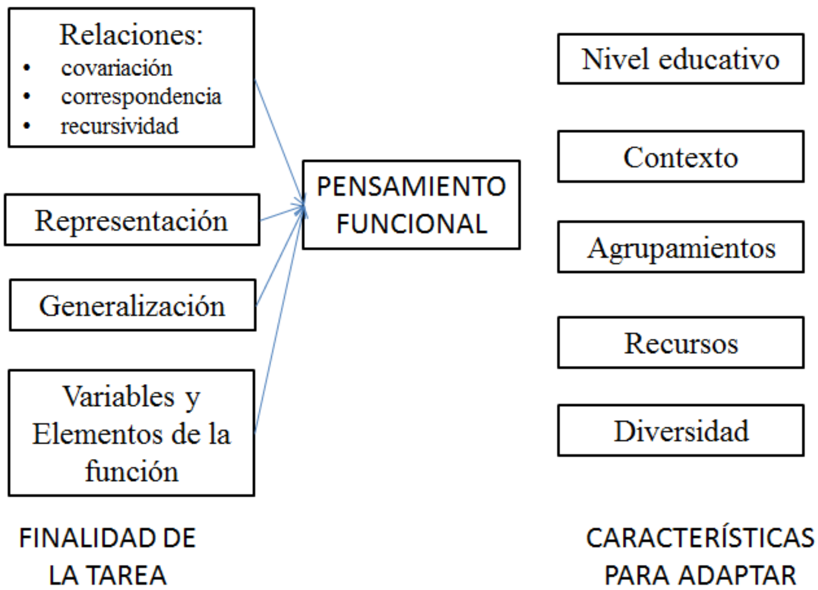


Figura 1. Focos de atención para el diseño de tareas

Ejemplo 1: Una cuidadora de animales debe comprar platos de comida y agua para los perros, de modo que cada perrito debe tener su plato de comida, y cinco platos con agua en un sitio donde los perros que tengan sed puedan ir y beber agua.

- Si a la cuidadora llega un perro ¿cuántos platos en total se necesitan?
- Si a la cuidadora llegan dos perros ¿cuántos platos en total se necesitan?
- Si a la cuidadora llegan tres perros ¿cuántos platos en total se necesitan?
- Si a la cuidadora llegan cinco perros ¿cuántos platos en total se necesitan?
- Si a la cuidadora llegan diez perros ¿cuántos platos en total se necesitan?
- Si a la cuidadora llegan treinta perros ¿cuántos platos en total se necesitan?
- Si a la cuidadora llegan cien perros ¿cuántos platos en total se necesitan?
- ¿De qué manera tú puedes calcular la cantidad de platos totales?

ISBN 978-84-945722-3-4

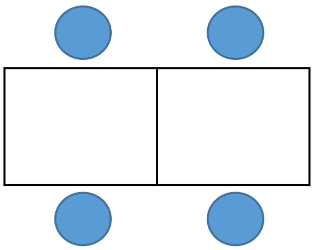
Ejemplo 2: Averiguar la edad de Carmen dada una edad de Álvaro. El enunciado del problema fue el siguiente: "dos niños, Álvaro y Carmen, se llevan cinco años, siendo Carmen cinco años mayor que Álvaro".

- Cuando Álvaro tiene un año ¿cuántos años tendrá Carmen?
- Cuando Álvaro tiene dos años ¿cuántos años tendrá Carmen?
- Cuando Álvaro tiene tres años ¿cuántos años tendrá Carmen?
- Cuando Álvaro tiene cinco años ¿cuántos años tendrá Carmen?
- Cuando Álvaro tiene diez años ¿cuántos años tendrá Carmen?
- Cuando Álvaro tiene treinta años ¿cuántos años tendrá Carmen?
- Cuando Álvaro tiene cien años ¿cuántos años tendrá Carmen?
- ¿Cómo calcularías los años de Carmen?

Ejemplo 3: Laura decide regalar a su nieto Pedro un euro por cada domingo que pasa. Pedro, a su vez, decide guardar cada euro que le regalará su abuela en su alcancía que ya cuenta con cinco euros ahorrados.

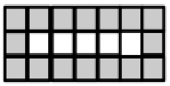
- Si pasa un domingo ¿cuántos euros tendrá en su alcancía?
- Si pasan dos domingos ¿cuántos euros tendrá en su alcancía?
- Si pasan tres domingos ¿cuántos euros tendrá en su alcancía?
- Si pasan cinco domingos ¿cuántos euros tendrá en su alcancía?
- Si pasan diez domingos ¿cuántos euros tendrá en su alcancía?
- Si pasan cien domingos ¿cuántos euros tendrá en su alcancía?
- ¿Cómo podrías calcular el total de euros que Pedro tiene en ahorrado en su alcancía?

Ejemplo 4. En un curso la maestra decide ordenar las mesas de la sala de clases en una fila, donde en cada una de ellas se podrán sentar solo dos alumnos en los lados opuestos de la mesa, como muestra la siguiente figura (Se le muestra la imagen al alumno o a través de material concreto)



- Si hay tres mesas ¿cuántos niños se pueden sentar en ellas?
- Si hay cuatro mesas ¿cuántos niños se pueden sentar en ellas?
- Si hay cinco mesas ¿cuántos niños se pueden sentar en ellas?
- Si hay diez mesas ¿cuántos niños se pueden sentar en ellas?
- Si hay treinta mesas ¿cuántos niños se pueden sentar en ellas?
- Si hay cien mesas ¿cuántos niños se pueden sentar en ellas?
- Si hay mil mesas ¿cuántos niños se pueden sentar en ellas?
- ¿Cómo calcularías la cantidad de niños que se pueden en las mesas, si no se sabe la cantidad de ellas?

Ejemplo 5. Un colegio quiere reformar el suelo de todos sus pasillo porque está ya muy estropeado. El equipo directivo decide enlosar los pasillos con baldosas blancas y con baldosas grises. Todas las baldosas son cuadrada y tienen el mismo tamaño. Las baldosas se van a colocar en cada pasillo de la manera que ves en la siguiente imagen. El colegio contrata a una empresa para que reforme los pasillos de las tres plantas del colegio. Te pedimos que ayudes a los albañiles a contestar algunas preguntas que necesitan responderá para hacer este trabajo.



- ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 5 baldosas blancas?

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

- Unos pasillos son más largos que otros. Por eso, los albañiles necesitan diferente número de baldosas para cada pasillo. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 8 baldosas blancas?
- ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 10 baldosas blancas?
- ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 100 baldosas blancas? Ahora hazlo de una forma diferente.
- Los albañiles de una empresa siempre colocan primero las baldosas blancas y después las baldosas grises.
- ¿Cómo puedes saber cuántas baldosas grises si ya han colocado las baldosas blancas?
- En uno de los pasillos, por error los albañiles han colocado las baldosas grises antes que las blancas. Han colocado 20 baldosas grises, ¿cuántas baldosas blancas necesitan?
- En otro pasillo los albañiles también han colocado las baldosas grises antes que las blancas. Han colocado 56 baldosas grises, ¿cuántas baldosas blancas necesitan?

Ejemplo 6. El sábado vamos a esquiar a Sierra Nevada. Tenemos que dejar el coche en el parking y nos dice que la entrada cuesta 1 euros y dos euros cada hora que el coche esté allí.
¿Cuánto nos cuesta el parking si estamos una hora?
¿Cuánto nos cuesta el parking si estamos 3 horas?
¿Cuánto nos cuesta el parking si estamos 10 horas?
¿Cuánto nos cuesta el parking si estamos 1 día entero (24 horas)?
¿Cuánto nos cuesta el parking si estamos 2 días (48 horas)?
¿Cuánto nos cuesta el parking si estamos 1 semana (168 horas)?
¿Cómo podrías calcular la cantidad de dinero si no sabes la cantidad de horas estarás en el parking?

Agradecimientos

ISBN 978-84-945722-3-4

Este trabajo ha sido realizado dentro de los proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU2013-41632-P y EDU2016-75771-P, financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Referencias bibliográficas

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3–5*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M., y Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. The Journal of Mathematical Behavior, 41, 87-103.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Confrey, J. y Smith, E. (1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations and transformations. In R. Underhill (Ed.) *Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of The International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 57-63). Blacksburg, Virginia, U.S.A.

Ellis, A. (2011). Algebra in the middle school: Developing functional relationships through quantitative reasoning. En *Early Algebraization* (pp. 215-238). Springer Berlin Heidelberg.

Gómez, B. (2016). Sobre el análisis didáctico de la razón. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 165-174). Granada, España: Comares.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum.* Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Soares, J., Blanton, M. L. y Kaput, J. (2005). Thinking Algebraically across the Elementary School Curriculum. *Teaching children mathematics*, *2*(5), 228–235.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-610

ANÁLISIS EPISTÉMICO Y COGNITIVO DE TAREAS DE PROPORCIONALIDAD

Juan D. Godino – María Burgos
jgodino@ugr.es – mariaburgos@ugr.es
Universidad de Granada

Tema: Formación de profesores y maestros
Modalidad: Taller
Nivel educativo: No específico
Palabras clave: formación de profesores, proporcionalidad, niveles de algebrización, enfoque ontosemiótico

Resumen

En este taller se propone a los asistentes analizar distintas maneras de resolver problemas de proporcionalidad desde la perspectiva de los niveles de algebrización que se ponen en juego, según el modelo propuesto por Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014) y Godino Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa (2015).
Se usarán diferentes problemas que se pueden resolver mediante razonamientos aritméticos, pero también es posible aplicar otros procedimientos que involucran los niveles protoalgebricos 1 y 2, así como el nivel 3 de algebrización. Se propondrá elaborar variantes de los enunciados iniciales de tal manera que supongan un primer encuentro con el uso de parámetros, lo que implica el nivel 4 de algebrización.
El reconocimiento explícito de los objetos y procesos implicados en las prácticas matemáticas es una competencia que el profesor debe desarrollar. Esta competencia, contextualizada en el caso de tareas que ponen en juego la proporcionalidad, permite al docente comprender los procesos de aprendizaje matemático, diseñar y gestionar tales procesos y valorarlos con estándares de idoneidad previamente fijados.

1. Introducción

Diversos autores, desde las investigaciones en educación matemática, describen modelos para intentar responder a la pregunta ¿cuáles son los conocimientos didáctico – matemáticos que debería tener el profesor de matemáticas para desarrollar una enseñanza idónea?

Godino (2009) incluye como categorías de conocimientos las relativas a las facetas *epistémica* (conocimientos institucionales) y *cognitivas* (conocimientos personales), como componentes del conocimiento especializado del contenido matemático. Seleccionado un problema o tarea matemática, el profesor debe ser capaz de prever posibles soluciones de la misma, distinguiendo la secuencia de prácticas operativas y discursivas que el resolutor debe implementar en cada caso. También debe poder identificar la trama de objetos

ISBN 978-84-945722-3-4

ostensivos (lenguajes y artefactos) y *no ostensivos* (conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) imbricados en las prácticas matemáticas, así como las relaciones potencialmente conflictivas entre los diversos tipos de lenguajes puestos en juego y los procesos matemáticos involucrados. Este análisis es complejo y requiere el desarrollo de una competencia específica en los profesores, mediante intervenciones formativas específicas.

En este taller presentaremos ejemplos de análisis de las prácticas, objetos y procesos implicados en la solución de tareas matemáticas que involucran la noción de proporcionalidad. A continuación, en la sección 2, describimos los fundamentos y el marco teórico que sustenta este trabajo. Seguidamente, presentamos el diseño formativo con los objetivos y metodología de implementación; mostramos también, el análisis a priori de una de las tareas propuestas. Finalmente, razonamos sobre la importancia de este tipo de intervenciones formativas y su implicación para la práctica docente.

2. Marco teórico y antecedentes

El planteamiento del taller está apoyado en el modelo de conocimiento del profesor de matemáticas descrito en Godino (2009) como "conocimiento didáctico - matemático" (CDM), el cual desarrolla otros modelos existentes, en particular el MKT (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2008), mediante la aplicación de las herramientas conceptuales y metodológicas propuestas por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2012).

En el EOS se ha introducido la herramienta configuración de objetos y procesos para hacer un análisis pormenorizado de las prácticas matemáticas puestas en juego en la resolución de tareas. En la realización de dichas prácticas intervienen y emergen objetos matemáticos de diversa naturaleza, agrupándose en las siguientes categorías: elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos. Todos los objetos están interconectados entre sí mediante funciones semióticas referenciales y operacionales (Godino et al., 2007, p. 130).

2.1. Competencia de análisis epistémico y cognitivo

Las competencias específicas que debe tener el profesor para una enseñanza idónea de las matemáticas se pueden concretar en el "diseño y análisis didáctico", esto es, la competencia para analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y para sintetizar los conocimientos didácticos existentes sobre el diseño, implementación y evaluación de la práctica docente (Godino, Rivas, Castro y Konic, 2012).

Para la enseñanza de las matemáticas, el docente debe tener el nivel de competencia matemática que le permita conocer y ser capaz de llevar a cabo las prácticas matemáticas, operativas y discursivas, necesarias para resolver los tipos de problemas de la etapa donde imparte. Además, el docente debe poder analizar y valorar la actividad matemática de los alumnos al resolver estos problemas, identificando los objetos y significados movilizados, con el fin de enriquecer su desempeño y mejorar su competencia profesional. Este análisis permite al docente prever conflictos de significados, evaluar los niveles de competencia matemática de los alumnos y establecer distintas posibilidades de institucionalización de los conocimientos matemáticos implicados (Godino et al., 2007), valorando su eficacia y su coste.

La tarea de análisis que proponemos a los profesores en formación en este taller supone una evolución en la técnica de análisis ontosemiótico descrita en Godino et al. (2012).

2.2. Niveles de razonamiento algebraico

En el marco del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos se ha propuesto una caracterización del razonamiento algebraico en Educación Primaria basada en la distinción de tres niveles de algebrización (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014). Tales niveles se definen teniendo en cuenta los tipos de representaciones usadas, los procesos de generalización implicados, y el cálculo analítico que se pone en juego en la actividad matemática correspondiente. En Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa (2015) se amplía el modelo anterior mediante la inclusión de otros tres niveles más avanzados de razonamiento algebraico que permiten analizar la actividad matemática en Educación Secundaria. Estos niveles están basados en la consideración de, 1) el uso y tratamiento de parámetros para representar familias de ecuaciones y funciones; 2) estudio de las estructuras algebraicas en sí mismas, sus definiciones y propiedades. En los anexos 2 y 3 se incluye una síntesis de los rasgos característicos de cada uno de los niveles, los cuales serán aplicados al análisis de la actividad matemática que se realiza para resolver las tareas de proporcionalidad que se proponen en el anexo 1.

3. Diseño instruccional

3.1. Objetivos y metodología

El taller se orienta al logro de los siguientes objetivos: en primer lugar, reflexionar sobre las características del razonamiento algebraico y el reconocimiento de niveles de algebrización en la realización de tareas matemáticas escolares; en segundo lugar, reconocer la diversidad de objetos y procesos implicados en tareas matemáticas que involucran la proporcionalidad.

Se propone la siguiente metodología instruccional:

1) Trabajando en equipos de 3 o 4 estudiantes realizar las siguientes actividades:

    a) Resolver las tareas propuestas (como la que se muestra en la sección 3.2.)

    b) Describir el procedimiento seguido, indicando las acciones que se deben realizar y las explicaciones necesarias que justifican las respuestas.

    c) Identificar los conocimientos que se ponen en juego en el enunciado y cada una de las prácticas elementales, completando la tabla incluida a continuación (añade las filas necesarias).

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Enunciado y secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	*Uso e intencionalidad de las prácticas*	*Objetos referidos en las prácticas*
...	...	...

d) Enuncia tareas relacionadas cuya solución implique cambios en significados puestos en juego.

2) Presentación y discusión de resultados.

A continuación, presentamos el análisis a priori de una de las tareas usadas en el taller, el cual servirá de base para orientar las interacciones, formador – estudiantes, tanto en la fase de trabajo en equipo como en la discusión y sistematización de los conocimientos y competencias pretendidas.

3.2. Análisis *a priori* de una tarea

Se analizan las prácticas, objetos y procesos de distintas maneras de resolver un problema de proporcionalidad directa. El fin es desvelar cómo aplicando distintos procedimientos de resolver el problema y variantes del mismo es posible poner en juego los niveles 0 a 4 de algebrización y, por tanto, distintos significados de la proporcionalidad. El enunciado del problema es el siguiente:

Problema (enunciado inicial):

> *Un paquete de 500 gramos de café se vende a 5 euros. ¿A qué precio se debe vender un paquete de 450 gramos?*

Detallamos, a continuación, los sistemas de prácticas que se ponen en juego en distintas soluciones posibles del problema y los conocimientos implicados en cada práctica, según el modelo desarrollado en Giacomone, Godino, Wilhelmi y Blanco (2016) y Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos y Giacomone (2017).

<u>Solución 1. Nivel 0 de algebrización (aritmética).</u>

En las situaciones de compra-venta de la vida cotidiana, es habitual suponer que, al comprar cantidades pequeñas de café, dichas cantidades sean del mismo tipo y calidad. En consecuencia, si se compra el doble, el triple, etc. de producto, se deberá pagar el doble,

ISBN 978-84-945722-3-4

triple, etc. de precio. Del mismo modo, si se compra la mitad, la tercera parte, etc. de producto, se deberá pagar la mitad, la tercera parte, etc. de precio. Si un paquete de 500 gramos de café se vende a 5 euros, el precio de 100 gramos de café (cinco veces menos) debe ser la quinta parte de 5 euros, esto es, 1 euro. El precio de 50 gramos (mitad de 100 gramos) deberá ser la mitad, esto es, 50 céntimos. De esta manera, 450 gramos de café deben costar, 4×1+0,50=4,50; es decir, 4 euros y 50 céntimos.

Solución 2. Nivel 1 de algebrización (reducción a la unidad).

Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	Uso e intencionalidad de las prácticas	Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos ...)
1. Si se compra el doble, triple, etc. de producto, se deberá pagar el doble, triple, etc. de precio	Explicitar que se cumplen en el contexto del problema las condiciones de proporcionalidad directa	*Conceptos:* multiplicación; secuencia ilimitada; correspondencia funcional, magnitud, cantidad, medida *Proposición* P1: enunciado de la práctica 1. *Argumento*: convención pragmática
2.Por tanto, la relación que se establece entre las cantidades del producto compradas y el precio pagado es de proporcionalidad directa	Declarar que la relación establecida entre las magnitudes heterogéneas es de proporcionalidad directa	*Concepto*: relación, cantidad, producto proporcionalidad directa *Proposición* P2: la relación entre ambas magnitudes es de proporcionalidad directa *Argumento*: se cumplen las condiciones que definen la proporcionalidad directa
3. Calculamos el coste de 1gr de café: 5/500=0,01 euro, es decir, 1 céntimo.	Reducción a la unidad	*Concepto:* precio unitario *Argumento*: la relación es de proporcionalidad directa
4.Si el precio de 1 gr es de 0,01 €, el de 450 gramos es 450x0,01=4,5 €	Operar numéricamente con el consumo unitario. Identificar el resultado como solución al problema	*Proposición*: El precio de 450 gramos de café es de 4,5 € *Argumento*: Secuencia de prácticas 1) a 4)

Solución 3. Nivel 2 de algebrización (regla de tres).

Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	Uso e intencionalidad de las prácticas	Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos ...)
Las primeras dos secuencias de prácticas son análogas a las de la solución 2		

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

3.En una proporcionalidad directa las razones de las cantidades que se corresponden son iguales: 5/500 = x/450;	Representar con un símbolo literal el valor faltante. Relacionar la incógnita con los datos	*Conceptos*: proporcionalidad directa, igualdad, ecuación, razón de cantidades, precio unitario, proporción, incógnita *Proposición* P3: las razones son iguales *Argumento*: porque el precio unitario es el mismo en ambos paquetes
4.En toda proporción se cumple la igualdad del producto en cruz de los términos, 5×450 = 500×x,	Operar con la incógnita	*Conceptos*: igualdad, proporción, producto Proposición: enunciado de 4) *Argumento*: basado en una propiedad de las proporciones
5. Luego, x = (5×450)/500 = 4'5.	Despejar la incógnita	*Conceptos*: igualdad, razón, ecuación *Procedimiento*: despeje de la incógnita. *Argumento*: propiedades aritméticas, deductivo
6.Por tanto, el precio del paquete debe ser 4,5 euros.	Interpretar el resultado numérico como solución del problema.	*Proposición*: el precio del paquete es 4,5€ *Argumento*: secuencia de prácticas 1) a 5)

Solución 4. Nivel 3 de algebrización (algebraico-funcional).

Enunciado y secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	Uso e intencionalidad de las prácticas	Objetos referidos en las prácticas
1. Se supone que si se compra el doble, triple, etc. de producto, se deberá pagar el doble, triple, etc. de precio. Además, lo que pagaremos por dos paquetes de café distintos, será igual al precio de un paquete que pesase lo mismo que los dos juntos.	Explicitar que se cumplen en el problema las condiciones de aplicación de la función lineal entre conjuntos de cantidades de magnitudes.	*Conceptos*: multiplicación, secuencia ilimitada, proporcionalidad, correspondencia funcional, magnitud, cantidad. *Proposición P1*: el enunciado de la práctica 1). *Argumento*: convención pragmática
2. Por tanto, la correspondencia que se establece entre el conjunto de las cantidades del producto (Q) y el conjunto de los precios pagados (P), $f: Q \rightarrow P$, es lineal.	Declarar que la relación establecida entre las magnitudes heterogéneas es lineal.	*Conceptos*: conjuntos, correspondencia,relación lineal. *Proposición P2*: la correspondencia entre los conjuntos de cantidades es lineal. *Argumento*: se cumplen las condiciones que definen la función lineal según 1).
3. En toda función lineal, f, se cumple que, la imagen de la suma de cantidades es la suma de las imágenes, $f(a + b) = f(a) + f(b)$, y la imagen del producto de una cantidad por un número real es el producto de la cantidad imagen por dicho número, $f(ka) = kf(a)$.	Explicitar las condiciones de definición de las funciones lineales de dos maneras: – lenguaje natural; – lenguaje simbólico literal.	*Conceptos*: suma de cantidades, producto por un escalar, original e imagen de una función, función lineal, producto. *Procedimiento*: traducción lenguaje natural a simbólico.

ISBN 978-84-945722-3-4

4. El coeficiente k de la función lineal es el coeficiente de proporcionalidad en el caso de las relaciones de proporcionalidad directa entre magnitudes (tanto por uno).	Interpretar el coeficiente k de las funciones lineales en términos del contexto del problema (tanto por uno).	*Conceptos*: proporcionalidad directa, magnitud, coeficiente de proporcionalidad, tanto por uno.
5. Aplicando dichas propiedades al caso se tiene: $\mathrm{f}(500\mathrm{g}) = 5€$; $500\mathrm{f}(1\mathrm{g}) = 5€$; $\mathrm{f}(1\mathrm{g}) = \frac{5}{500}€$ [un gramo de café cuesta 1 céntimo]	Calcular el coste unitario.	*Conceptos*: función lineal; igualdad; proporcionalidad. *Procedimientos*: traducción del lenguaje natural (enunciado) al simbólico; cálculo del coeficiente de proporcionalidad basado en las condiciones de definición de una función lineal.
6. $450\mathrm{f}(1\mathrm{g}) = 450 \times \frac{5}{500}$ € $\mathrm{f}(450\mathrm{g})$ = 4,5€	Calcular el valor faltante.	*Procedimiento*: cálculo del valor faltante basado en las condiciones de definición de la función lineal.
7. Luego el precio de un paquete de 450 gramos debe ser de 4,5 euros.	Interpretar el resultado numérico como solución del problema.	*Proposición*: el precio del paquete es 4,5 €. *Argumento*: secuencia de prácticas 1) a 6).

Proponemos a continuación dos variantes del enunciado inicial en los que se ponen en juego los niveles 3 y 4 de algebrización, según los rasgos descritos en los anexos 2 y 3.

Variante 1 del problema inicial (nivel 3 de algebrización)

> *Un paquete de 750 gramos de café cuesta 2,5 euros más que el paquete de café de 500 gramos. ¿Cuál es el precio del paquete de café?*

Variante 2 del problema inicial (enunciado general; nivel 4 de algebrización)

> *Si un paquete de café de 500 gr cuesta k euros. ¿Cuál sería el precio de un paquete de x euros?*

4. Consideraciones finales

La actividad de resolución de problemas se complementa con el análisis epistémico – cognitivo provocada por las consignas: ¿Qué matemáticas se pone en juego en la resolución del problema? ¿Qué matemática ha puesto en juego el alumno? La respuesta a estas preguntas es apoyada mediante el uso de las herramientas teóricas del "enfoque ontosemiótico", concretadas en este caso en la noción de configuración de prácticas, objetos y procesos.

El tipo de análisis que hemos descrito en este trabajo debería ser una competencia instrumental del profesor de matemáticas al permitirle reconocer la complejidad de objetos y significados puestos en juego en las actividades matemáticas, prever potenciales conflictos, adaptarlas a las capacidades de sus estudiantes y a los objetivos de aprendizaje.

ISBN 978-84-945722-3-4

Reconocimientos

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2012-31869 (MINECO) y EDU2016-74848-P (FEDER, AEI)

Referencias bibliográficas

Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*, 97-124.

Godino J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN*: *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13-31.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49 - 68). Jaén: SEIEM.

Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. Enseñanza de las Ciencias, 32.1, 199-219.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM): The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1), 127-135.

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. y Konic, P. (2012). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *7*(2), 1-21.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. Avances de Investigación en Educación Matemática, 8, 117-142.

Hill H. C., Ball D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*, 372-400.

ANÁLISIS EPISTÉMICO Y COGNITIVO DE TAREAS DE PROPORCIONALIDAD

Juan D. Godino – María Burgos
jgodino@ugr.es – mariaburgos@ugr.es
Universidad de Granada

Anexo 1. Enunciados de problemas

Problema 1:

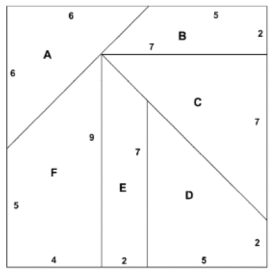
Un paquete de 500 gramos de café se vende a 5 euros. ¿A qué precio se debe vender un paquete de 450 gramos?

Problema 2:

Se quiere repartir 40 canicas entre Juan y Saúl según la razón 3:5. ¿Cuántas recibirá cada niño?

Problema 3:

En la figura adjunta se presentan las piezas de un puzle. Los números escritos junto a los lados de los polígonos corresponden a las medidas de dichos lados expresadas en centímetros. Construir en cartulina este puzle, pero de mayor tamaño, de tal manera que el lado de 4 cm tenga una longitud de 7 cm.



Problema 4:

El socio A de una empresa invierte 40.000 € y el socio B invierte 60.000€. El primer año la empresa da de beneficio 5.500 €. En los siguientes años los socios amplían su negocio. Cada año ganaron 2000 € más que el año anterior.

1) ¿Cómo se deberían repartir los beneficios entre los socios? Explica la estrategia y el razonamiento.

2) ¿Cómo se deberían repartir los beneficios en el tercer año? ¿Y el sexto? Explica la estrategia y el razonamiento.

3) ¿Cuántos años pasarán hasta que los socios hayan recuperado la inversión inicial?

Problema 5:

1) Si la longitud de la circunferencia delantera (grande) de la bicicleta es 462 cm y la de la trasera (pequeña) es de 132 cm, ¿qué distancia debe recorrer la bicicleta para que la rueda pequeña de 30 vueltas más que la grande.
2) Encuentra una explicación matemática del movimiento de la bicicleta. ¿Cómo lo explicarías a tus estudiantes?

Anexo 2. Resumen de características de los niveles 0-3 de algebrización

NIVE-LES	OBJETOS	TRANSFORMACIONES	LENGUAJES
0	- Objetos con un primer grado de generalidad (números particulares) - Significado operacional de la igualdad. - Variables como receptores de números particulares	Operaciones aritméticas con números particulares	Natural, numérico, icónico, gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a objetos extensivos o datos desconocidos.

ISBN 978-84-945722-3-4

1	- Objetos con un segundo grado de generalidad (conjuntos, clases o tipos de números) - Significado relacional de la igualdad - Variables como incógnitas.	Operaciones con objetos de primer grado de generalidad, aplicando propiedades de la estructura algebraica de N y la igualdad como equivalencia.	Natural, numérico, icónico, gestual; se usan símbolos implicando información espacial, temporal y contextual.
2	-Objetos con un segundo grado de generalidad (conjuntos, clases o tipos de números) -Significado relacional de la igualdad - Variables como incógnitas, números generalizados y cantidad cambiante	-Operaciones con objetos de primer grado de generalidad, aplicando propiedades de la estructura algebraica de N y la igualdad como equivalencia. - Ecuaciones de la forma, $Ax + B = C.$ - En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se realizan operaciones con las variables para obtener formas canónicas de expresión.	Simbólico – literal, usado para referir a los objetos intensivos reconocidos, aunque todavía ligados a la información espacial, temporal y contextual.
3	- Se usan indeterminadas, incógnitas, ecuaciones, variables y funciones particulares. (Objetos intensivos con un segundo grado de generalidad.)	-Operaciones con objetos de un segundo grado de generalidad. - Ecuaciones de la forma $Ax \pm B = Cx \pm D$. - Se hacen operaciones con indeterminadas o variables para obtener formas canónicas de expresión.	Simbólico – literal; se usan los símbolos de manera analítica (sin significados), sin referir a información contextual.

Anexo 3. Resumen de características de los niveles 4 -6 de algebrización

NIVE-LES	OBJETOS	TRANSFORMACIONES	LENGUAJES
4	Variables, incógnitas y parámetros; Familias de ecuaciones y funciones (Objetos intensivos con tercer grado de generalidad)	Hay operaciones con variables, pero no con los parámetros.	Simbólico – literal; los símbolos son usados analíticamente, sin referir a información contextual.
5	Variables, incógnitas y parámetros; Familias de ecuaciones y funciones (Objetos intensivos con tercer grado de generalidad)	Hay operaciones con los parámetros y, por tanto, con objetos con un tercer grado de generalidad.	Simbólico – literal; los símbolos son usados analíticamente, sin referir a información contextual.

ISBN 978-84-945722-3-4

6	Estructuras algebraicas abstractas (espacios vectoriales, grupos, anillos, …) Relaciones binarias generales y sus propiedades. (Objetos intensivos con cuarto grado de generalidad)	Hay operaciones con los objetos que forman parte de las estructuras.	Simbólico – literal; los símbolos son usados analíticamente, sin referir a información contextual.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-615

A produção de narrativas como dispositivo de pesquisa e de formação do professor que ensina matemática

Adair Mendes Nacarato
adamn@terra.com.br
Universidade São Francisco, São Paulo – Brasil
Cármen Lúcia Brancaglion Passos
carmenpassos@gmail.com
Universidade Federal de São Carlos

Núcleo temático: IV – Formación del profesorado en Matemáticas
Modalidade: Taller
Nível educativo: Formação e atualização docente
Palavras chave: Formação docente, Narrativa, Práticas (auto)formativas.

Resumo

A comunidade de educadores matemáticos no Brasil vem utilizando, numa dimensão crescente, as narrativas de professores como prática de pesquisa e/ou de formação docente. Os resultados de pesquisas realizadas nos grupos sob nossa coordenação apontam para as potencialidades das narrativas, em suas múltiplas modalidades (narrativas de práticas, narrativas de vida, narrativas de trajetórias, etc), como práticas (auto)formativas, pois no ato da escrita, o professor reflete sobre sua trajetória de formação, seus saberes e suas práticas e, consequentemente, tomam consciência de sua constituição identitária, abrindo possibilidades de rupturas e/ou avanços em práticas diferenciadas com seus alunos. Essas narrativas têm impacto na formação docente quando são compartilhadas com os pares, em diferentes espaços (em grupos colaborativos, na escola, em publicações, etc.). Como dispositivo de pesquisa, as narrativas têm contribuído para a compreensão da história da formação docente e das práticas com a matemática de sala de aula, com implicações para a formação docente. Apoiamo-nos em referenciais da abordagem (auto)biográfica e em autores do campo da linguagem. O presente taller, destinado a professores e pesquisadores, tem como objetivo apresentar alguns pressupostos teóricos e metodológicos (de produção e análise) e apresentar algumas narrativas produzidas por professores para que os participantes as analisem.

Introdução

A produção de pesquisas no campo da formação docente vem crescendo significativamente no Brasil, nas duas últimas décadas. Isso se deve, por um lado, ao crescente número de programas de pós-graduação na área de Educação ou de Ensino de Matemática; por outro, a formação docente é um tema recorrente nas políticas públicas, o que mobiliza pesquisadores e formadores a se inserirem nesse campo de inquérito.

ISBN 978-84-945722-3-4

As pesquisas de sistematização da produção acadêmica nessa temática (por exemplo, André, 2011) indicam uma virada temática: de pesquisas sobre a formação inicial ou continuada, para a pesquisa sobre o professor. As investigações vêm se concentrando em focos como: constituição profissional; identidade profissional; profissionalidade; desenvolvimento profissional; trajetórias profissionais; histórias de vida, etc.

Essa virada temática vem exigindo novas abordagens de pesquisa e novos modos de produção de dados. Nesse movimento, as narrativas vêm ganhando força, principalmente no campo da Educação Matemática.

O termo 'narrativa' é polissêmico e envolve múltiplas terminologias e interpretações: narrativas de vida, histórias de vida, trajetórias de formação, narrativas de práticas, autobiografias, memoriais de formação, dentre outros. Ela tem sido utilizada como prática de formação e de pesquisa. Se, por um lado, as narrativas têm possibilitado dar visibilidade ao professor, reconhecendo-o como protagonista de sua prática e de sua formação, por outro, o tratamento no campo da pesquisa exige cuidados teóricos e metodológicos.

Dentre a multiplicidade de interpretações, nos deteremos em duas delas: narrativas autobiográficas e narrativas de práticas. Embora usadas com denominações diferentes, entendemos assim como Bertaux (2010:18), que ambas podem ser consideradas como narrativas de vida, pois "existe narrativa de vida desde que haja descrição *sob forma narrativa* de um fragmento de experiência vivida" (grifos do autor); podem ser consideradas "*narrativas de prática em situação*" (p.17, grifos do autor), visto que por meio das narrativas podemos compreender os contextos nos quais os narradores/professores viveram e se constituíram. Para efeitos analíticos, usaremos as duas terminologias.

No presente trabalho apresentamos uma breve discussão sobre essas duas modalidades de narrativas, os modos de produção de dados e de análise.

As narrativas autobiográficas

As narrativas autobiográficas aliam-se ao método biográfico que, na concepção de Ferrarotti (2010:44), "todas as narrações autobiográficas relatam, segundo um corte horizontal ou vertical, uma **práxis humana**" (grifos do autor), e "se nós somos, se todo indivíduo é a reapropriação **singular** do universal social e histórico que o rodeia, **podemos conhecer** o social a partir da especificidade irredutível de uma práxis individual" (p.45, grifos do autor).

ISBN 978-84-945722-3-4

Essa modalidade de narrativa também pode ser entendida assim como defende Dominicé (2010): "biografia educativa", na perspectiva da formação do adulto, pois, ao produzir sua narrativa, o narrador atribui sentidos ao vivido, ao seu processo educativo e ao trabalho que realiza, sendo considerada uma prática de autoformação.

Há diferentes formas de se obter essas narrativas: ou o próprio sujeito escreve sua autobiografia, ou ele concede uma entrevista narrativa (Schütze, 2011) ao pesquisador que realiza a transcrição e/ou textualização. No processo de textualização, o pesquisador retira da entrevista transcrita as marcas da oralidade e procura construir um texto mais coerente, com uma sequência cronológica, evidenciando os momentos formativos vividos pelo professor. Isso porque no ato de narrar, o professor vai lembrando de detalhes, rememorando o vivido, mas com idas e vindas, muitas vezes, de forma desarticulada; cabe ao pesquisador organizar essa história. Por exemplo, o excerto a seguir foi textualizado pela pesquisadora:

> Rosa nasceu no dia 23 de dezembro de 1981. Nasceu, cresceu e continua morando em um sítio na jovem e pequena cidade de T.. Começou a frequentar a escola aos sete anos, mas já sabia ler e escrever, pois sua mãe, mesmo tendo estudado só até a quarta série, lhe ensinava em casa. Ela também adorava desenhar.
> Desde a primeira série do Ensino Fundamental até o terceiro ano do Ensino Médio estudou na Escola Estadual Prof. José Tavares deste mesmo município. E, por sinal, é onde ela leciona hoje, inclusive junto com professores que foram seus professores e até com seus alunos, que já são professores junto com ela, porque cursaram licenciaturas de diversas disciplinas ou ainda as estão cursando. (Nacarato, 2016)

Esse momento de textualização já se constitui uma primeira etapa de análise do material produzido. No entanto, o processo analítico subsequente é bastante trabalhoso e exige cuidados teóricos e metodológicos do professor.

Há pelo menos três modos de produção de narrativas para o campo da pesquisa: as narrativas como fonte de dados, a narrativa como metodologia, e a pesquisa narrativa. Como fonte de dados, o pesquisador pode ter um referencial teórico traçado a priori e as narrativas, em suas diferentes formas, são utilizadas como material empírico a ser analisado e essa análise pode ocorrer por meio de categorias ou eixos temáticos. Como metodologia, todo o processo de produção das narrativas precisa ser planejado como método de pesquisa. Nesse caso, o pesquisador pode lançar mão de autobiografias, da entrevista narrativa ou de memoriais de formação; o processo analítico é construído juntamente com a teoria e pressupõe que o texto final seja no gênero narrativo. A pesquisa narrativa (Clandinin; Connelly, 2011) pressupõe a inserção do pesquisador no grupo investigado e tem como foco a análise de experiências –

tanto dos participantes quanto do pesquisador, cujas histórias de trajetórias se entrecruzam – e o texto final é também do gênero narrativo.

Bolívar, Domingo e Fernández (2001) discutem três modos de uso das narrativas em pesquisas: as narrativas são utilizadas apenas como ilustração das teorias que embasam o trabalho; as narrativas são utilizadas na íntegra, sem um trabalho analítico do pesquisador – modelo que os autores denominam de "hiperempirista"; modo narrativo de análise, em que o pesquisador busca pela reconstrução de sentidos daquilo que foi narrado pelo professor. Entendemos que esse terceiro modo, apesar de mais complexo, é mais interessante, pois a narrativa produzida pelo pesquisador é um entrecruzamento de vozes e sentidos dos autores tomados como referência, dos professores depoentes e do pesquisador. Nesse caso, a narrativa precisa ser considerada como metodologia de investigação – tanto na produção quanto no processo analítico. Uma abordagem que pode contribuir para esse modo narrativo de análise é a teoria fundamentada (Charmaz, 2009; Domingo Segovia, 2014), na qual os focos de análise emergem dos dados e a teoria é construída nessa fase de análise.

Domingo Segovia (2014, p.111) assevera que na pesquisa biográfica-narrativa "deve existir um vínculo com uma fundamentação epistemológica e uma teoria social, em uma relação de complementariedade e interdependência". O elo entre o informante e o pesquisador narrativo deve ser estabelecido de maneira respeitosa, garantindo autoria, profissionalidade. Propõe que o pesquisador tenha conhecimentos e compreensões a respeito do entrevistado, que serão utilizados como guia nas entrevistas, apenas para assegurar que fatos importantes não deixem de ser mencionados. Propõe um *biograma pessoal* do informante, como um instrumento para a entrevista e para a análise (com um cronograma da profissionalização do entrevistado e outro, com o momento social em que se desenvolveu a vida dele).

Os resultados de pesquisas com narrativas autobiográficas, nos grupos os quais coordenamos, têm possibilitado a identificação de práticas de ensino de matemática; reconstituição do ideário pedagógico de diferentes décadas da educação matemática brasileira; a força das culturas escolares na constituição dos professores; os modos de apropriação de discursos pedagógicos, dentre outros.

Narrativas de práticas

ISBN 978-84-945722-3-4

Esse modo de produção de narrativas talvez seja o que tenha maior presença no cenário da educação matemática brasileira. Os professores escrevem sobre suas experiências de sala de aula. Por apresentarem fragmentos de experiências cotidianas de professores, essas narrativas constituem formas de registrar o vivido, possibilitando a construção da memória. No entanto, os professores precisam encontrar um objetivo para essa produção. Daí a importância da formação que ocorre em grupos de estudo ou grupos de trabalho colaborativo, onde essas narrativas são compartilhadas. Isso porque

> a narrativa contribui tanto para o leitor, quanto para o produtor. No ato de escrita da narrativa, a professora não apenas precisa se lembrar dos fatos passados, como também construir um cenário, uma trama na qual a história se passa, suas personagens e suas ações. (Nacarato & Passeggi, 2011: 3).

O aspecto social observado em uma narrativa, geralmente é acompanhado de algo pessoal ou característico de uma época, suas histórias e histórias de suas vidas, como excetos extraídos da narrativa do professor Marcos:

> Desde pequeno me habituei a viver cercado de números. Pai contabilista, mãe professora dos anos iniciais e vice-diretora, sendo uma de suas funções a de fazer a contabilidade da escola. Era comum participar de conversas a respeito de retiradas, saldo, débitos, etc. Atribuo a facilidade e gosto pela matemática por um jogo chamado "escopa de 15" que era comum nas rodas de família. (...) fiquei "bom" no jogo e me sentia sempre desafiado com os problemas apresentados na escola. Lembro-me da professora C, do segundo ano, me chamando na frente para a chamada oral da tabuada, era meu momento de estrelado, caminhava como estivesse levitando, sentindo o olhar dos colegas e esperando o comentário da professora que quase sempre vinha "este é 10". Não fazia conta nos dedos nem colocava as mãos para trás. (...) cheguei a ganhar medalha de ouro na olimpíada ensino fundamental (...). No ensino médio, na ETF de São Paulo, senti dificuldade em todas as disciplinas, inclusive na minha tão adorada Matemática. (...) Na licenciatura em Matemática, fomos orientados a esquecer o bacharelado: era para poucos. (...) Comecei minhas aulas no Estado de SP na cidade T e intercalava com as do cursinho. Foi o pior mês como professor da minha vida. Me sentia totalmente desestimulado a dar aula lá, com a sensação de não ter ensinado nada a ninguém e sem ter aprendido alguma coisa. (...) Com o mestrado profissional virei professor do curso de Licenciatura em Matemática de faculdade particular. Voltei a ter alguma influência no ensino público (...) "essas faculdades que mais fornecem professores para as redes públicas". Meu coração se acalmou e, neste instante, tive a certeza que poderia fazer alguma diferença no ensino. Iniciei 2015 com mais de 50 aulas, três escolas de ensino fundamental e médio, um cursinho e duas faculdades. Nunca almejei trabalhar tanto! Em 2016, aprovado em concurso público, escolhi continuar como professor da Licenciatura no IF. Voltei a ter tempo de preparação de aulas, tenho possibilidade e sou incentivado a montar cursos de extensão para a comunidade, além de ter oportunidade de voltar a participar de um grupo de estudos, buscando novos horizontes (Dados pesquisa de Passos, 2017).

Como apontado por Labov (1982, citado por Galvão, 2008), Marcos retrata sua história vivida com a matemática, ele se reporta a acontecimentos passados e específicos e têm propriedades comuns. Mas nem todas as narrativas possuem tais elementos. Há narrativas habituais, em que os acontecimentos existem repetidamente, não existindo um culminar da ação; narrativas hipotéticas, que relatam acontecimentos que não existiram; narrativas temáticas, que relatam eventos passados, ligados tematicamente entre si. Tais gêneros narrativos possuem estilos e estruturas narrativas diferentes, escolhidos pelos narradores, e por vezes, para atender às expectativas dos ouvintes.

O narrador também precisa pensar em quem será o leitor dessa história, pois todo texto pressupõe um leitor; é um gênero discursivo (Bakhtin, 2003) e como tal precisa exercer seu papel. E mais, no momento da escrita há todo um processo de reflexão sobre a experiência a ser narrada. Esse é o momento em que se atribui sentidos e significados ao que se faz. A narrativa possibilita organizar a experiência. Como afirma Souza (2006:136):

> Enquanto atividade formadora, a narrativa de si e das experiências vividas ao longo da vida caracterizam-se como processo de formação e de conhecimento, porque se ancora nos recursos experienciais engendrados nas marcas acumuladas das experiências construídas e de mudanças identitárias vividas pelos sujeitos em processo de formação e desenvolvimento.

A narrativa produzida pelo professor, não só constitui uma prática de autoformação como também é, por nós entendida, como a pesquisa da prática do professor, pois há a intencionalidade do professor para registrar sua prática, de modo a não perder detalhes do acontecido. No momento do compartilhamento com os pares há trocas de saberes; as opiniões e questionamentos dos colegas contribuem para esse movimento de reflexão e de formação.

Esse registro pode ser fotográfico, audiogravação ou videogravação, a depender das condições do professor em sala de aula. Com esses dados, o professor produz sua narrativa. O excerto ilustra como pode ser esse gênero narrativo:

> A experiência aqui relatada ocorreu em uma sala de 1º Ano do Ensino Fundamental na E.M.E.B. B.C., localizada no município de Itatiba, SP com 24 alunos.
>
> Faz parte da rotina escolar a marcação do tempo por meio de calendário, utilizando-se a contagem em situações diversas: comunicação de quantidades utilizando a linguagem oral, notação numérica e registros convencionais ou não; comparação de escritas numéricas; uso de oralidade para comunicar ideias; leitura de imagem e símbolos diversos (tabelas e gráficos); circulação de ideias, dúvidas e observações.
>
> Este relato apresenta uma atividade em que utilizei como material de apoio o calendário, informações pessoais e o livro didático "Hoje é dia de Matemática".
>
> Existem situações cotidianas em sala de aula que acabam gerando uma situação de investigação. No mês de março de 2013 tivemos cinco aniversariantes. A aluna Stephanny comentou que *"tinha muita criança no mês de Março"*. Lancei uma pergunta à sala que me fez tomar a decisão de trabalho: "O que é aniversário?" (...). (Narrativa da professora I, 1º ano. Acervo do projeto Obeduc/USF, 2014)

Nesse excerto já é possível identificar a riqueza de informações que a professora utiliza para compor a cena de sala de aula, contextualizando como o trabalho foi desenvolvido e como é

ISBN 978-84-945722-3-4

sua prática para ensinar matemática e quando ela identifica que a situação poderá gerar uma investigação – isso significa que o professor seleciona que aula ou conjunto de aulas gostaria de registrar para produzir uma narrativa.

Essa modalidade de narrativa pode ser utilizada como prática de formação docente, pois quando o professor registra sua prática, sistematiza em forma de narrativa e compartilha com os pares, ele reflete sobre o vivido, podendo: ressignificar sua prática, rever suas crenças e concepções e se projetar para novas experiências. Do ponto de vista da pesquisa, esse tipo de fonte de dados possibilita identificar modelos de práticas de ensino de matemática; crenças dos professores sobre o que seja ensinar e aprender matemática; saberes em movimento numa sala de aula; modos de pensamento matemático dos alunos; e avaliação da própria prática pelo professor, com os modos de fazer a intervenção. O excerto a seguir, retirado de uma narrativa na qual a professora, para produzir sua narrativa, audiogravou a aula em que trabalhava com planificação de superfícies poliédricas:

> O próximo passo era abrir a caixinha para explorar as figuras planas que a compõem. Num outro momento propus a seguinte questão: "quando a gente abrir essa caixinha ... que figura vocês acham que vai aparecer com a caixinha aberta?":
> *Miguel: A forma vai ser a mesma. A forma por dentro vai ser a mesma da de fora.*
> *Profª: Mas não é para abrir... e que forma vai estar dentro?*
> *Miguel: Paralelepípedo.*
> *Profª: E o paralelepípedo é formado por qual figura?*
> *Aluno: Triângulo*
> *Miguel: Cubo*
> *Leo: Retângulo.*
> *Profª: Quem tem outra ideia? O que você acha que vai aparecer, Yasmin ?*
> *Yasmin: Uma forma*
> *Profª: Qual forma?*
> *Yasmin: Qualquer uma: retângulo, quadrado*.
> É possível perceber que as crianças estavam presas à ideia da forma externa onde entra a questão da linguagem. Tanto eles quanto eu não estávamos conseguindo expressar o que queríamos dizer, não estávamos nos fazendo entender. Para completar, Heloisa diz, completando o que Yasmin dissera, que "*vai aparecer a mesma forma da parte da frente*". Quando questionei qual, no caso a da forma que havia trazido que era um prisma, completa reforçando:" "*a mesma da parte da frente ... um prisma*".
> Ficou claro que eu não estava sabendo fazer a pergunta correta e eles não conseguiam enxergar além do sólido que estava à sua frente. (Narrativa da professora S, 1º ano. Acervo do projeto Obeduc/USF, 2016)

Nesse excerto constata-se, principalmente, a avaliação que a professora fez sobre a sua prática e as reflexões produzidas.

Compartilhando saberes com o uso de narrativas

Este trabalho insere-se na modalidade Taller do CIBEM e, portanto, pressupõe uma dinâmica interativa para discussão desses modos de produzir e utilizar a narrativa como dispositivo de

ISBN 978-84-945722-3-4

pesquisa e prática de formação. Visando atender ao objetivo proposto para o evento, compartilharemos não apenas reflexões teóricas e metodológicas sobre o tema, mas, também, haverá momentos de práticas de análise de narrativas produzidas por professores em diferentes contextos e em suas diferentes modalidades.

Referências bibliográficas

André, M. (2011). Pesquisas sobre formação de professores: tensões e perspectivas do campo. In: Fontoura, H. A.; Silva, M. (Orgs.). *Formação de professores, culturas*: desafios à Pós-graduação em Educação em suas múltiplas dimensões. E-book online. X Encontro de Pesquisa em Educação da Região Sudeste. Anped Sudeste, Disponível em:

http://www.fe.ufrj.br/anpedinha2011/sobre.html, p.24-36.

Bakhtin, M. (2003). *Estética da criação verbal*. Trad. Paulo Bezerra. 4ª ed. São Paulo:

Martins Fontes.

Bertaux, D. (2010). *Narrativas de vida:* a pesquisa e seus métodos. Natal, UFRN: EDUFRN; São Paulo: Paulus.

Bolívar, A.; Domingo, J.; Fernández, M. (2001). *La investigación biográfico-narrativa en educación:* enfoque y metodología. Madrid: Editorial La Muralla.

Charmaz, K. (2009). *A construção da teoria fundamentada*: guia prático para análise qualitativa.Trad. Joice Elias Costa. Porto Alegre: Artmed.

Clandinin, D. J.; Connelly, F. M. (2011). *Pesquisa narrativa: experiência e história em pesquisa qualitativa*. Uberlândia: UDUFU.

Dominicé, P. (2010). O processo de formação e alguns dos seus componentes relacionais. In: Nóvoa, A.; Finger, M. (Org.). *O método (auto)biográfico e a formação*. Natal: EDUFRN; São Paulo: Paulus, p. 81-95.

Ferrarotti, F. (2010). Sobre a autonomia do método biográfico. In: Nóvoa, A.; Finger, M. (Org.). *O método (auto)biográfico e a formação*. Natal: EDUFRN; São Paulo: Paulus, p. 31-57.

Galvão, C. (2008). *Professor: o início da Prática Profissional*. Não publicado. (Texto para discussão nas jornadas de trabalho em Évora).

Nacarato, A.M.; Passeggi, M. C. (2011). Narrativas da experiência docente em matemática de professoras-alunas em um curso de pedagogia. In: Simpósio Internacional de Estudos de Gêneros Textuais - SIGET, 6, 16 a 19 de agosto de 2011, Natal. *Anais*... Natal, p. 1-14.

Nacarato, A.M. (2016). A condição docente do professor que ensina matemática. *Relatório de pesquisa*. Itatiba, SP: Universidade São Francisco, CNPq.

Domingo Segovia, J. (2014). La teoria fundamentada del profesorado desde un enfoque biográfico-narrativo. Fundamentación, procesos e herramientas. In: Abrahão, M.H. M.B.; Bolivar, A. (Orgs.). *La investigación (auto)biográfica en educación:* miradas cruzadas entre Brasil y España**.** Granada: EUG; Porto Alegre: EDIPUCRS.

ISBN 978-84-945722-3-4

Schütze, F. (2011). Pesquisa biográfica e entrevista narrativa. In: Weller, W.; Pfaff, N. (Org.). *Metodologias da pesquisa qualitativa em educação*: teoria e prática. 2. ed. Petrópolis: Vozes, p. 210-222.

Souza, E.C. (2006). Pesquisa narrativa e escrita (auto)biográfica: interfaces metodológicas e formativas. In: Souza, E.C.; Abrahão, M.H.M.B. (Org.). *Tempos, narrativas e ficções:* a invenção de si. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2006. p.135-147.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-623

APRENDER MATEMÁTICAS JUGANDO

Rita Jiménez Igea
rjimeneztrabajo@gmail.com
IES de Alcalá de Henares. España

Núcleo temático: **Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas**
Modalidad: **Taller (2 horas)** (T) **(para entre 20 y 25 personas)**
Nivel educativo: **Secundaria (principalmente)**
Palabras clave: **juegos, matemáticas, motivación**, **algoritmos**

Resumen
Es frecuente observar en nuestros alumnos dificultades para captar determinados conceptos y falta de motivación. En este taller se presentan actividades que, en formato de juego, pretenden ayudar a comprender, afianzar y/o repasar conceptos y algoritmos del currículo de Matemáticas. El enorme atractivo que los juegos ejercen sobre los niños hace que aumente su predisposición hacia el aprendizaje. Resulta curioso y sorprendente ver cómo idean estrategias para poder averiguar el dinero que les ha tocado y la facilidad que tienen para usarlas posteriormente en los ejercicios de lápiz y papel.
Desde el año 2000 trabajo creando juegos de mesa variados (de tablero, cartas y de ordenador) para el aula. La mayor parte corresponden al currículo de Matemáticas de Secundaria pero hay también para Bachillerato y Primaria. Algunos contenidos tratados son números enteros, fracciones, porcentajes, iniciación al lenguaje algebraico, proporcionalidad, repartos, interés, progresiones, probabilidad, inecuaciones, geometría, trigonometría, números complejos, logaritmos, funciones, sistema métrico decimal, etc
De los puestos en práctica se presentará una selección, algunos de los cuales formaban parte del material que recibió, en 2003, el 1er Premio de Innovación e Investigación Educativa de la Comunidad Autónoma de La Rioja.

Es frecuente entre nosotros, los profesores de Matemáticas, quejarnos, por una parte de la falta de motivación de nuestros alumnos y por otra, de la dificultad intrínseca que, para la mayoría de ellos, tienen algunos conceptos. El objetivo de este taller es presentar una serie de actividades realizadas en clase con alumnos. Se trata de juegos que han ayudado a comprender, afianzar y /o repasar conceptos del currículo de Matemáticas de Secundaria. Es de destacar que este tipo de actividades es bien recibida por cualquier alumno independientemente de sus características. Es innegable que la tendencia natural hacia el juego y las actividades lúdicas hacen que aumente la motivación del alumno y favorece el

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

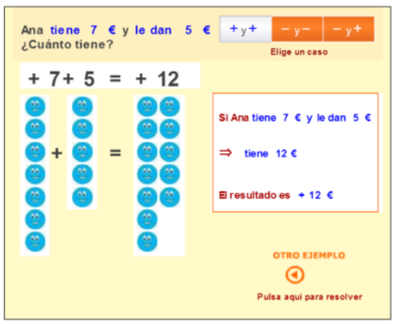
aprendizaje. Resulta curioso observar las estrategias que, de forma natural, van ideando para llegar al resultado final y la facilidad que tienen para usarlas en los ejercicios de lápiz y papel. De los puestos en práctica se presenta una selección de al menos 6 juegos que pasaremos a describir a continuación:

1.- **Juego de los números enteros**

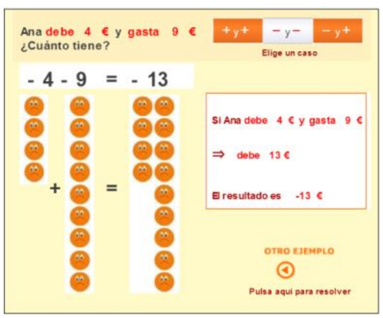
Objetivos: Entender el concepto de número entero

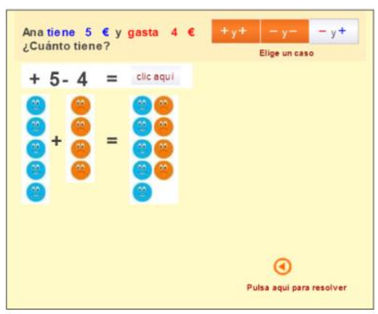
Aprender a realizar las operaciones de suma y resta de números enteros

Regla de los signos. Multiplicación y división de números enteros



En un inicio se usa la versión con cartas grandes que manejara el profesor para comenzar a explicar cómo realizar las operaciones con enteros y también de unas escenas digitales que se proyectan con la ayuda de un retroproyector que permiten visualizarlas. En esa primera fase el profesor interactúa con la clase y va planteando preguntas.





En la versión de cartas pequeñas en la que juegan ellos solos la dinámica es la siguiente:

Se tiene una baraja con cartas de 4 colores (rojas, azules, blancas y amarillas) que tienen escritas unas cantidades. En cada tipo de carta se trata algún concepto de los números enteros. Se distribuyen las cartas y el alumno ha de averiguar cuánto dinero tiene según las cartas que le han tocado. Al principio se trabaja únicamente con las cartas rojas y azules y se reparten sólo 2 cartas hasta que dominan la idea del *deber* y *tener*. Paulatinamente se aumenta el número de cartas de estos colores para complicar las expresiones. En una hoja de papel el

ISBN 978-84-945722-3-4

profesor y/o un alumno va anotando los resultados de cada tirada. Cada 4 ó 5 tiradas se hace un recuento y se proclama un ganador. En una tercera fase se van introduciendo las cartas blancas y finalmente las cartas amarillas. En la etapa final se juega con todos los colores.
Estos juegos se van alternando con ejercicios de papel y lápiz para ir introduciendo la notación progresivamente.

2.- La herencia

LA TÍA DE AMÉRICA
NOS DEJA DE HERENCIA
1200 €

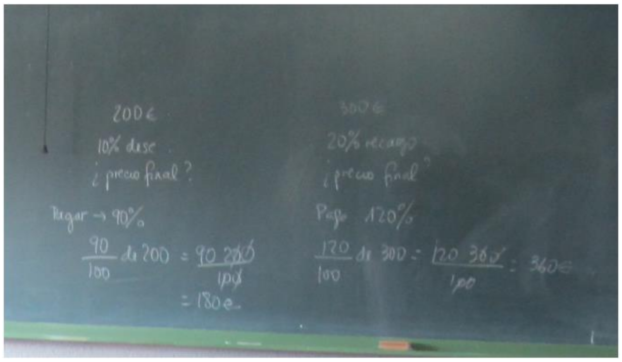
Te corresponde
el 80%
de la herencia

Objetivos : La fracción como operador. Los porcentajes. Operaciones con decimales.

Se divide la clase en grupos de 3 alumnos y se les entrega el material. Es una baraja con dos tipos de cartas. Se muestra la carta grande que contiene una herencia.

Un jugador recibe una parte de la herencia, levanta una carta pequeña y calcula la parte de la herencia que le ha correspondido. Todos deben trabajar para evitar errores o timos. Gana el jugador que consiga más dinero tras un número de rondas prefijadas de antemano y/o cuando se acaben las tarjetas grandes.
Se puede facilitar a los alumnos reproducciones de billetes de euros y que reciban físicamente su herencia en cada jugada. Aumenta la motivación. Para corregir hay dos posibilidades a) Todos calculan y así se comprueban los errores o b) entregar a los alumnos una hoja de cálculo con todas las respuestas posibles y que los jugadores que no reciben la herencia verifiquen que la respuesta dada es correcta.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



3.- Eurotiendas

Objetivos: La fracción como operador

Descuentos y recargos

Operaciones con números decimales

Números enteros

Este es un juego de tablero. Juegan 3 jugadores. Cada uno tiene 4 tiendas. Lanzan el dado por turnos y mueven así sus fichas. Se trata de comprar y vender los artículos del tablero. Además la compra o venta se realiza según unas condiciones de descuento o recargo que están escritas en las "etiquetas" (tarjetas).

El alumno comprador y el vendedor deben cumplimentar unos "albaranes" donde indicarán el precio del artículo, el descuento o rebaja que tiene, las operaciones a realizar y el precio final resultante. El objetivo del juego es vender al máximo y gastar lo menos posible. La partida termina cuando todos han llegado a la meta. Al final de la partida se hace un recuento de las ganancias de cada tienda

y se proclama el vencedor.

Existen distintas versiones según el nivel y si se usan porcentajes simples y/o encadenados.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

4.-Eurotalleres

Objetivos:

- Concepto de proporcionalidad directa
- Algoritmo de la regla de tres directa

En la 1ª versión se trabaja únicamente con números enteros

Es un juego de tablero para 3 jugadores. Las casillas (talleres) están repartidas de forma equitativa en el tablero. Cada jugador lanza el dado y mueve su ficha. Deben ir pagando y cobrando facturas según lleguen al taller de un contrario. Todo ello siguiendo unas tarifas marcadas en el tablero y en función del resultado del dado que obligan a plantear y resolver reglas de tres directa. Esas entradas y salidas deben anotarse.

Al final de la partida (cuando todos han llegado a la meta) se hace un balance. Gana el jugador con más ingresos.

Se presentará además una versión del juego en formato digital para dos jugadores

5.- La lotería

Objetivos:

- Concepto de proporcionalidad inversa
- Algoritmo de la regla de tres inversa

Juego de similares características que el anterior pero que trabaja la proporcionalidad inversa.

6.- He pillado un …

Objetivo: Reconocer elementos y figuras geométricas

Los alumnos se distribuyen en grupos de 3 en 3 y se les da a cada grupo una baraja de cartas. Se coloca el mazo en el centro con las cartas boca abajo. Un jugador levanta una carta y debe decir “He pillado un/una …” y decir lo que la carta contiene. Si acierta gana 10 euros. Si falla debe pagar 10 euros. El siguiente jugador debe hacer lo mismo.

ISBN 978-84-945722-3-4

Si el jugador levanta la carta de una persona resfriada debe decir “He pillado un resfriado y pierdo la mitad del dinero acumulado”. Si levanta la carta de una pulmonía debe decir “He pillado una pulmonía y mi cartera quedará vacía” y pierde todo lo ganado hasta el momento. La partida acaba cuando se hayan levantado todas las cartas. Gana el jugador con más ingresos. Conviene incluir en este juego reproducciones de billetes y que los jugadores reciban físicamente su dinero.

7.- Macro-microprecios

Juego en formato digital para dos jugadores.

En él se trabaja la conversión de nº en notación científica a notación decimal

En función del tiempo disponible se mostrarán más juegos.

Conclusiones

Los juegos cuajan con rapidez y son muy solicitados. Cuando tardan en aparecer son requeridos con insistencia. Les atrae la novedad y se vuelcan en ellos. La motivación y el interés aumentan en el alumnado al aprovechar su inclinación hacia el juego. La actividad deja de ser puramente escolar y se transforma en una actividad lúdica. En la mayoría de ellos el objetivo es ganar dinero y por supuesto quieren ser los vencedores. Por ello se implica más en el proceso porque son SUS compras, SU dinero. Ello hace que estén muy atentos a las explicaciones y reglas del juego. Mientras “juegan” realizaban con esmero y rapidez las operaciones que de otro modo perciben como un fastidio. Además el hecho de que no necesariamente el más aventajado sea el ganador hace que todos se vean con posibilidades y lo intenten.
Aumenta su sentido crítico con respecto a los resultados que obtienen.

En general cuando terminan un problema ni se plantean si el resultado es coherente por muy absurdo que sea (ej: Traje de 120 euros. rebaja: 15% resultado: el descuento a aplicar son 180 euros). Con el juego se siguen equivocando pero se cuestionan la validez del resultado.

ISBN 978-84-945722-3-4

¡¡Esto es imposible!!" "¡No puede ser!" Al tratarse del dinero que deben cobrar o pagar están muy atentos.

Valoran la importancia del orden y la claridad al hacer los ejercicios. En caso contrario no hay quien pueda, en caso de duda, repasar operaciones o hacer balance al finalizar las partidas

Reparan en la importancia de algunas cuestiones matemáticas.

Por ejemplo la coma en los resultados de las operaciones con números decimales. En general cuando en un ejercicio la coma no está en el lugar correcto o directamente no existe no hay forma humana de convencerles de que el resultado es erróneo. Normalmente su perspectiva es pensar que el profesor es un exagerado. "¡Total, si sólo me he dejado la coma! ¡No es para tanto!. La cuestión cambia cuando afecta a su bolsillo. No es lo mismo pagar 1234 euros que 12'34 euros. Esto lo entienden perfectamente y el profesor no tiene que hacer ningún esfuerzo para convencerlos.

Como contrapartida debemos estar dispuestos a que en clase haya más ruido porque al jugar manifiestan sus emociones, que, en ocasiones, son de júbilo y en otras de fastidio.

Rita Jiménez Igea

Referencias bibliográficas

Grupo Azarquiel (1993) *Ideas y actividades para enseñar Álgebra*. Madrid. Editorial Síntesis.

Hernán Siquero, F y Carrillo Quintela, E. (1988). *Recursos en el aula de Matemáticas*. Madrid. Editorial Síntesis.

Alcalá, M (2002)..*Los números enteros en la escuela*. Granada. Proyecto Sur Ediciones

ISBN 978-84-945722-3-4

T-628

EL PROYECTO DESCARTES EN EL AULA

Rita Jiménez Igea
(miembro de la asociación Red Educativa Digital Descartes))
rjimeneztrabajo@gmail.com
IES de Alcalá de Henares. España

Núcleo temático: **Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas**
Modalidad: **Taller (2 horas) (** T)
Nivel educativo: **Todos**
Palabras clave: **TICs , aprendizaje activo**, **matemáticas interactivas**

Resumen
El proyecto Descartes se inició en junio de 1998. Es un proyecto educativo de profesorado, que trabaja para el profesorado y para la comunidad educativa de la aldea global
Las líneas de trabajo se centran en:

- *Desarrollo de recursos educativos digitales interactivos que promuevan un aprendizaje activo y permitan una enseñanza motivadora*
- *Promover la innovación en el aula usando los recursos digitales creados con la herramienta Descartes*

El objetivo del taller dar a conocer el portal de Red Educativa Digital Descartes (RED Descartes) a los profesores de Matemáticas. ***Contiene recursos educativos para tablets, smartphones y ordenadores de Matemáticas para Infantil, Primaria, Secundaria, Bachillerato y Universidad, que pueden usarse libremente, y se encuentran disponibles en*** *ProyectoDescartes.org, y REDDescartes.org y DescartesJS.org.*
Se presentarán los subproyectos del Proyecto Descartes y se hará un recorrido por distintas unidades didácticas digitales y objetos interactivos. Los asistentes interactuarán con las escenas entrando en esas unidades de modo dirigido y de forma libre. Se explicará, de manera práctica, distintas formas de llevar al aula estos materiales en función de las posibilidades tecnológicas de cada centro.
Se harán ejercicios para mostrar que es posible crear nuevos materiales usando los ya existentes.

Material necesario para el taller:

- *Un PC conectado a un cañón a disposición del profesor en un aula con ordenadores para uso de los asistentes.*
- *Todos los PCs deben tener conexión a Internet.*

En 2013 se crea RED EDUCATIVA DIGITAL DESCARTES una asociación no gubernamental sin ánimo de lucro que tiene como fin promover la renovación y cambio metodológico en los procesos de aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas, y también en otras áreas de conocimiento, utilizando los recursos digitales interactivos generados en el Proyecto Descartes.

Se accede a la web desde el enlace http://proyectodescartes.org/descartescms/

Donde podemos encontrar recursos para Matemáticas y otras asignaturas. En el **BLOG** se publican experiencias, escenas, videos etc

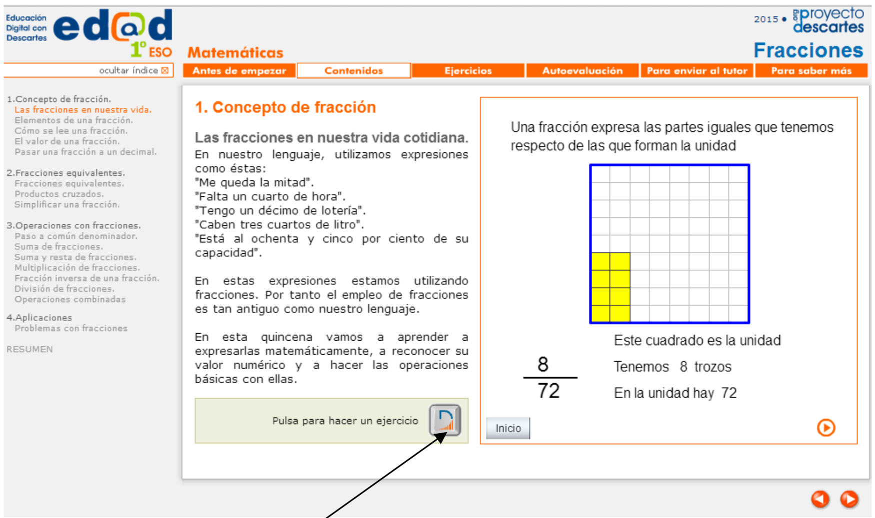
Desde el enlace http://proyectodescartes.org/indexweb.php accedemos a los subproyectos desarrollados por la Red Descartes o bien desde la página principal de la web seleccionando la sección subproyectos .

En esta sección se incluyen todos los materiales adaptados y desarrollados por DescartesJS que pueden usarse en ordenadores, tabletas y smartphones independientemente del sistema operativo que porten. Nuestra tarea como asociación se centra en esta sección.

A continuación presentaremos los subproyectos, algunos son unidades completas como los siguientes:

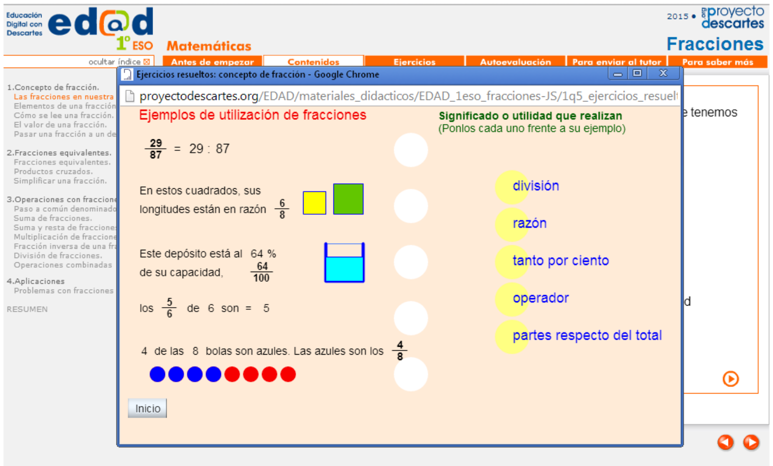
VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Las unidades EDAD abarcan **todo** el currículo de Matemáticas de ESO (LOE Y LOMCE) y se pueden usar en 5 idiomas. El formato de una unidad de EDAD, en la que se mezclan las explicaciones teóricas con escenas interactivas, es la siguiente



Pulsando en el botón obtenemos una ventana emergente para realizar ejercicios

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

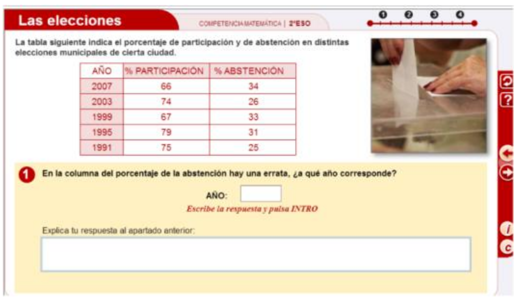


Los subproyectos CANALS (Matemáticas para infantil y Primaria) , PIZARRA INTERACTIVA (Matemáticas y Lengua del Tercer Ciclo de Primaria), APRENDE.MX Y TELESECUNDARIA trabajan contenidos y conceptos de Matemáticas Infantil y Primaria aunque algunos también tratan Lengua y Física y Qumica

Escena del PROYECTO CANALS Escena del P. PIZARRA DIGITAL

Escena del proyecto APRENDE.MX (masa y unidades de masa)

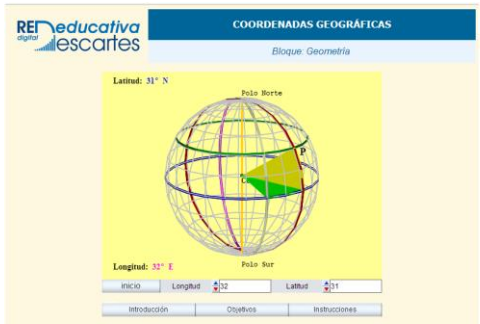
También encontramos los PROYECTO COMPETENCIAS (formación y evaluación en Primaria y Secundaria. Dinamización unidades PISA y pruebas de diagnóstico) y PROYECTO ASIPISA (Dinamización de las unidades PISA)



Escena del proyecto COMPETENCIAS Escena de ASIPISA

Las unidades para Bachillerato y Universidad se encuentran en los subproyectos PROYECTO INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA, PROYECTO UN-100 (Matemáticas y Física y Química), ICartesiLibri (libro interactivo) y PROBLEMAS (Física y Química)

En el subproyecto MISCELÁNEAS encontramos escenas que trabajan algún concepto de Matemáticas de Secundaria, Bachillerato y Universidad



En este SUBPROYECTO se crean escenas que permiten trabajar contenidos de cualquier asignatura en formato de juego.

En la web también tenemos otros proyectos y materiales de francés, inglés de Secundaria, de Geografía de Primaria y Secundaria

DESCARGA DE MATERIALES

http://proyectodescartes.org/descartescms/descargas
Están organizados por subproyectos y podemos guardarlos en DVDs

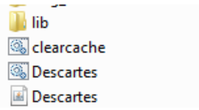
Cambios en las escenas

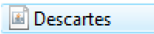
Una de las peculiaridades de Descartes es que los materiales que están colgados en la web pueden modificarse, con lo cual un profesor partiendo de una escena ya hecha puede crear otra.

Para llevar a cabo cambios en las escenas es necesario usar el **editor de escenas** que podemos descargarnos en el enlace:

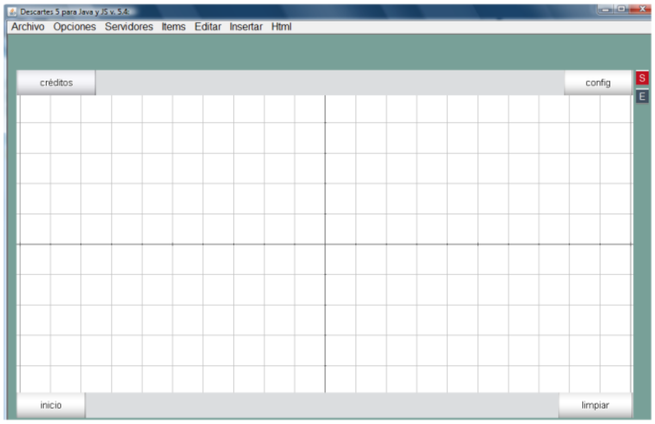
http://proyectodescartes.org/descartescms/descartesjs/item/2811-editor-en-javascript

ISBN 978-84-945722-3-4

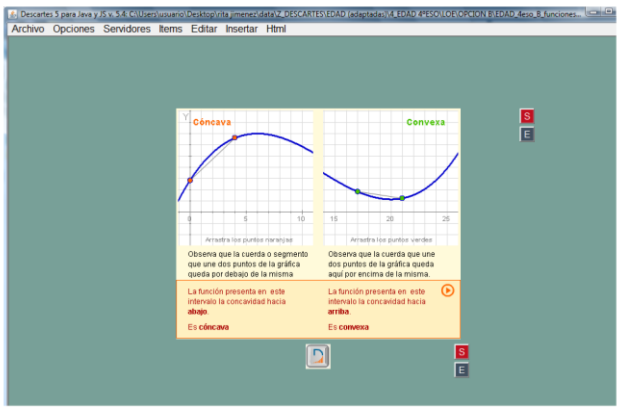
Una vez instalado obtendremos la siguiente estructura de ficheros 

Debemos abrir el archivo 

y aparecerá la siguiente pantalla:

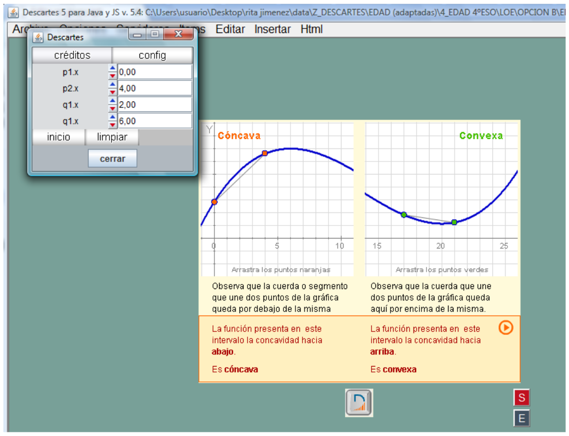


Desde la opción **Archivo Abrir** abrimos la página donde se encuentra la escena que queramos modificar. En este ejemplo queremos invertir las palabras convexo y cóncavo

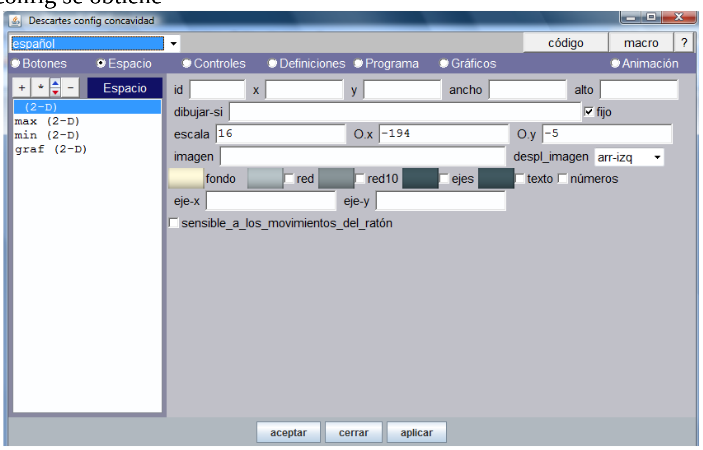


ISBN 978-84-945722-3-4

Con botón derecho del ratón obtendremos lo siguiente:

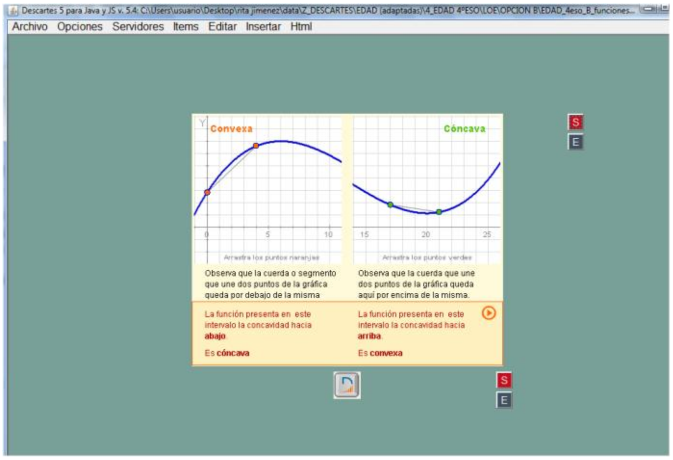


Pulsando config se obtiene

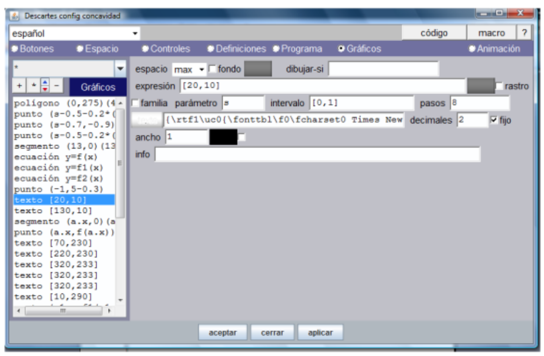


y haciendo las modificaciones adecuadas se obtiene la siguiente escena

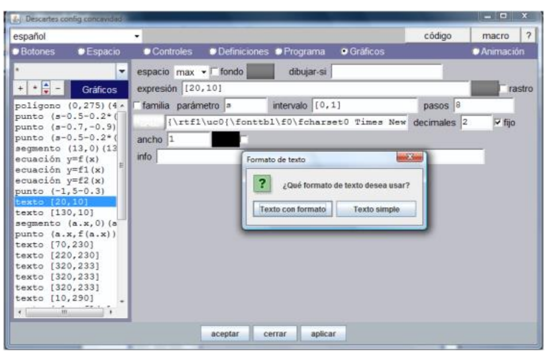
ISBN 978-84-945722-3-4



Para ello pulsamos gráfico y se obtiene

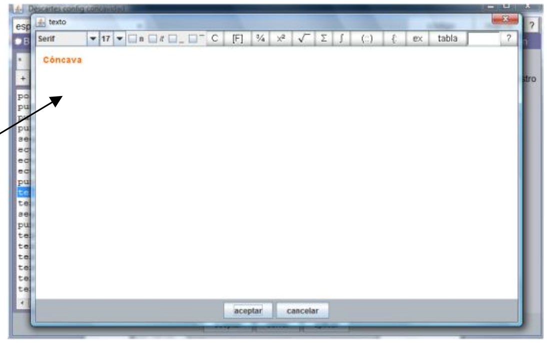


En la sección texto [20,10] pulsamos **en texto**



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

y en **texto con formato** se obtiene

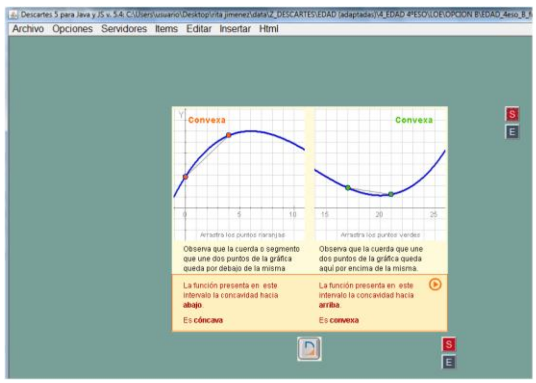


Cambiamos cóncava por convexo .

Pulsamos aplicar, aceptar y obtendremos

procedemos análogamente en la sección texto [130,10] y cambiaremos convexa por cóncava.

Finalmente en Archivo Guardar guardaremos los cambios y se obtiene



Bibliografía.

Información extraída de la página web

Portal de Red Educativa Digital Descartes (RED Descartes) http://proyectodescartes.org/descartescms/ Consultado el 23/04/2017.

Página de subproyectos . http://proyectodescartes.org/indexweb.php. Consultado el 23/04/2017

Página de descargas http://proyectodescartes.org/descartescms/descargas Consultado el 23/04/2017

Editor de escenas http://proyectodescartes.org/descartescms/descartesjs/item/2811-editor-en-javascript Consultado el 23/04/2017

ISBN 978-84-945722-3-4

T-682

RESIGNIFICACIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN LINEAL A TRAVÉS DEL USO DE GEOGEBRA Y LAS TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS LINEALES

Alberto Sánchez Fernández

bogoaltur@gmail.com

Universidad Distrital Francisco José de Caldas – Colombia

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Modalidad: Taller

Nivel educativo: Formación y actualización docente

Palabras clave: Transformación, matriz, función lineal

Resumen

Las transformaciones lineales son aquellas funciones que respetan la suma vectorial y el producto por escalar. A cada transformación se asocia una matriz donde es posible visualizar elementos para el trabajo y abordaje de la función lineal en matemáticas y su enseñanza en el aula. Se parte desde reconocer las diferentes transformaciones geométricas lineales que se pueden representar en el plano cartesiano con ayuda de una matriz, aplicadas a diferentes objetos geométricos. Sera un momento de interacción, retroalimentación e interlocución entre los ponentes y los asistentes con amplia participación de los mismos. Las reflexiones del taller giran en torno en reconocer la representación y visualización de las transformaciones geométricas lineales a través de Geogebra que permite conocer y descubrir los efectos que genera la matriz a diferentes objetos y figuras geométricas, así como identificar qué se preserva, muta o cambia de los objetos a los que se le ha aplicado la matriz. Finalmente se desea generar un concepto diferente en la manera que se representa una función lineal, que no necesariamente se expresa como una línea recta, que pasa por el origen.

Transformaciones lineales

Una función $T: R^n \rightarrow R^m$ es una transformación lineal si se cumple:

a) Para todo $X, Y \in R^n$, $f(X+Y) = f(X) + f(Y)$;

b) Para todo $X \in R^n y\ \alpha \epsilon R, f(\alpha X) = \alpha f(X)$.

ISBN 978-84-945722-3-4

La notación $T: R^n \to R^m$ indica que el dominio de T es R^n y el codominio es R^m. Para cualquier elemento x que $\in a\ R^n$, el vector $T(x)\ en\ R^m$ es la imagen de x bajo la acción de T. El conjunto de todas las imágenes T(x) es el rango de T.

MATRIZ ASOCIADA A UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Sea $T: R^n \to R^m$ una transformación lineal. Existe una única matriz A tal que

$T(X) = Ax$ para toda x en R^n

Para la transformación T, la matriz A será:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ . \ . \ . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ . \ . \ . & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} . \ . \ . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Que tiene m filas y n columnas, Siendo $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ se puede escribir como vector columna y se denota:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Entonces se define el producto de la matriz A por la columna X como el valor de $T(x)$, colocado como columna. Ecuación que se escribe:

$$T(X) = AX$$

Esta asociación (a cada transformación lineal de una matriz) es biunívoca pues recíprocamente, si A es una matriz de orden $m\ x\ n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ . \ . \ . & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{22} \ . \ . \ . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Entonces A define una transformación lineal T_A así:

$$T_A: R^n \to R^m$$

Definida por:

$$T_A(X) = AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \dots + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + \dots + & a_{2n}x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

La matriz A_{mxn} denota la familia la familia de todas las matrices de orden $m\ x\ n$ con componentes reales.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Esta asociación como lo dice Isaacs y Sabogal (2009) da una interpretación al problema de hallar todas las soluciones a un sistema de ecuaciones lineales, en donde resolver un sistema de ecuaciones lineales de m ecuaciones con n incógnitas es encontrar todos los $X \in R^n$ tales que:

$$T(X) = B$$

Donde $T: R^n \to R^m$ es una transformación lineal cuya matriz es la matriz del sistema y B es un vector columna de R^m formado por los términos constantes de las ecuaciones. En términos de matrices, si A es la matriz de T, resolver el sistema es resolver la ecuación matricial:

$$AX = B$$

Para el caso particular de transformaciones en el plano en si mismo, es útil e interesante, interpretar el efecto geométrico de la transformación, es decir, describir que les hace la transformación a determinados objetos en el plano.

Ejemplo de uso del software Geogebra

La intención del taller es reconocer las diferentes transformaciones geométricas lineales que se pueden representar en el plano cartesiano con una matriz, con el uso y ayuda de geogebra se puede visualizar representar de una manera diferente, al aplicar distintas matrices a diferentes objetos geométricos, figuras, polígonos y construcciones.

Veamos un ejemplo de una transformación geométrica lineal

1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

$ax + by = y$

$cx + dy = x$

Los valores para las que estas dos ecuaciones sean ciertas son

$(0)x + (1)y = y$

$(1)x + (0)y = x$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora para ingresar esta matriz en el software Geogebra. Primero, se inserta en la bandeja de entrada entre doble paréntesis y separado por una coma los valores de la matriz, como se ve en la ilustración 1.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

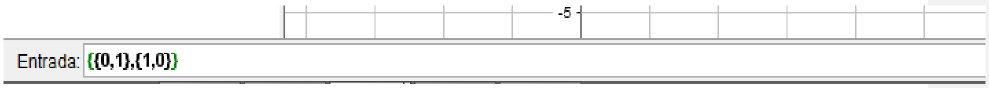


Ilustración 8

Luego se oprime enter, y la matriz se presenta en la parte superior izquierda en vista algebraica.

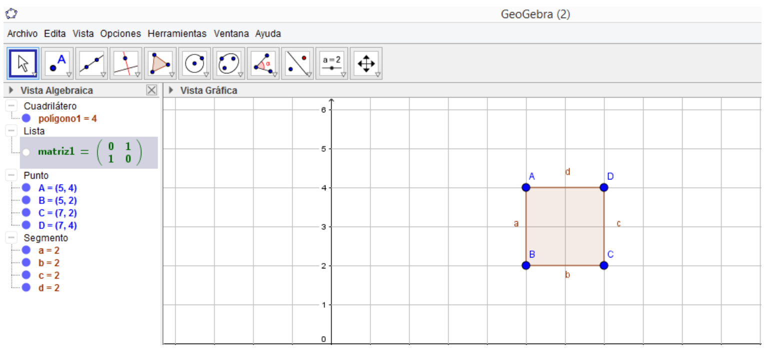


Ilustración 9

Ahora para aplicar la matriz a un objeto, en este caso un cuadrado, se escribe en la bandeja de entrada aplica matriz, en donde se escribe la matriz y el objeto al que se desea aplicar (ilustración 3)

Ilustración 10

Para distinguir el objeto al que se aplica la matriz, se debe escribir entre paréntesis y separados por una coma los puntos que conforman el polígono.

Ilustración 11

ISBN 978-84-945722-3-4

Generando el polígono 2 establecido como la aplicación de la matriz 1 al polígono {A, B, C, D} como se aprecia en la ilustración 4.

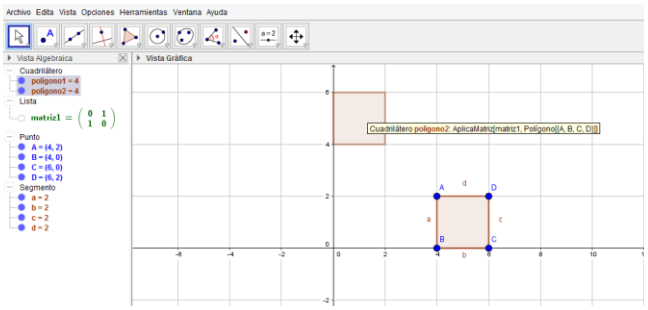


Ilustración 12

Los dos cuadrados son congruentes. Preservan el área y la forma. Al mover y desplazar con el mouse el polígono 1, es decir el primer cuadrado, se mueve y desplaza el polígono 2 (ilustración 5)

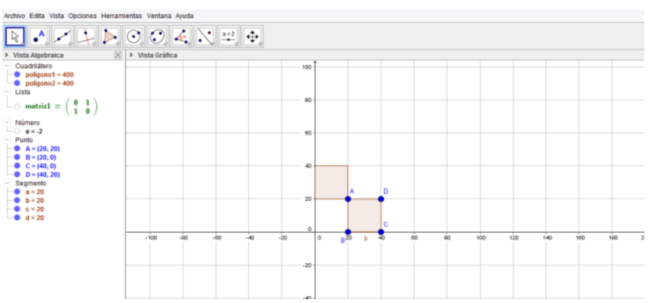


Ilustración 13

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Ahora al acercar el polígono 1 al origen, el polígono 2 también se acercará al origen sobreponiéndose uno al otro, como se muestra en la ilustración 7 y 8.

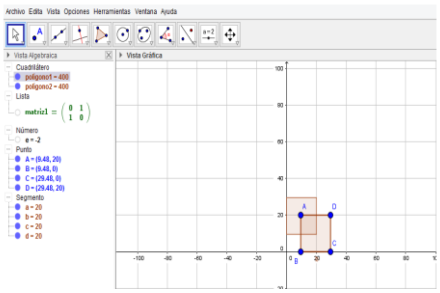


Ilustración 15

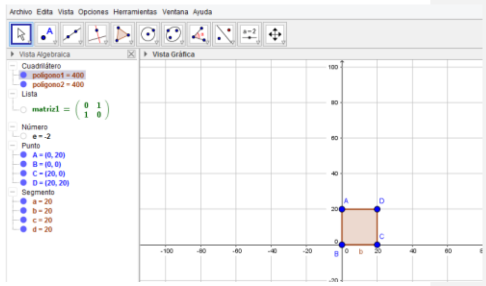


Ilustración 14

La transformación genera una reflexión sobre la recta $y = x$

$T(x, y) = (y, x)$

$T(0,6) = (6,0)$

$T(6,0) = (0,6)$

$T(6 + 0) = T(6) + T(0)$

ACTIVIDADES PROPUESTAS PARA EL TALLER

1) Determina la matriz asociada a cada transformación, y aplica esa matriz a un polígono. Identifica el efecto geométrico que genera.

$a)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}$

$b)\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}$

c)$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix}$

$d)\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ y + z \end{pmatrix}$

2) Determina la matriz $\begin{pmatrix} k & r \\ r & k \end{pmatrix}$ en donde k y r sean dos deslizadores que estén en el intervalo intervalo $[-3,3]$. Aplica la matriz a un polígono y activa el rastro de tal manera que se pueda

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

visualizar lo que pasa al mover los dos deslizadores y el polígono. ¿Qué sucede cuando k y r tienen el mismo valor o su reciproco?, ¿Qué sucede cuando $k = 0\ y\ r \neq 0$?

3) Qué efecto geométrico producen las matrices de la forma $\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q \\ q & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ cuando:

a) $q < -1$ b) $q = -1$ c) $-1 < q < 0$ d) $0 < k < 1$	e) $q = 0$ f) $q = 1$ g) $q > 1$

4) Sea $f: R^3 \rightarrow R^3$ la transformación dada por la matriz A. Describa la transformación f en términos geométricos:

a) A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) A=$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) A= $\begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sen\theta \\ 0 & sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$

5) ¿Qué otros objetos matemáticos, surgen con este trabajo? ¿Qué procesos matemáticos se desarrollan con este tipo de actividad?

ISBN 978-84-945722-3-4

Bibliografía

Hoffman, K. y R. Kunze (1971).*Álgebra Lineal.* Pretince Hall.

Lay, D (2012) Álgebra lineal y sus aplicaciones. Pearson., 4ª. Ed.,

Isaacs, R y Sabogal,S (2009). Aproximación al algebra lineal: un enfoque geométrico. Edición UIS.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-686

APRENDIENDO MATEMÁTICAS DE MANERA "TECNOCOOPERATIVA"

Mª Luisa Cuadrado Sáez
luisa.cuadrado7@gmail.com
Complejo Preuniversitario Mas Camarena. España

Modalidad: T
Nivel educativo: Secundaria.
Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática.
Palabras clave: Aprendizaje cooperativo, Resolución de problemas, Mobile Learning, Aula "tecnocooperativa".

Resumo
Dentro de las metodologías activas de aprendizaje en el aula, el trabajo cooperativo en matemáticas adquiere una dimensión singular. Esta metodología permite al alumnado desarrollar el espíritu crítico a la hora de utilizar estrategias personales de resolución de problemas y lleva a otro nivel la comunicación de contenidos matemáticos, además de fomentar el aprendizaje entre iguales y la interdependencia positiva. La unión de la tecnología (mobile learning) y las diferentes técnicas cooperativas crean un ambiente de trabajo favorable y actual en el aula.
Durante el taller, el profesorado asistente podrá experimentar en primera persona diferentes estructuras cooperativas, algunas de ellas integradas en el aula tradicional (Spencer Kagan) y otras más complejas (Eliott Aronson), con la finalidad de conocer qué es un aula "tecnocooperativa" y obtener una perspectiva del cambio que se puede producir en su propia aula.

La realidad en las aulas del siglo XXI es que encontramos alumnos tecnológicamente equipados, pero con grandes carencias en el uso efectivo de dichas tecnologías, incapaces de analizar e interpretar datos, cotejar y evaluar, además de tener grandes dificultades en transmitir información de carácter científico.

Para intentar adquirir esa competencia digital hemos de crear en el aula un ambiente de cooperación mutua, de aprendizaje entre iguales y de comunicación, permitiendo al alumnado sentirse cómodo y libre en el uso de las diferentes tecnologías que tiene a su alcance. Es por ello que la mejor metodología de trabajo es el aprendizaje cooperativo ya que "se aprende a aceptar otros puntos de vista distintos al propio, en particular a la hora de utilizar estrategias personales de resolución de problemas, comparando los posibles resultados" (LOMCE 2013).

ISBN 978-84-945722-3-4

Según la definición de Johnson & Johnson (1991), "el Aprendizaje Cooperativo consiste en el uso instructivo de grupos pequeños para que los estudiantes trabajen juntos y aprovechen al máximo el aprendizaje propio y el que se produce en la interrelación. Para lograr esta meta, se requiere planeación, habilidades y conocimiento de los efectos de la dinámica de grupo".
Con todo esto podríamos definir un aula "tecnocooperativa" como un aula abierta en la que los alumno sentados en grupo de cuatro trabajan de manera estructurada. En esta clase la tecnología no es protagonista exclusiva, sino que se usa como herramienta. Los diferentes dispositivos móviles (tabletas, ordenadores, teléfonos inteligentes…) están presentes y se echa mano de ellos cuando los alumnos consideran. El profesor como facilitador, que conduce el aprendizaje, propone tanto las tareas que deben realizar, como la estructura de trabajo que deben seguir para realizarla, indicando, en cada momento, el rol que debe adoptar cada alumno/a.

Para poder asimilar este concepto de aula "tecnocooperativa" durante el taller el profesorado experimentará diferentes estructuras de trabajo cooperativo aplicadas a contenidos matemáticos. Además de explicar de la explicación de cada estructura se reflexionará sobre cómo implementarla en el aula, qué recursos tecnológicos se podrán utilizar y se explicará un ejemplo concreto en el que se ha aplicado dicha técnica.

TÉCNICAS COOPERATIVAS

1.- ESTRUCTURA PUZZLE O JIWSAW.

Fue desarrollada en 1970 por Dr. Eliott Aronson en la Universidad de California, y aunque es una de las estructuras por excelencia del aprendizaje cooperativo también es de las más complejas. La idea central consiste en dividir al grupo en equipos y a cada uno de los componentes del equipo se le asigna una labor haciéndole responsable de una parte diferente de tarea a realizar, de manera que la realización de la totalidad del trabajo estará condicionada por la mutua cooperación y responsabilidad.

La estructura tiene las siguientes fases:

FASE PREVIA: a) Preparación. Composición de los grupos puzle. La cantidad de grupos de expertos dependerá de la manera de partir la unidad (bloques temáticos). Para la selección de los componentes de cada grupo se puede usar un criterio académico, conductual o al azar, pero se debe conocer al alumnado para que la técnica sea efectiva.

b) Constitución de los grupos puzle y explicación del trabajo. Se indica a cada alumno a que grupo pertenece para que tome contacto con ellos. Se les puede reunir para copiar el nombre de la unidad, o el nombre del grupo y leer la explicación de cada parte y la rúbrica correspondiente. Después se les reparte o comparte las hojas del material (el mismo en cada grupo) seccionado, de modo que cada parte llevaba el nombre de cada experto. Así los alumnos observan que tienen roles diferentes y se establece la dependencia entre ellos.

PRIMERA FASE: Reunión de expertos.

Se deshace el grupo puzle y se reúnen por expertos. Se establecen dos fases: el trabajo individual y la elaboración del material conjunto. Se debe hacer hincapié en el que deben elaborar todos el mismo material y estar de acuerdo en la información, además de preguntar dudas que surjan.

Explicación

Es este el momento en que los alumnos usan sus medios tecnológicos para elaborar el material con el que explicarán a sus compañeros, para enriquecer el material que se le ha proporcionado con presentaciones, videos, software de apoyo visual como Geogebra, incluso recomendar alguna app o elaborar alguna evaluación que sirva para repasar el contenido.

SEGUNDA FASE: Reunión de equipos puzle.

Se deshacen los grupos de expertos y se vuelve a los grupos puzle. Cada alumno debe explicar su parte y escuchar al resto de compañeros.

Fase Puzle :Elaborando material

TERCERA FASE: Evaluación. a) Producto final o examen.

En esta fase se pueden elegir o laboran un mural con toda la información, hacer un torneo de pruebas cruzadas o hacer un examen de la manera habitual. Es importante que el alumnado sepa que va a ser evaluado de una parte de la que él/ella no es experto, y que es responsable de que sus compañeros entiendan la parte que le toca explicar.

b) Autoevaluación. Es necesario que los alumnos evalúen la dinámica para saber si ha sido satisfactoria, para ello se les puede pasar un test de autoevaluación.

ISBN 978-84-945722-3-4

Las ventajas de esta estructura de trabajo es que, además de fomentar el aprendizaje entre iguales, los alumnos pueden elegir libremente la tecnología que pueden utilizar para crear su propio material creando así una propia reflexión de cómo explicar y habituándose a hacer un uso adecuado de la tecnología.

Algunas de las apps que podemos usar para desarrollar esta técnica son Doceri (realizar videos), Presentaciones de Google, Keynote, PowerPoint, (presentaciones), Geogebra.

2.- ESTRUCTURA FLIPPED.

De acuerdo con Tourón & Santiago & Diez (2014), "la clase al revés modifica el modelo de enseñanza tradicional, distribuyendo contenidos de aprendizaje online fuera del aula y trayendo los deberes al aula" (p. 468).

Esta técnica es ya extendida en muchas de las aulas y en especial en nuestra asignatura, matemáticas, ya que permite a los docentes grabar videos explicativos de ejercicios procedimentales, para que los alumnos los puedan ver en casa y en clase realicen ejercicios.

Flipped Classroom

Pero esta técnica sin el enriquecimiento de una estructura cooperativa se convierte en un tipo de aprendizaje individualista, es por eso que creé esta técnica llamada "el flippao" en el que por turnos, cada miembro del equipo es el responsable del aprendizaje de sus compañeros. Podríamos resumir la técnica en estos pasos:

a) Se manda un video a los alumnos/as para ver en casa.

b) Ya en clase, se elige a un alumno el responsable del aprendizaje. En la pizarra se pone otro ejercicio similar al del video, que el responsable realiza en su libreta a modo de explicación, sin que ningún compañero haga más que escuchar. El "flippao" es responsable de que todos hayan comprendido ese procedimiento.

c) Después, el profesor/a manda una colección de ejercicios sobre ese procedimiento que van realizando en orden en clase (hacen uno y esperan a que todos lo tengan y lo corrigen). Si algún miembro del equipo tiene dudas, es el "flippao" el que transmite las dudas al profesor. Durante todo el proceso los alumnos son evaluados mediante una rúbrica, tanto individual como grupalmente.

ISBN 978-84-945722-3-4

Las ventajas de esta estructura de trabajo son, que fomenta la interdependencia positiva entre los alumnos, la responsabilidad individual y se realiza una mejor asimilación de los contenidos, aparte de que el hecho de poder tener un soporte visual beneficia a que el contenido pueda ser más claro.

Alguna de las apps y programas que podemos utilizar para realizar esta técnica son Doceri (creación de videos), Educanon y Edpuzzle (alojamiento de videos), Grabadora de SMART (grabar escritorio), aunque es en este caso el docente el que las usa para crear los videos.

3.-ESTRUCTURA RUEDA LA LIBRETA.

Se trata de una estructura simple en la que el profesor plantea una pregunta cuya solución pase por un algoritmo. Así cada miembro de equipo realizará un paso y pasará la libreta a su compañero hasta acabar la pregunta.

Los pasos que debe seguir serán los siguientes:

a) Se plantean 4 problemas que siga un procedimiento para solucionarlo.

b) Se da tiempo para realizar un paso de ese procedimiento.

c) Se pasa la libreta. A cada uno de los alumnos/as que le llega la libreta revisa el paso anterior y realiza un paso nuevo.

d) Se sigue hasta que se acabe el problema.

Esta estructura se adapta a cualquier tipo de ejercicio que tenga al menos 2 pasos, y es fácilmente aplicable en el aula

Como versión de esta estructura, realicé un proyecto llamado la “fiesta de las funciones”. En este proyecto cada alumno era el representante de una función elemental y en la que en vez de rodar la libreta, cada alumno rodaba con el resto de alumnos de la clase para presentar su función. Como objetivo de estas citas las diferentes parejas que se formaban debían construir una función definida a trozos usando las funciones que representaban que fuera continua.

Rueda la libreta: La fiesta de las funciones

ISBN 978-84-945722-3-4

Las ventajas de esta estructura son que fomenta el espíritu crítico de los alumnos al corregir a sus compañeros, que trabajan la toma de decisiones y son capaces de comparar resultados. Si bien, en general no se necesita ningún medio tecnológico para realizar dicha estructura para el proyecto de la fiesta de las funciones los alumnos usaron Geogebra.

4.- ESTRUCTURA CABEZAS NUMERADAS.

Estructura fácilmente integrable en el aula creada por Steven Kagan (1994). Sirve para realizar ejercicios o problemas que requieran de un desarrollo.

Cabezas numeradas: Guess Who?

Los pasos que se deben seguir son los siguientes:

a) Se plantea un problema y da tiempo para pensar.

b) Trabajando individualmente, los alumnos escriben sus respuestas. Pueden (y deben) usar cualquier ayuda que consideren adecuada, ya sea búsquedas en Internet, software de representación, calculadoras ...

c) Los alumnos, por orden, van compartiendo sus respuestas sin que nadie comente.

d) Cuando todos acaban llegan a un consenso de la contestación.

e) El profesor elige un alumno de cada uno de los equipos y comparten la solución con la clase.

Un ejemplo en el aula sobre esta técnica es la creación de un tablero del juego quien es quien, con las propias caras de los alumnos y utilizando el software de la pizarra digital SMART, Notebook 16. Los alumnos por equipos y siguiendo esta estructura debía determinar el número mínimo de preguntas que se debían realizar para poder descubrir el personaje.

Las ventajas de esta estructura es que fomenta que los alumnos puedan usar cualquier tipo de tecnología para la resolución de las cuestiones planteadas, fomentando la iniciativa y autonomía personal además trabaja la capacidad del alumnado de aceptar las ideas de los demás y defender las propias, siendo lo más importante de la estructura llegar a un consenso. Las apps que normalmente usan los alumnos en esta estructura son diferentes hojas de cálculo, Geómetra, Wolfram Alpha y

ISBN 978-84-945722-3-4

muchas de las calculadoras disponibles en diferentes dispositivos móviles.

5.- PROYECTOS “TECNOCOOPERATIVOS”.

Dentro de la asignatura de matemáticas no debemos olvidar la realización de proyectos que hagan que los alumnos/as puedan observar la realidad de su entorno con ojos matemáticos. ¿Cuánto mide?,¿cuántos caben? son preguntas que habitualmente sirven para comenzar un proyecto que nos pueda permitir relacionar conceptos de nuestra asignatura con el entorno real. Y aunque la manera habitual de trabajo de estos proyectos es por equipos, si la asignación de las tareas no está clara, es decir, si no se establece una estructura cooperativa de trabajo, la carga de trabajo caerá sobre los alumnos/as más responsable.

Para explicar la estructura de trabajo de un proyecto “tecnocooperativo” veamos un caso concreto de proyecto en el aula. En este proyecto los alumnos de 4º ESO debían medir la altura del edifico donde se dan las clases de dos maneras diferentes. Las fases del proyecto fueron:

FASE 1: En el aula

a) Planteamiento del proyecto: A los alumnos se les mostró un video motivador donde se exponían los objetivos. Se les enseñó la rúbrica de evaluación indicando que el producto final debe ser una presentación donde expliquen las mediciones que han hecho, y cuál de las dos es la más correcta y por qué.

b) Herramientas: Se les proporcionó metros, espejos, clinómetros y se les enseñó cómo usarlos. Además se les mostraron apps de medición como Handy tools, Easy Mesure.

c) Cada equipo (de 4 personas) desde el aula y usando Google Maps, debía idear dos estrategias para medir, indicando dónde y cómo se realizarán las mediciones. En ese momento se debían determinar los roles de cada miembro del equipo, dichos roles determinados por el profesor/a (2 encargados de medir, encargado de anotar y calcular, encargado de documentar el proceso). Debían realizar un esquema previo de la estrategia a seguir.

FASE 2: En el exterior.

ISBN 978-84-945722-3-4

Los alumnos debían realizar las mediciones y cálculos que necesarios. A veces fue preciso reconducir su estrategia, además de investigar si existen otras herramientas, tecnológicas o no que puedan usar.

FASE 3: En el aula

Elaboraron un informe con las conclusiones extraídas y las compartieron con el gran grupo, repartiendo la exposición en partes iguales.

Las ventajas que proporciona estructurar el trabajo por proyectos de manera cooperativa, además de la que son intrínsecas del mismo contenido del proyecto, son que los alumnos más responsables no se sobrecargan de trabajo y todos aprenden lo que en un futuro será el trabajo en un entorno laboral, donde cada uno es responsable de su tarea pero deben llegar a un fin común.

Las apps que se pueden usar en las diferentes mediciones son Handy tools, Easy Mesure, Google Maps.

Después de la experimentación y explicación de todas las estructuras y como conclusión del taller, se pretende que el profesorado asistente realice una reflexión sobre qué cambios o qué estructuras podrían ser viables a la realdad de su aula. La intención es que se haga una propuesta de cambio aunque, sea mínimo, en la actividad docente de los asistentes al taller.

Referencias bibliográficas

Ley orgánica para la mejora de la calidad educativa (LOMCE) (Ley Orgánica 8/2013, 9 de diciembre). Boletín Oficial del Estado, nº 295, 2013, 10 diciembre.

Aronson, E. & Patnoe, S. (2011). *Cooperation in the Classroom: The Jigsaw Method.* (3rd Ed) . Beverly Hills, CA: Sage Publishing Company.

Aronson, E. & Blaney, N. & Stephin, C. & Sikes, J. & Snapp, M. (1978). *The Jigsaw Classroom*. Beverly Hills, CA: Sage Publishing Company.

García, R & Traver, J.A. & Candela, I. (2001) *Aprendizaje cooperativo. Fundamentos características y técnicas.* Madrid : Editorial CCS.

Johnson, D. W., & Johnson, R. (1991). *Cooperative Learning Lesson Structures. Edina*, Minesota: Interaction Book Company.

Johnson, D. W & Johnson R.T & Holubec, E . (1999) . *Aprendizaje cooperativo en el aula.* (G. Vitale, Trans) Buenos Aires : Editorial Paidos. (Trabajo original 1994)

Kagan, Dr. S & Kagan, M. (1994). *Kagan Cooperative Learning.* San Clemente, California: Kagan.

Tourón, J. & Santiago, R. & Diez, A. (2014). *The Flipped Classroom. Cómo convertir la escuela en un espacio de Aprendizaje.* España: Digital text

ISBN 978-84-945722-3-4

T-704

ORIGAMI Y SANGAKUS: ORISANGAKUS EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS

María Belén Garrido Garrido
belengarrido@gmail.com
Colegio Guadalavia(Valencia). España

Núcleo temático: V. Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
Modalidad: T
Nivel educativo: Medio o Secundario
Palabras clave: Orisangaku, papiroflexia, origami, matemáticas

Resumen
La papiroflexia se puede usar como recurso para enseñar distintos conceptos matemáticos, en distintos niveles educativos. Dentro del campo de la geometría, fomenta el uso y la comprensión de distintos conceptos geométricos. Aprovechando el concepto del reto matemático planteado en los problemas japoneses "sangaku" se proponen actividades "ORISANGAKU": Construcción de figuras de papiroflexia y la resolución de problemas geométricos basados en ellas.
Los asistentes al taller, dirigidos por la ponente, doblan distintas figuras de papiroflexia básicas no complicadas.
Durante el doblado de las figuras la ponente va explicando cómo usar el doblado de esa figura en el aula de matemáticas. También propondrá un problema basado en cada figura de papel. Para resolverlo, los dobleces hechos se han de analizar desde un punto de vista geométrico y se han de hacer distintos cálculos para llegar a la solución final. Los retos que se proponen serán de distinta complejidad y todos ellos se pueden resolver utilizando conceptos geométricos básicos.
Se pretende que los asistentes al taller constaten la utilidad de plantear retos matemáticos basados en figuras de papiroflexia y la utilidad de la utilización de esta técnica en el aula para propiciar el aprendizaje de conceptos matemáticos y el desarrollo de habilidades relacionadas.

La papiroflexia, origami en japonés, se puede usar como recurso para enseñar distintos conceptos matemáticos, tanto a niveles educativos básicos como en niveles universitarios. En el estudio de la geometría resulta una ayuda eficaz el uso de recursos, como la papiroflexia, que permite a los estudiantes generar sus propias figuras y trabajar sobre ellas distintos conceptos geométricos. En una figura de papiroflexia hay un gran componente geométrico si se considera el modo exacto y riguroso en que se debe doblar el papel.

ISBN 978-84-945722-3-4

La utilización de esta técnica en clase de matemáticas busca propiciar el aprendizaje de conceptos matemáticos y el desarrollo de habilidades relacionadas. Por esto se hace necesario que las actividades diseñadas vayan dirigidas hacia tal aprendizaje a través de la construcción, la observación, el análisis y la investigación de casos y situaciones que podrían resultar interesantes o sorprendentes para el alumno.

Sangaku: pasión por los retos matemáticos

En los templos sintoístas y budistas de Japón, durante el período Edo (1603-1867), podían observarse, suspendidas en los aleros de los tejados, multitud de ofrendas que los fieles hacían en papel o en tablillas de madera. Entre estas tablillas había algunas con figuras geométricas dibujadas en vivos colores que planteaban fascinantes problemas geométricos. Eran sangaku, término que literalmente quería decir "tablilla matemática". En la actualidad se han llegado a recuperar y clasificar 825 sangaku, la más antigua de las cuales se remonta a 1683.

Todo apunta a que se trataba de matemáticas puramente recreativas y que eran practicadas por campesinos, comerciantes o samuráis, por el puro placer de resolver un problema. La mayor parte de los problemas planteados trataban sobre geometría euclidiana y específicamente sobre círculos, elipses, esferas, figuras dentro de otras figuras y también sobre el cálculo de volumen de diversos sólidos. Una gran parte de estos problemas se pueden resolver utilizando los conocimientos sobre Geometría que se imparten en los cursos de Educación Secundaria, otros requieren matemáticas superiores.

Actividades Orisangakus

Aprovechando el concepto del reto matemático planteado en los problemas japoneses “sangaku” (tablillas de madera con figuras geométricas que planteaban fascinantes problemas geométricos en el Japón de los siglos XVII-XIX) se proponen actividades “ORISANGAKU”: Construcción de figuras de papiroflexia y la resolución de problemas geométricos basados en ellas.

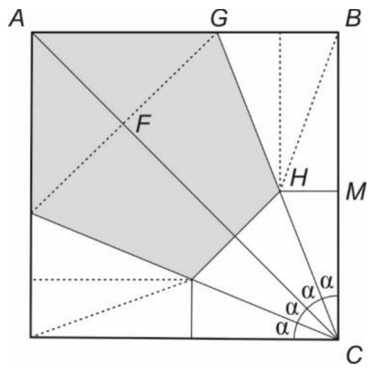
Estas actividades tienen la siguiente estructura: En primer lugar, se dan a los alumnos instrucciones impresas para construir una figura doblando papel; se usan dibujos con la simbología específica de la papiroflexia y también se incluyen algunos textos explicativos.

Después se propone un problema basado en la figura de papel, a modo de desafío geométrico. Para resolverlo, necesariamente se han de analizar desde un punto de vista geométrico los dobleces y se han de hacer distintos cálculos para llegar a la solución final. Los retos que se proponen pueden ser de distinta complejidad matemática desde Educación Primaria hasta nivel universitario. Existen una gran cantidad de figuras de papiroflexia muy aprovechables en Educación Primaria y Secundaria para proponer retos geométricos que puedan ser resueltos utilizando conceptos geométricos básicos y es interesante constatar que los alumnos pueden proponer distintos caminos posibles para resolver el desafío propuesto en cada orisangaku.

Un ejemplo de actividad Orisangaku

Se les entrega a los alumnos las instrucciones del Anexo para que construyan esta sencilla ave acuática a partir de un cuadrado de papel. Y se les plantea el siguiente reto: Si el papel cuadrado de partida es de 15 cm x15 cm, calcula el área del pentágono que aparece en la Figura 5 de las instrucciones.

Un camino para solucionar el reto puede ser el siguiente:



Podemos calcular el área que nos piden restando al área del cuadrado diez veces el área A_p de uno de los triángulos rectángulos pequeños, que son todos ellos semejantes al *HMC*.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Para calcular A_p tomamos como base el segmento *MC* de longitud $L/2$ y como altura el segmento *MH* de longitud $\frac{L}{2}tg\alpha = \frac{L}{2}tg\,22{,}5^{\text{o}} = \frac{L}{2}tg\,\frac{\pi}{8}$.

Vemos así que $A_p = \frac{1}{2}\cdot\frac{L}{2}\cdot\frac{L}{2}tg\,\frac{\pi}{8} = \frac{L^2}{8}tg\,\frac{\pi}{8}$ y por tanto, el área buscada es $L^2\left(1-\frac{5}{4}tg\,\frac{\pi}{8}\right)$.

Dado que las longitudes de *AF*, *FG* y *GB* son iguales (como puede verse en la figura) para obtener $tg\,\frac{\pi}{8}$ nos basta con calcular la longitud del segmento *GB*, que es simplemente $\overline{GB} = \overline{AC} - \overline{FC} = L(\sqrt{2}-1)$. Deducimos así que $tg\,\frac{\pi}{8} = \frac{\overline{GB}}{\overline{BC}} = \sqrt{2}-1$ y con este resultado obtenemos inmediatamente que el área de la región coloreada es

$$L^2\left(1-\frac{5}{4}(\sqrt{2}-1)\right) = \frac{L^2}{4}(9-5\sqrt{2}) \approx 108{,}502 \text{ cm}^2.$$

Objetivos de este tipo de actividades

La exploración de los aspectos geométricos de las figuras de papiroflexia se puede utilizar para investigar las relaciones entre los elementos geométricos de las figuras, descubrir sus propiedades características y aprender a utilizarlas en la solución de problemas.

Se fomentan el uso y la comprensión de conceptos básicos de geometría (diagonal, mediana, vértice, bisectriz, etc.), el análisis de las propiedades de diversas figuras geométricas, la identificación de relaciones de simetría y semejanza, el uso de los teoremas de Thales y Pitágoras y de conceptos trigonométricos para obtener medidas y comprobar relaciones entre figuras, El estudiante desarrolla igualmente la capacidad de producir conjeturas, comunicarlas y validarlas. También debe generar demostraciones utilizando un lenguaje matemático básico adecuado. Por otro lado, los desafíos con figuras geométricas llaman la atención y se puede aprovechar su potencial para generar actividades abiertas y favorables a la exploración de las propiedades de las figuras geométricas.

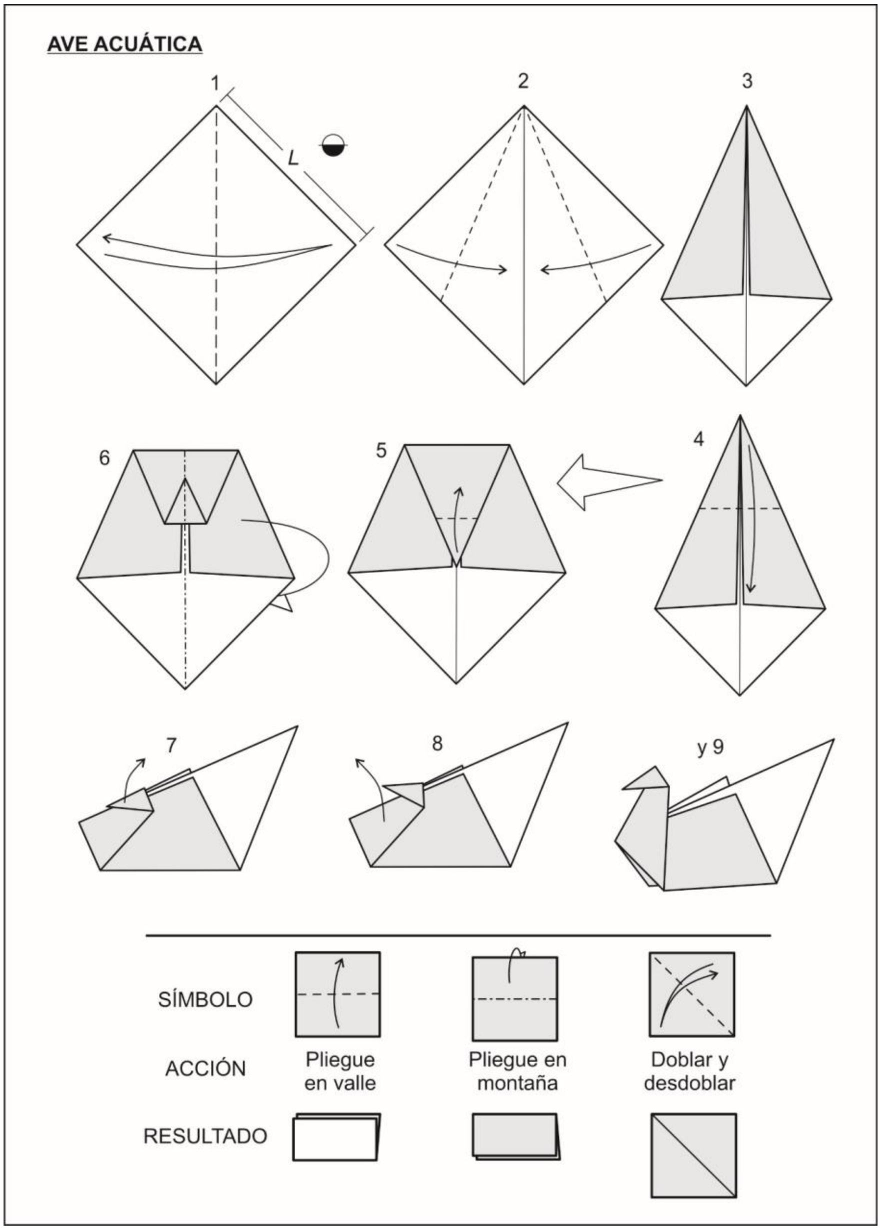
Ya que en muchos de los problemas propuestos no hay un único camino para llegar a la solución, el alumno ha de crear y justificar el suyo generando demostraciones con un lenguaje matemático básico adecuado. No basta con que los alumnos conozcan y utilicen con

ISBN 978-84-945722-3-4

propiedad el lenguaje de la geometría y recuerden los nombres de las figuras o las fórmulas para los distintos cálculos; es necesario que exploren e investiguen las propiedades geométricas de las figuras para poder utilizarlas en la resolución de los desafíos propuestos.

Cualquier profesor puede crear sus propios orisangakus y, según sean sus conocimientos de papiroflexia, puede diseñar una gran cantidad de actividades de distinta complejidad tanto sobre geometría en el plano como en el espacio. También es muy interesante proponer a los alumnos que diseñen sus propios orisangakus para fomentar el desarrollo de su creatividad geométrica.

Anexo



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Referencias bibliográficas

Garrido, M.B. (2015). *Orisangakus. Desafíos matemáticos con papiroflexia. Madrid:* Editorial SM.

Haga, K. (2008). *Origamics: Mathematical Explorations through Paper Folding*. Singapore: World Scientific Pub Co.

HULL, T. (2006). *Project Origami: Activities for Exploring Mathematics.* Wellesley: A K Peters/CRC Press.

Kawamura, M. (2001) *Polyhedron Origami for Beginners (Origami Classroom*). Tokyo: Japan Publications Trading.

Mitchell, D. (1997). *Mathematical Origami: Geometrical Shapes by Paper Folding.* Cambridge: Tarquin Pubns.

Pearl, B. (2005). *Math in Motion: Origami in the Classroom K-8.* Yardley: Crane Books, 2005.

Vidal, M.A. (2011). *Doblando las mates.* Santiago de Compostela: Auga Editorial.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-715

BLOQUES MULTIBASE, ALGEBLOCKS Y OTROS RECURSOS PARA TOCAR LAS MATEMÁTICAS EN PRIMARIA Y SECUNDARIA

Rocío Blanco Somolinos – Cristina Solares Martínez
mariarocio.blanco@uclm.es – Cristina.Solares@uclm.es
Universidad de Castilla-La Mancha, España

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
Modalidad: T
Nivel educativo: Primario (6 a 11 años) y Medio o Secundario (12 a 15 años).
Palabras clave: Bloques multibase, algeblocks, operaciones.

Resumen

En este taller conoceremos los usos de los bloques multibase de Dienes y los algeblocks, a través de actividades orientadas a diferentes niveles educativos, fomentando la enseñanza manipulativa, más motivadora para el alumnado.

Los bloques multibase se usan fundamentalmente para trabajar el sistema de numeración decimal, ya que representan unidades de distinto orden, por lo que facilitan la comprensión del valor de posición de las cifras, y de los algoritmos de las operaciones básicas, así como de los números decimales. También se usan para trabajar volúmenes.
En niveles más altos se usan para representar polinomios de una variable y operar con ellos. Los hay de distintas bases, aunque los más utilizados son los de base 10, así que también se pueden usar para hacer cambios de base. Para trabajar con polinomios de varias variables usaremos los algeblocks.

Los algeblocks facilitan el desarrollo del pensamiento algebraico, la comprensión de áreas y volúmenes, y permiten operar con polinomios de una o varias variables hasta grado 3.

En la primera parte del taller realizaremos actividades que pueden trabajarse desde Segundo curso hasta Sexto curso de Primaria. La segunda parte estará orientada a las aplicaciones y usos del material en la Educación Secundaria.

Introducción

Existen numerosos materiales manipulativos específicos pensados para desarrollar el sentido numérico y algebraico en los niños, entre ellos, las regletas Cuisenaire (Imagen 1), los bloques multibase de Dienes (Imagen 2) y los algeblocks (Imagen 5). Estos materiales representan la evolución desde los inicios del desarrollo del sentido numérico con pequeñas

ISBN 978-84-945722-3-4

cantidades (regletas), pasando por los agrupamientos y la comprensión del valor de posición de las cifras a través de la expresión de cantidades de varias cifras (bloques multibase); hasta la abstracción algebraica donde la cantidad es desconocida y se representa con una variable, por ejemplo x (algeblocks).

Imagen 1: Regletas Cuisenaire.

Las regletas Cuisenaire (Imagen 1) son las más utilizadas, son un conjunto de prismas de base cuadrada de diferentes colores y longitudes, que sirven para representar los números del 1 al 10, por lo que se utilizan desde la Educación Infantil hasta primer curso o segundo curso de Educación Primaria. Cada color se asocia a una única longitud, de forma que no hay dos piezas del mismo color y longitudes distintas.

La pieza más pequeña es un cubo blanco de $1cm^3$, que representa al número uno, ya que su longitud es 1cm. La siguiente regleta, de color rojo, mide 2cm de longitud y por eso representa al número dos. Y así sucesivamente, las demás piezas son prismas de base cuadrada de $1cm^2$, aumentando la longitud en 1cm de una pieza a otra. Hasta una longitud de 10cm, que es lo que mide la regleta naranja. Por eso se utilizan para representar los números del uno al diez, asociando un número a cada color y longitud.

Se pueden encontrar de madera o de plástico.

ISBN 978-84-945722-3-4

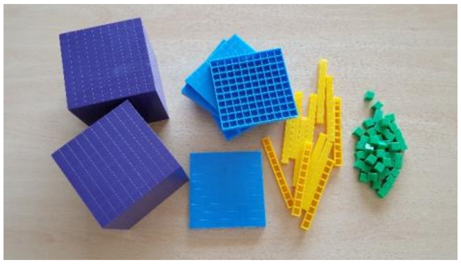


Imagen 2: Bloques multibase (base 10).

Cuando necesitamos expresar cantidades más grandes pasamos a los bloques multibase (Imagen 2). Los bloques multibase son también prismas de base cuadrada, que representan unidades, decenas, centenas y unidades de millar. Las piezas son:

- **cubos** de $1cm^3$, es la pieza más pequeña y representa el uno, la unidad;
- **barras**, formadas por diez cubos, representan la decena;
- **placas**, formadas por diez barras, representan la centena;
- **bloques**, formados por diez placas, representan la unidad de millar.

También se fabrican en madera o plástico, y se pueden encontrar juegos con piezas encajables y todas del mismo color, o bien, de distinto color según la unidad de orden representada.

Además de los bloques multibase descritos, que son de base 10, existen en otras bases, desde base 2 a 10, por eso se denominan bloques multibase (Imagen 3).

Imagen 3: Bloques base 5 y 10.

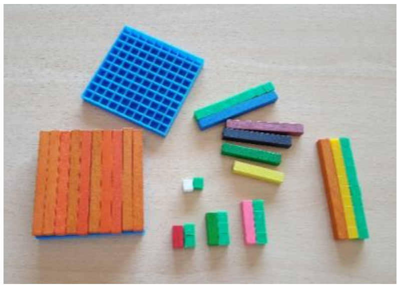


Imagen 4: Comparación regletas y bloques.

ISBN 978-84-945722-3-4

Como podemos observar en la imagen 4, los cubos unidad son comunes a ambos materiales (regletas y bloques multibase) y la regleta naranja (que equivale al número 10) es equivalente a la barra. De esta forma el paso de las regletas a los bloques multibase es bastante natural, y puede llevarse a cabo desde primer curso de Educación Primaria, al trabajar con cubos y barras (unidades y decenas) de forma simultánea a las regletas.

A partir de segundo curso de Educación Primaria, introducimos las placas para trabajar la centena. En este caso hay que tener en cuenta el aumento del nivel de dificultad, ya que pasamos de un modelo numérico lineal, a un modelo bidimensional.

Al intentar expresar cantidades desconocidas, introducimos el uso de expresiones algebraicas, por lo que pasamos al uso de los algeblocks (Imagen 5). Se trata de un conjunto de prismas cuadrangulares con 10 tipos de piezas distintas.

Imagen 5: Algeblocks.

- **cubos** de $1cm^3$, es la pieza más pequeña y representa el uno, la unidad;
- **barras amarillas**, prismas de base $1cm^2$ y longitud 3’5cm, representan la variable x.
- **barras rojas**, prismas de base $1cm^2$ y longitud 4’5cm, representan la variable y.
- **placas amarillas**, prismas de 3’5cm x 3’5cm x 1cm, representan x^2.
- **placas rojas**, prismas de 4’5cm x 4’5cm x 1cm, representan y^2.
- **placas naranjas**, prismas de 3’5cm x 4’5cm x 1cm, representan xy.
- **bloques amarillos**, prismas de 3’5cm x 3’5cm x 3’5cm, representan x^3.
- **bloques rojos**, prismas de 4’5cm x 4’5cm x 4’5cm, representan y^3.
- **bloques naranjas (tipo 1)**, prismas de 3’5cm x 3’5cm x 4’5cm, representan x^2y.

ISBN 978-84-945722-3-4

- **bloques naranjas (tipo 2)**, prismas de 3’5cm x 4’5cm x 4’5cm, representan xy^2.

El paso a la expresión de una variable (o cantidad desconocida) se hace natural si el alumno ha trabajado previamente con las regletas o los bloques multibase, ya que al tratar de determinar la longitud de la barra amarilla, el alumno observa que se encuentra entre 3cm y 4cm, por lo que no se corresponde con ninguna regleta ni puede expresarse con cubos unidad. Lo mismo ocurre con la barra roja, y a partir de ahí, se interpretan las demás piezas. En este caso la única pieza común con los otros materiales es el cubo unidad.

En este taller nos centraremos en los usos de los bloques multibase y los algeblocks. Realizaremos diversas actividades manipulativas, para que los participantes experimenten con los materiales y sus numerosas aplicaciones.
Al final del taller, dependiendo del tiempo disponible, compararemos estos materiales con otros que se usan para el mismo fin y presentaremos variantes de los mismos.

Actividades con los bloques multibase

1. Sistema de numeración decimal. Valor de posición de las cifras.

Para que el niño comprenda el valor de posición de las cifras y las equivalencias entre las distintas piezas hay que trabajar progresivamente la representación de números y los agrupamientos de diez en diez, combinando el trabajo con el material con la representación gráfica y simbólica. Metodología:

- Representación de números de una cifra, desde el 1 hasta el 9 en orden creciente y decreciente.
- Representación de 10 unidades y ver que equivale a la barra (decena).
- Representación de números de dos cifras y ordenaciones mediante comparaciones.
- Representación del número 99 y paso al uso de la placa (centena).
- Representación de números de tres o más cifras.

Ejemplo de actividad: Cada grupo contará con un juego de bloques multibase y un dado. Por turnos, los participantes tiran el dado y cogen el número de unidades que sale. Cuando un

ISBN 978-84-945722-3-4

jugador tiene diez unidades o más debe decir "decena" y cambiarlas por una decena o pierde turno. Limitamos el número de jugadas, dependiendo del tramo de la sucesión numérica que queramos trabajar, y una vez terminado el juego, gana el jugador que más decenas tenga. Si hubiera empate se cuentan también las unidades que queden sin cambiar.

2. Operaciones básicas. Algoritmos.

A través del descubrimiento guiado veremos varias formas de realizar cada una de las operaciones básicas, insistiendo en la equivalencia entre la acción que se realiza con los bloques multibase (significado de la operación) y el algoritmo escrito de la operación.

Ejemplo de actividad: Una variante de la actividad anterior consiste en utilizar diferentes tipos de dados (con forma de dodecaedro, icosaedro, etc.) para producir sumas de números de dos cifras.

3. Representación de números decimales y operaciones.

Explicaremos brevemente cómo representar números decimales y cómo operar con ellos.

- La placa es la unidad.
- La barra es la décima.
- El cubo es la centésima.

4. Medida de longitudes, áreas y volúmenes.

Explicaremos brevemente cómo utilizar las distintas piezas como unidad de medida.

- Medir la longitud de la mesa con barras (1dm).
- Medir el área de la mesa con placas ($1dm^2$).
- Medir el volumen de una caja con cubos ($1cm^3$) o bloques ($1dm^3$).

Una vez comprendidos los usos de los bloques multibase, los compararemos con otros materiales específicos que se usan con el mismo fin: el Numerator y el ábaco abierto; reflexionando acerca de las ventajas e inconvenientes de la utilización de cada material.

Actividades con los algeblocks

1. Manipulamos cada uno de los bloques. Se pedirá a los alumnos que manipulen cada uno de los bloques, que vean las relaciones que existen entre ellos y por último les podemos hacer

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

preguntas como: ¿Cuál es el volumen del cubo verde?, ¿Cuál es el área de la cara rectangular de la barra amarilla?, ¿Cuál es el área de una cara cuadrada de la placa roja?, ¿Cuál es el volumen del bloque naranja?, ¿Cuál es el volumen del bloque rojo?

2. Representación de polinomios en una o dos variables.

Explicaremos brevemente cómo representar polinomios con los bloques multibase, para a continuación generalizar la idea a los algeblocks.

- Representación de un monomio de grado menor o igual que 3, en las variables x e y, con coeficientes enteros positivos y/o negativos.
- Representación de un polinomio en las variables x e y, con grado menor o igual que 3 y con coeficientes enteros.
- Los alumnos utilizarán los algeblocks para calcular áreas y volúmenes que se pueden expresar mediante polinomios en las variables x e y.

3. Operaciones con polinomios.

En primer lugar, explicaremos cómo utilizar los algeblocks para realizar operaciones con polinomios. Se mostrará la equivalencia entre las acciones que realizamos con los algeblocks y el algoritmo escrito de las operaciones.

- Sumar y restar polinomios de grado menor o igual que 3.
- Multiplicar polinomios de grado 1 en las variables x e y. Mostraremos la relación de la operación anterior con la fórmula del área de un rectángulo.
- Multiplicar un polinomio de grado 2 por un polinomio de grado 1 en las variables x e y. Mostraremos la relación de la operación anterior con el volumen de un prisma.
- Los alumnos utilizarán los algeblocks para resolver problemas reales que requieran sumar, restar y multiplicar polinomios.

En segundo lugar, mostraremos cómo utilizar los algeblocks para resolver identidades notables: $(x+y)^2$, $(x-y)^2$, $(x+y)$ $(x-y)$, $(x+y)^3$.

Por último, explicaremos brevemente la factorización y división de polinomios utilizando los algeblocks.

4. Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales

ISBN 978-84-945722-3-4

En este punto se mostrará cómo utilizar los algeblocks para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales en las variables x e y, con coeficientes enteros.

- Resolver una ecuación de primer grado en la variable x.
- Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x e y.
- Los alumnos utilizarán los algeblocks para resolver problemas reales que involucren la resolución de una ecuación o un sistema de dos ecuaciones lineales.

Referencias bibliográficas

- Azarquiel, G. (1991). *Ideas y Actividades para Enseñar Álgebra.* Madrid: Síntesis.
- Balka, D. (1995). *Exploring Algebra and Pre-Algebra with Manipulatives.* Massachusetts: Didax.
- Biblioteca nacional de manipuladores virtuales (1999-2017) http://nlvm.usu.edu/es/nav/vlibrary.html Consultado 16/03/2017
- Dienes, Z. P. (1971). *Cómo utilizar los bloques multibase.* Barcelona: Teide.
- ETA hand2mind (2017) http://www.hand2mind.com Consultado 16/03/2017
- Fernández Bravo, J. A. (2014) *Numerator: un juego para aprender la numeración y las cuatro operaciones matemáticas.* Madrid: CCS.
- Making Math Connections through Hands-on Geometry (2002) NCTM Conference. Las Vegas, Nevada. April 22, 2002. http://staff.district87.org/powelln/NCTM2002/CD/AlgeBlocks/ Consultado 16/03/2017
- Rivera, Ferdinand D. Algeblocks, promote algebraic understanding. www.etacuisenaire.com Consultado 16/03/2017
- Tocamates, matemáticas y creatividad http://www.tocamates.com Consultado 16/03/2017
- Torra, M. *Construir las Matemáticas en Educación Primaria.* EducaMadrid. http://www.educa2.madrid.org/binary/185/Numeros.pdf Consultado 18/04/2017
- http://www.vdoe.whro.org/A_Blocks05/index.html Consultado 16/03/2017

ISBN 978-84-945722-3-4

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

T-720

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS COMPLEXOS USANDO O GEOGEBRA

Duelci Aparecido de Freitas Vaz –Teresa F. Blanco – Mateus Almeida de Freitas.
duelci.vaz@gmail.com – teref.blanco@usc.es – mafmateus@hotmail.com
Pontifícia Universidade Católica de Goiás/Instituto Federal de Goiás – Universidade de Santiago de Compostela–Instituto Federal de Goiás.

Núcleo temático: Ensino e aprendizagem da Matemática nas diferentes modalidades e níveis educativos.
Modalidade: T
Nível educativo: 5
Palavras chave: Números Complexos, Geogebra, Articulação Álgebra-Geometria, Sequência Didática.

Resumo
Apresentamos esse estudo justificando que os números complexos são abordados na educação brasileira desconsiderando seu desenvolvimento lógico, histórico e os aspectos algébrico-geométricos relacionados. Para contribuirmos com o debate acadêmico sobre este assunto, apresentamos uma sequência didática iniciada por um estudo de seu movimento lógico e histórico relatando: sua gênese, a origem de sua representação geométrica, os motivos de sua permanência e sua importância enquanto conhecimento científico. Em seguida, propomos uma mediação pedagógica com o software Geogebra, com a finalidade de articular, dinamicamente e simultaneamente, sua álgebra e sua geometria, para possibilitar um entendimento mais amplo deste assunto. Como resultado, notamos que um número complexo pode ser pensado como um vetor; a soma e a diferença de dois números complexos podem ser pensadas como as diagonais de um paralelogramo; o produto e a divisão de dois números complexos podem ser reduzidos à soma; a radiciação representa movimentos de rotação no plano, formando um polígono regular sobre uma circunferência; a potenciação pode ser reduzida a somas sucessivas, equivale dizer a combinações de várias diagonais de paralelogramos, indicando rotações. Além do mais, ilustramos algebricamente e geometricamente o entendimento das propriedades relacionadas a essas operações.

Introdução: uma história dos números complexos

Uma história fascinante da Matemática foi a que envolveu a busca pela resolução das equações polinomiais. No intervalo dos séculos XIV- XVII d.C. este assunto ganhou notoriedade ente os Matemáticos da Europa. François Viéte (1540 – 1603), Descartes, (1596 – 1650), Pierre de Fermat (1601 -1665), Rafael Bombelli (1526 – 1572), Girolamo Cardano (1501 – 1576), Nicolo Fontana (1499 – 1557) conhecido como Tartaglia, deram

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

contribuições importantes para a resolução das equações polinomiais de até grau quatro. A maioria dos debates sobre a resolução de equações polinomiais se deu inicialmente envolvendo as equações de terceiro grau e que evoluíram naturalmente para resolução das equações de quarto, quinto, etc, até que Evariste Galois demonstrar que para polinômios de grau superior a quatro não há uma fórmula geral que seja capaz de resolver todos os casos.

Sem qualquer sombra de dúvida, foi a possibilidade de resolver equações de grau superior a dois, que os matemáticos tiveram a percepção de que poderiam criar uma nova estrutura numérica que passaria a ser denominada de números complexos.

Segundo Eves (2011, p. 302):

> Por volta de 1515, Scipione del Ferro (1465-1526), professor de matemática da Universidade de Bolonha, resolveu algebricamente a equação cúbica $x^3 + mx = n$, baseando seu trabalho provavelmente em fontes árabes. Ele não publicou o resultado, mas revelou o segredo a seu discípulo Antônio Fior.

Outro matemático importante foi Tartaglia, para Eves (2011, pp. 302-303):

> Por volta de 1535, Nicolo Fontana de Brescia, mais conhecido como Tartaglia (o tartamudo), devido a lesões físicas sofridas quando criança que afetaram sua fala, anunciou ter descoberto uma solução algébrica para a equação cúbica $x^3 + px^2 = n$. Achando que se tratava de blefe, Fior desafiou Tartaglia para uma disputa pública envolvendo a resolução de equações cúbicas. Com muito empenho Tartaglia conseguiu resolver também, faltando poucos dias para a disputa, a equação cúbica desprovida do termo quadrático. Como no dia marcado sabia resolver dois tipos de cúbicas, ao passo que Fior só sabia resolver um, Tartaglia triunfou plenamente.

Eves (2011), conta-nos que Girolamo Cardano conseguiu obter informações de Tartaglia de como resolver a equação cúbica e publicou o resultado em 1545, em Nuremberg, na obra *Ars Magna*, um grande tratado em latim de álgebra:

> (...) os protestos de Tartaglia foram rebatidos por Ludovico Ferrari, o mais brilhante dos discípulos de Cardano, que argumentou ter seu mestre recebido informações de del Ferro, através de um terceiro personagem, ao mesmo tempo que acusava Tartaglia de ter plagiado a mesma fonte. Seguisse uma polêmica acerca da qual Tartaglia, com certeza, deu-se por feliz de sair vivo. (Eves, 2011, p.303)

ISBN 978-84-945722-3-4

Os matemáticos daquela época perceberam que toda cúbica completa poderia ser reduzida a uma cúbica sem o termo quadrático, ou seja, $y^3 + py = q$. A solução de Cardano[12] para $y^3 + py = q$ é dada por: $y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$.

Rafael Bombelli (1526-1572), aplicando está fórmula na resolução da equação x^3-$15x=4$, obteve a seguinte solução: x= $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ - $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. A aparente contradição notada por Bombelli, a extração da raiz negativa de – 121, é que esta equação possui soluções reais, a saber: x = 4, x = -1+$\sqrt{3}$ e x = -1-$\sqrt{3}$.

Bombelli fez $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ = a+$b\sqrt{-1}$ e $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ = a-$b\sqrt{-1}$ (usando a notação moderna), e obteve $a=2$, $b=1$ e daí $x=4$. Assim, percebeu que aceitar tal situação era possível e foi mais além, escrevendo o livro: “Álgebra Opera”, onde aparece a teoria dos números complexos, pela primeira vez, razoavelmente bem estruturada.

Com os estudos de Bombelli, foi possível observar que algumas vezes as raízes quadradas de números negativos são necessárias para encontrar soluções reais. Ou seja, ele mostrou que a aparência destas expressões nem sempre é um sinal de que o problema não é solúvel. Com estas ideias, muitos matemáticos puderam notar que os números complexos eram ferramentas úteis para alguns estudos.

Entretanto, a Matemática teve que esperar alguns anos para que os números complexos se desenvolvessem de fato. O próximo passo foi a representação geométrica dos números complexos, conhecida hoje como plano Argand-Gauss. Segundo Eves (2011, p. 522):

> Caspar Wessel (1745-1818), Jean Robert Argand (1768-1822) e Gauss foram os primeiros autores a notar a associação, agora familiar, entre números complexos e pontos reais do plano.Wessel e Argand não eram professores de matemática; Wessel era um agrimensor, nascido em Josrud, Noruega, e Argand um guarda-livros, nascido em Genebra, Suíça

Para Eves, “a prioridade da ideia cabe a Wessel, com um artigo apresentado a Academia Real Dinamarquesa de Ciências em 1797 e publicado nas *Atas* dessa Academia em 1799” (2011, p. 522). Eves afirma também que: “A contribuição de Argand figura num

---

[2] O raciocínio de Cardano está na parte I do apêndice.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

artigo publicado em 1806 e mais tarde, em 1814, apresentado nos *Annales de Mathematiques* de Gergonne” (2011, p.522). Ainda Eves menciona que:

> O artigo de Wessel permaneceu excluído do mundo matemático em geral até que foi descoberto por um antiquário cerca de 98 anos depois de ter sido escrito. Foi então republicado na oportunidade do centenário de seu primeiro aparecimento. Esse atraso no reconhecimento geral da realização de Wessel explica por que o plano complexo veio a ser chamado *plano de Argand* em vez de *plano de Wessel* (Eves, 2011, p. 522).

A contribuição dada por Gauss desta importante ideia está implícita em sua tese de doutorado:

> A contribuição de Gauss se encontra numa memória apresentada a Sociedade Real de Gottingen em 1831, posteriormente reproduzida nas suas *Obras Reunidas.* Gauss assinalou que a ideia básica da representação pode ser encontrada em sua tese de doutorado de 1799. A afirmação parece procedente e explica por que o plano complexo e frequentemente conhecido como *plano de Gauss.* (Eves, 2011, p.522).

O plano Argand-Gauss consiste de duas retas perpendiculares. Na horizontal apresenta-se a reta dos números reais, que representa a parte real do número complexo, e na perpendicular apresenta-se o eixo imaginário, representa a parte imaginária do número complexo, como mostra a figura abaixo.

A ideia de representar os números complexos geometricamente foi muito importante para o desenvolvimento da teoria:

> A simples ideia (sic) de considerar as partes real e imaginaria de um número complexo $a + bi$ como as coordenadas retangulares de um ponto do plano fez com que os matemáticos se sentissem muito mais a vontade com os números imaginários, pois esses números podiam agora ser efetivamente visualizados, no sentido de que a cada número complexo corresponde um único ponto do plano e vice-versa. Ver e crer, e ideias anteriores sobre a não existência e o caráter fictício dos números imaginários foram geralmente abandonadas. (Eves, 2011, p.524)

Essa representação em forma de eixos perpendiculares é consistente com as operações algébricas, uma vez que a operação de multiplicação de um número complexo pela unidade imaginária i consiste em rotacioná-lo de noventa graus no sentido anti-horário, como

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

será mostrado mais adiante. O eixo imaginário é colocado perpendicular ao eixo real, pois a unidade imaginária significa um movimento de rotação de 90^0 no sentido anti-horário, como mostraremos em breve.

A álgebra e a geometria dos números complexos.

Com esta introdução histórica podemos agora trabalhar no sentido de mostrar a nossa proposta que consiste essencialmente de uma articulação entre a álgebra e a geometria dos números complexos.

Soma e subtração de números complexos[13]

Primeiro é preciso notar que a todo número complexo $z = a + bi$, existe um único ponto que o representa no plano Argand-Gauss. Sejam dados os números complexos: $z = a + bi, w = c + di, u = e + fi$, então a soma de números complexos é definida da seguinte maneira: $z + w = (a+c) + (b+d)i$. A operação de soma e subtração possuem propriedades geométricas importantes, podem ser caracterizadas como as mesmas operações realizadas com vetores.

Multiplicação de números complexos[14]

Na introdução deste trabalho mostramos que Bombelli passou a operar com números complexos aplicando os mesmos critérios aplicados aos números reais. Assim, dado $z = a + bi$ e $w = c + di$, então, definimos $zw = (a + bi).(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Para compreender geometricamente a multiplicação de números complexos, vamos inicialmente descrever o significado geométrico da multiplicação de um número real por um complexo e da multiplicação da unidade imaginária por um complexo.

O produto de número complexo por um número real puro é um número que está sobre uma reta que passa pela origem e pelo ponto determinado pelo número complexo.

[13] Ver parte ii do apêndice.
[14] Ver parte iii do apêndice.

ISBN 978-84-945722-3-4

A multiplicação de um número complexo pela unidade imaginária i, algebricamente nos dá $i(a+bi) = -b + ai$ e geometricamente, equivale a uma rotação de 90^0, no sentido anti-horário, preservando o módulo.

Podemos agora pensar o produto de dois números complexos da seguinte maneira, usando a propriedade distributiva: *(a + bi) (c + di) = a(c + di) + bi(c + di).* A parcela *a(c + di)* está numa reta que passa por *(c, d)* e pela origem. A parcela *bi(c + di)* está numa reta perpendicular a reta que passa por *(c, d)* e a origem. Depois, somamos as duas parcelas. Assim, reduzimos a multiplicação à soma, o resultado é a diagonal do paralelogramo. Algumas propriedades da multiplicação na forma algébrica e suas propriedades geométricas são apresentadas no apêndice. Observamos, a partir disso, que a potência de números complexos pode ser reduzida a somas sucessivas. Mas temos ainda a opção da forma trigonométrica.

A divisão fica reduzida a multiplicação através da multiplicação pelo conjugado do denominador no numerador e denominador. Assim, se reduz a soma e passa a ter a mesma interpretação do produto.

Forma polar ou trigonométrica dos números complexos [15]

Um número complexo fica bem determinado quando conhecemos seu módulo e seu argumento. Dado $z = a + bi$, $z = |z|(cos\theta + isen\theta)$. A partir de agora podemos reinterpretar as operações de multiplicação e divisão de números complexos de uma forma diferente daquelas já apresentadas, incluindo suas propriedades, como está explícito no apêndice.

Multiplicação de números complexos na forma trigonométrica[16]

Consideremos os números complexos z e w, dados na forma trigonométrica: $z = |z|(cos\theta + isen\theta)$ e $w = |w|(cos\alpha + isen\alpha)$. O produto z*w é dado por: $zw = |z|((cos\theta + isen\theta)|w|(cos\alpha + isen\alpha) = |z||w|(cos\theta + isen\theta)(cos\alpha + isen\alpha) = |z||w|\big((cos\theta cos\alpha - sen\theta sen\alpha) + i(sen\theta cos\alpha + sen\alpha cos\theta)\big) = |z||w|(cos(\theta + \alpha) + isen(\theta + \alpha))$. Portanto: $zw = |z||w|(cos(\theta + \alpha) + isen(\theta + \alpha))$. Logo, para multiplicar dois números complexos na forma polar basta saber os seus módulos e seus argumentos. O

[15] Ver parte iv do apêndice.
[16] Ver parte v do apêndice.

ISBN 978-84-945722-3-4

produto é obtido multiplicando os módulos, somando os argumentos e calculando o seno e cosseno, conforme a fórmula dada.

Divisão de números complexos na forma trigonométrica

A divisão é dada como segue: $\frac{z}{w}=\frac{|z|(cos\theta+isen\theta)}{|w|(cos\alpha+isen\alpha)}=\frac{|z|(cos\theta+isen\theta)}{|w|(cos\alpha+isen\alpha)}.\frac{(cos\alpha-isen\alpha)}{(cos\alpha-isen\alpha)}=$ $\frac{|z|}{|w|}((cos\theta\ cos\alpha+sen\theta sen\alpha)+i(cos\theta\ sen\alpha+cos\alpha sen\theta))$=$\frac{|z|}{|w|}(\cos(\theta-\alpha)+\ \ sen(\theta-\alpha))$. Ou seja, para dividir dois números complexos, dividimos seus módulos e subtraímos seus argumentos e substituímos na fórmula.

Potenciação de números complexos na forma trigonométrica[17]

Agora generalizamos a fórmula para potenciação de números complexos para potências inteiras o que passaremos a chamar de Primeira fórmula de Moivre. A potência z^n, n $\epsilon\ N^*$, é dada por $z^n=z.z.\dots.z$. Aplicando o resultado anterior, obtemos: $z^n=z.z.\dots.z=|z|.|z|.\dots.|z|.(cos(\theta+\theta+\cdots+\theta)+\ isen(\theta+\theta+\cdots+\theta)$, isto é, $z^n=|z|^n(cos(n\theta)+isen(n\theta)$ (fórmula de Moivre).

Radiciação: raízes enésimas de números complexos[18]

Dado um número complexo z e um número natural n, n > 1, definimos em C, a raiz enésima de z como sendo um número complexo w, tal que, $w^n=z$. Consideremos o número complexo $z\neq0$ tal que $z=|z|(cos\theta+isen\theta)$. Encontrar as raízes enésimas de z significa determinar todos os números complexos distintos do tipo: $w=|w|(cos\alpha+isen\alpha)$, de modo que, $w^n=z$, para n > 1, ou seja, procurar números w tal que: $(|w|(cos\alpha+isen\alpha))^n=|z|(cos\theta+isen\theta)$.

Aplicando a primeira fórmula De Moivre, temos: $|w|^n(cosn\alpha+isen\alpha)=|z|(cos\theta+isen\theta)$. Da igualdade: $w^n=|w|^n(cosn\alpha+isen\alpha)=z=|z|(cos\theta+isen\theta)$. Vem $|w|^n=|z|$, $cosn\alpha=cos\theta\ e\ sen\alpha=sen\theta$. De $|w|^n=|z|$, temos $|w|=\sqrt[n]{|z|}$ (sempre

[17] Ver parte vi do apêndice.
[18] Ver parte vii do apêndice.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

real e positivo). De, $cosn\alpha = \ cos\theta$ e $sen\alpha = sen\theta$, temos: $n\alpha = \theta + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\theta+2k\pi}{n}$ (com $k\epsilon z$). Mas, para que $0 \leq \alpha < 2\pi$, é necessário que $0 \leq k \leq n-1$.

Assim, concluímos que: $w_k = \sqrt[n]{|z|}\ (cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + isen\frac{\theta+2k\pi}{n})$ (segunda fórmula de De Moivre) para $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$. Após $k = n-1$, os valores começam a se repetir. Então, de $zero\ a\ n-1$,temos n raízes distintas. Observemos que essa fórmula também pode ser escrita assim: $w_k = \sqrt[n]{|z|}\ (cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right))$. Assim, qualquer número complexo z, não nulo, admite n raízes enésimas distintas. Mostramos no apêndice que as raízes enésimas de um número complexo determinam um polígono regula, com centro na origem e ainda que soma das raízes é nula. Essa é uma propriedade válida para todas as raízes enésimas de um dado número complexo.

Conclusão

A história dos números complexos revela uma forte articulação entre álgebra e geometria. Assim, é salutar incluir todos esses aspectos em seu ensino-aprendizagem, pois justifica a importância de seu ensino, sua importância científica como, aplicações em outras áreas do conhecimento, o que esclarece os motivos de sua permanência no ensino atual.

A contribuição deste trabalho está na articulação entre álgebra e geometria, evidenciado pelo movimento lógico e histórico deste assunto com o intuito de que o aluno possa notar a essência do conteúdo, fato relevante, para que transite de forma adequada nos contextos da Matemática, permitindo-o alcançar o núcleo do objeto estudado, como está previsto na teoria do ensino desenvolvimental de Davydov (1988).

O *software* Geogebra é fundamental para visualizar as propriedades de forma dinâmica explorando diversos casos, possibilitando, inclusive, formular conjecturas, através da experimentação que este permite. A articulação entre álgebra e geometria é concretizada e contemplada nas janelas gráfica e algébrica, na mesma tela, onde o aluno pode relacionar as operações. Ainda ressaltamos a possibilidade de por os objetos em movimento neste *software*, podendo observá-los em diferentes possibilidades, permitindo o amadurecimento matemático pela interatividade.

ISBN 978-84-945722-3-4

Finalizamos sugerindo que outros assuntos sejam tratados por essa via, pois acreditamos que pode potencializar o ensino-aprendizagem da Matemática, fato importante para o desenvolvimento científico e tecnológico de nosso país.

Referências bibliográficas

Dante, L. R. (2010). *Matemática: contexto e aplicações*. São Paulo: Ática.

Davídov, V.V. (1988). *La enseñanza escolar y eldesarrollo psíquico: investigación teórica y experimental*. Tradução: Marta Shuare. Moscú: Progreso.

Eves, H.(2011) *Introdução à história da matemática* (5a ed.); tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp.

Souza, J. R. (2013). *Novo olhar Matemática* (2a ed.). Edição-São Paulo: FTD.

Vaz, D. A. F. e Jesus, E. A. (2013). Investigação Matemática com o Geogebra: Um Exemplo com Matrizes e Determinantes. *Boletim GEPEM (Online), 62*, 165-170.

Apêndices

Parte I. Os cálculos de Cardano.

Os matemáticos daquela época perceberam inicialmente que toda cúbica completa poderia ser reduzida a uma cúbica sem o termo quadrático, substituindo a variável original por $y - \frac{a}{3}$, $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, obtemos $y^3 + \left(\frac{-a^2}{3} + b\right)y - \left(\frac{-2a^3}{27} + \frac{ab}{3} - c\right) = 0$, chamando de p e q os termos entre paréntesis obtemos: $y^3 + py - q = 0$, ou seja, $y^3 + py = q$. A solução de Cardano para $y^3 + py = q$ é baseada no seguinte argumento. Primeiramente, vamos observar a identidade cúbica:

$$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2\mathrm{B} + 3AB^2 - B^3$$

$$(A - B)^3 = -3\mathrm{AB}(\mathrm{A} - \mathrm{B}) + (A^3 - B^3)$$

$$(A - B)^3 + 3\mathrm{AB}(\mathrm{A} - \mathrm{B}) = (A^3 - B^3)$$

$$A - B = y \rightarrow \begin{cases} y^3 + 3ABy = A^3 - B^3 \\ y^3 + py = q \end{cases}$$

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Comparando as duas equações temos: $\begin{cases} 3AB = p \Rightarrow B = \frac{p}{3A} \\ A^3 - B^3 = q \end{cases}$, e resolvendo em A e B,

obtemos: $y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$.

Parte II. Representação geométrica. Soma e subtração de números complexos.

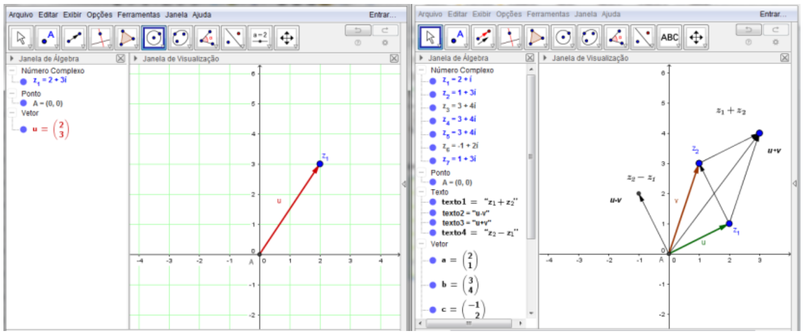


Figura 1. Representação geométrica de um número complexo. Soma e subtração de números complexos, utilizando a mesma ideia de vetor. A soma é a diagonal principal e a diferença é a diagona secundária.

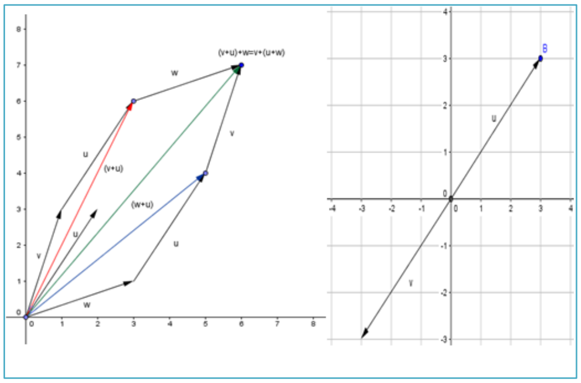


Figura 2. Representação da propriedade associativa da adição e do elemento oposto de números complexos.

Parte III. Multiplicação de números complexos.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

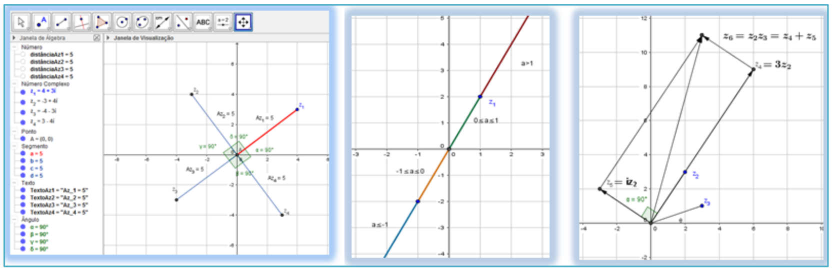


Figura 3. Possíveis potências inteiras da unidade imaginária i. Multiplicação de um número complexo por um real puro. Produto de dois números complexos.

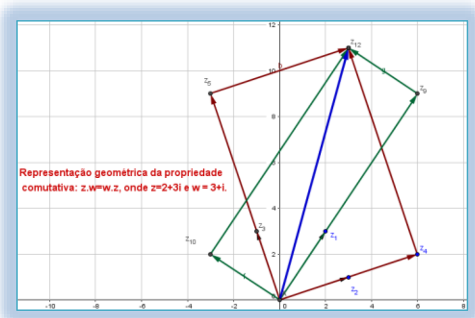


Figura 4. Representação da propriedade comutativa. Redução a dois paralelogramos de mesma diagonal.

Parte IV. Forma polar ou trigonométrica dos números complexos.

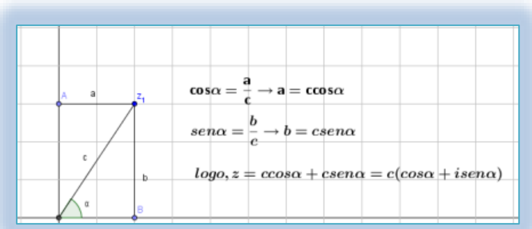


Figura 5. Dedução da forma polar ou trigonométrica.

ISBN 978-84-945722-3-4

Parte V. Multiplicação de números complexos na forma trigonométrica.

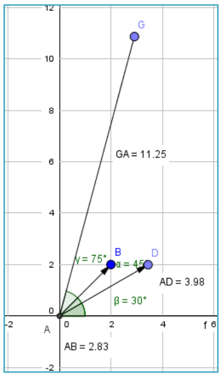


Figura 6. Multiplicação na forma polar. Multiplicamos os módulos e somamos os argumentos.

Parte VI. Potenciação de números complexos na forma trigonométrica.

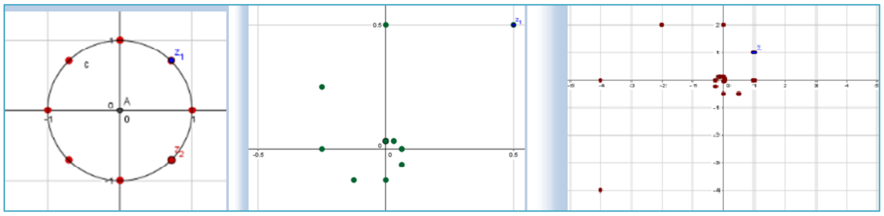


Figura 7. Potência de um número complexo de módulo um. Potências de um número complexo de módulo menor que um. Potências de um número complexo de módulo maior que um.

Parte VII. Radiciação: raízes enésimas de números complexos.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

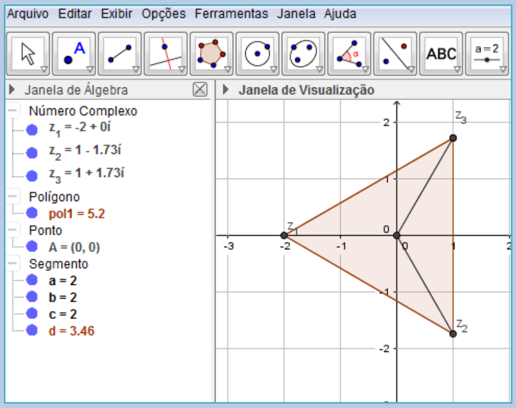


Figura 8. As raízes de um número complexo são os vértices de um polígono regular.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

T-740

PROBABILIDADES GEOMÉTRICAS: EJEMPLOS Y REFLEXIONES DIDÁCTICAS

Gabriela Patricia Net – Mariana Andrea Aragón
gabriela_net@hotmail.com – mandrearagon@gmail.com
Universidad de Buenos Aires, Argentina. Goethe Schule – Buenos Aires, Argentina.

Núcleo temático: V. Recursos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
Modalidad: T.
Nivel educativo: Secundario, Bachillerato, Formación y actualización docente.
Palabras clave: Probabilidad, Geometría, Didáctica, Problemas.

Resumen

El taller está destinado a docentes de Matemática del Secundario o Bachillerato, interesados en revisar o adquirir conocimientos sobre Probabilidades Geométricas. Desde el punto de vista didáctico, la enseñanza del concepto de probabilidad puede integrarse con conceptos geométricos elementales y familiares, con problemas históricos y paradojas clásicas. Se propondrá integrar conocimientos de Geometría y Probabilidades, con una breve exposición introductoria, y la resolución de algunos problemas geométricos relacionados con procesos aleatorios en contextos significativos. En las construcciones geométricas, la posibilidad o no de poder ser realizadas son ejemplos naturales de cuestiones de probabilidad. Se mostrarán algunos ejemplos de probabilidades que pueden materializarse con papel, tijeras y plegados, con diferentes niveles de complejidad. Se propondrán situaciones problemáticas que propicien la utilización y el desarrollo de diferentes formas de representación y favorezcan la reflexión y la comunicación. La variedad de representaciones de los problemas se apoyará en el empleo de algunas herramientas informáticas conocidas y de sencilla implementación en las aulas escolares (Geogebra, planilla de cálculo Excel). Se realizará también un análisis didáctico de las distintas posibilidades de formalización y justificación de los resultados en relación con los aprendizajes adquiridos, y los recursos conceptuales disponibles.

Introducción.

Hace ya más de dos décadas, el Dr. Miguel de Guzmán (1993) señaló una profunda depresión del pensamiento geométrico en la enseñanza matemática. En muchos ámbitos escolares este problema persiste aún: los contenidos de geometría están presentes en los currículos vigentes, pero en la práctica muchas veces quedan relegados, en tanto que contenidos numéricos, de álgebra pura o de geometría analítica adquieren mayor grado de desarrollo.

ISBN 978-84-945722-3-4

Existen investigaciones, como la de Báez e Iglesias (2007), que señalan dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, debidas a que los docentes no desarrollan contenidos establecidos en los programas, por falta de conocimientos académicos, o por desconocer su importancia. Por otra parte, como señala Tejada (2001), el docente es un mediador más entre el currículo y la situación real en la que se desarrolla, dado que interpreta y redefine la enseñanza en función de su conocimiento práctico, de su manera de pensar y entender la acción educativa. En este sentido la capacitación docente permanente opera como una herramienta necesaria para la revalorización de los contenidos de geometría y sus conexiones con otras áreas del saber, propiciando una comprensión más completa del mundo que nos rodea.

La lógica pedagógica que se pretende transmitir está basada en el aprendizaje del alumno, posicionado en un rol central como actor proactivo, creativo e investigador, que trabaja con modelos geométricos dentro de un marco de razonamiento espacial como dispositivo para descubrir la geometría que subyace en el entorno.

Referencias teóricas y orientaciones iniciales

Fouz (1994) señala entre los objetivos de la enseñanza de la geometría la conexión con otras áreas de la matemática u otras disciplinas técnicas, y con el proceso histórico seguido en su evolución que permite apreciar su aporte a la creación y el desarrollo de otras áreas del conocimiento.

Si se considera el experimento aleatorio que consiste en tomar al azar un punto de un cuadrado, y se quiere calcular la probabilidad de que tal punto pertenezca al círculo inscripto en dicho cuadrado, no es factible utilizar la definición clásica de Laplace, contando casos favorables y posibles. El problema se resuelve mediante la definición de probabilidad geométrica, como relación de medidas, efectuando el cociente entre el área del círculo inscripto y el área del cuadrado. Así, desde el punto de vista didáctico, para lograr un aprendizaje significativo, el abordaje del concepto de probabilidad puede integrarse con conceptos geométricos elementales y familiares, por medio de problemas que favorecen el establecimiento de conexiones entre áreas matemáticas, y de relaciones conceptuales significativas entre contenidos. La probabilidad geométrica está estrechamente relacionada

ISBN 978-84-945722-3-4

con un enfoque “a priori” de la probabilidad que permite el cálculo antes de realizar pruebas aleatorias. Pero, en definitiva, como indica Sáenz de Castro (s. f.):

… [H]ay muchos caminos para introducir los conceptos probabilísticos. Por ejemplo, el modelo de frecuencia relativa trata con datos discretos mientras el modelo de proporción, especialmente la probabilidad geométrica, puede tratar con datos continuos. Si adoptamos una perspectiva de modelización para la enseñanza de la probabilidad, los conflictos entre un enfoque clásico de equiprobabilidad, un enfoque de frecuencia relativa o un enfoque subjetivista, no tienen por qué ser un obstáculo en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por el contrario, se debe equipar a profesores y alumnos con representaciones múltiples de probabilidad; es lo que Steinbring (1991) llama situaciones significativas.

Se plantea una perspectiva didáctica alineada con la Educación Matemática Realista, Bressan (2016), teoría que considera que partir de contextos y situaciones problemáticas realistas, en el sentido de representables, razonables, imaginables para los alumnos, resulta una acción generadora de su actividad matematizadora.

El presente cursillo pretende ser un aporte que permita a los participantes:

- Asumir un rol activo para resolver y analizar problemas aptos para ser desarrollados en cursos escolares, realizar un análisis conceptual y didáctico de los mismos y establecer líneas de trabajo para un futuro próximo en sus ámbitos de trabajo.
- Destacar el rol interdisciplinario e integrador de las probabilidades geométricas y conocer algunas de sus aplicaciones reales, con distintos grados de complejidad: problemas de agrimensura, cartografía, la geometría integral y la estereología, la tomografía computada, etc.

Temas por tratar.

Las probabilidades geométricas como fuente de ejemplos para la enseñanza de las probabilidades en la escuela. Síntesis histórica; la aguja de Buffon, paradoja de Bertrand. Azar y construcción de triángulos. Problemas de encuentro. Simulaciones y visualizaciones. El rol de la tecnología.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Algunos ejemplos.

La posibilidad o imposibilidad de realizar construcciones geométricas proporciona ejemplos naturales de cuestiones de probabilidad. Como problemas iniciales básicos se mostrarán algunos ejemplos de probabilidades relacionados con triángulos y otras figuras geométricas simples, que pueden materializarse con papel, tijeras y plegados, entre los que citamos:

- Un vértice de un triángulo isósceles se toma al azar, y se dobla el triángulo hasta hacer coincidir ese vértice con el punto medio del lado opuesto. ¿Cuál es la probabilidad de que se forme un trapecio? ¿Y un trapezoide? ¿Y si el triángulo es equilátero?
- Un vértice de un cuadrado de papel se hace coincidir con otro vértice tomado al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que se forme un triángulo?
- Si se toma al azar un vértice de un triángulo isósceles, y se dobla el triángulo haciendo coincidir ese vértice con cualquier punto del lado opuesto, ¿cuál es la probabilidad de que se forme un trapecio?

El documento del *National Council of Teachers of Mathematics* (2000) destaca la importancia de la representación como un proceso matemático, que implica el uso de recursos verbales, simbólicos y gráficos, traducción y conversión entre los mismos. Se propondrán situaciones problemáticas que propicien la utilización y el desarrollo de diferentes formas de representación y favorezcan la reflexión y la comunicación:

- En el interior de un cuadrado $ABCD$ se elige un punto P al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el triángulo ABP sea obtusángulo? ¿Acutángulo? ¿Rectángulo?
- Dos números x e y se eligen al azar, con $0 < x < 4$, $0 < y < 4$. Calcular la probabilidad de que la suma de ambos números sea mayor que el producto.

La variedad de representaciones de estos problemas se apoyará en el empleo de algunas herramientas informáticas conocidas y de sencilla implementación (Geogebra, planilla de cálculo Excel), y de recursos de Internet para la realización de simulaciones, tablas y gráficos. Se propiciará también el análisis didáctico de las distintas posibilidades de formalización y justificación de los resultados en relación con los aprendizajes adquiridos y los recursos conceptuales disponibles.

ISBN 978-84-945722-3-4

Referencias bibliográficas.

Báez, R. e Iglesias, M. (2007). Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL "El Mácaro". *Enseñanza de la Matemática* 12-16, (número extraordinario), 67-87.

Bressan, A.; Gallego, M.; Pérez, S.; Zolkower, B. Educación Matemática Realista Bases teóricas. Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática. Enero 2016. http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2016/03/Modulo_teoria_EMR-Final.pdf. Consultado 17/03/2017

De Guzmán, M. (1993). *Tendencias innovadoras en Educación Matemática*. http://www.oei.es/edumat.htm. Consultado 17/03/2017.

Fouz, F. (1994). Reflexiones en torno a la didáctica de la geometría. *Aula de Innovación Educativa*, 22, 11-16.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Sáenz de Castro, C. (s. f.) Probabilidad. Capítulo 5: La enseñanza de la probabilidad. Un problema pendiente.
https://www.uam.es/servicios/apoyodocencia/ice/cesar/Capitulo%205.doc Consultado 17/03/17.

Tejada, J. (2001) Función docente y formación para la innovación. EDUCAME, *Revista de la Academia Mexicana de la Educación*, 4(4), 111-138.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-754

MEJORA LA GESTIÓN DE TU AULA DE MATEMÁTICAS CON LOS GRUPOS DE GEOGEBRA

Manel Martínez i Pascual[1] – Carlos Giménez Esteban[2]
mmart659@xtec.cat – cgimene1@xtec.cat
[1,2]Associació Catalana de GeoGebra (España)
[1]La Salle Bonanova – [2]Col·legi Sant Gabriel de Viladecans

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
Modalidad: Taller
Nivel educativo: Enseñanza secundaria en general; ESO y bachillerato
Palabras clave: GeoGebra, grupos, EVA, comunicación

Resumen

La reciente aparición de los grupos de GeoGebra *supone un salto cualitativo en las posibilidades que nos ofrece GeoGebra como herramienta didáctica.*
Si hasta hace poco era indiscutible el carácter de estándar de facto de GeoGebra como instrumento para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la etapa de educación secundaria, ahora los grupos de GeoGebra *permiten también gestionar el aula de matemáticas dentro de un Entorno Virtual de Aprendizaje (EVA) centrado en GeoGebra, permitiendo interacciones más ricas de los alumnos entre sí, de éstos con el profesorado o entre el equipo de docentes.*
De esta manera, los grupos de GeoGebra *constituyen el entorno ideal para facilitar la comunicación en todas las direcciones, potenciar el trabajo colaborativo y agilizar la evaluación del proceso de aprendizaje de los alumnos; todo ello con la máxima flexibilidad y con la posibilidad de ilustrar* in situ *cualquier concepto matemático con materiales diversos.*
En este taller mostraremos los aspectos técnicos de creación y administración de un grupo de GeoGebra*, compartiremos ejemplos de nuestro trabajo en este entorno y acompañaremos a los participantes en el proceso de descubrimiento del potencial de esta nueva herramienta.*

En qué consiste un *grupo de GeoGebra*

Un *grupo de GeoGebra* es un *Entorno Virtual de Aprendizaje* (EVA) centrado en el uso de este programa informático y dotado de las herramientas y funcionalidades necesarias para su creación y administración, para la publicación y difusión de materiales propios o compartidos por otros autores, para la interacción entre todos sus miembros y para la gestión de la evaluación; en suma, herramientas que permiten la construcción cooperativa de conocimiento matemático.

ISBN 978-84-945722-3-4

Oportunidades que nos ofrecen los *grupos de GeoGebra*

Las aulas de matemáticas de secundaria presentan una serie de variables, como la cantidad de alumnos y la diversidad de ritmos de aprendizaje e intereses de los mismos, que difícilmente son controlables por el docente y que, en muchos casos, le generan insatisfacción.

En el momento actual, un gran número de profesores se preocupan por introducir cambios metodológicos en sus aulas con el fin de mejorar la atención que ofrecen a las peculiaridades de su alumnado.

Con el objetivo de introducir estas mejoras, en la dinámica del aula aparecen diversas propuestas pedagógicas; algunas basadas en promover la *matemática vivencial*, la *manipulativa*, la *gamificación*, o el uso de la tecnología como recurso de aprendizaje.

Sin duda, uno de los aspectos más relevantes del cambio en nuestra actividad docente es la necesidad de mantener una adecuada comunicación con nuestros alumnos, nativos de la sociedad *hiperconectada* en la que vivimos todos inmersos, y dónde no se concibe restringir la relación interpersonal a un marco rígido como es el que se impone en un aula presencial clásica.

En este contexto, GeoGebra se nos presenta, no sólo como un programa informático más, sino que sus nuevas funcionalidades lo convierten en un entorno de trabajo virtual ideal, ya que permite dar respuesta a muchas de las necesidades que existen en la actualidad en la gestión del aula, particularmente al facilitar la interacción asíncrona entre profesor y alumno.

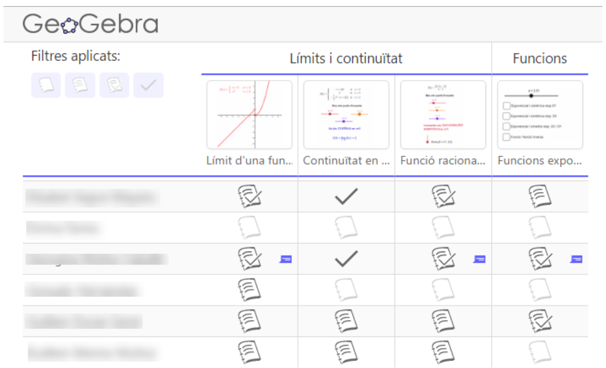
En este punto clave de la comunicación – interacción, los *grupos de GeoGebra* facilitan enormemente el establecimiento y mantenimiento de nuevas formas de intercambio de información y colaboración que hasta ahora no eran posibles -en un entorno dónde el lenguaje matemático es el protagonista- que mejoran las dinámicas convencionales (profesor-profesor, profesor-alumno, alumno-grupo) y que introducen algunas nuevas posibilidades, como la creación de grupos de trabajo virtuales formados por alumnos de diferentes centros, tal y como se explicará más adelante.

Respecto de los contenidos, los *grupos de GeoGebra* permiten incluir diversos tipos de materiales, ya sea elaborados por el propio docente, por un departamento didáctico de forma cooperativa u obtenidos a partir de materiales públicos ofrecidos por otros autores.

ISBN 978-84-945722-3-4

Los diferentes formatos que pueden ser incorporados como material didáctico en un *grupo de GeoGebra* incluyen textos, imágenes, videos, *hipervínculos* a recursos externos, archivos en formato .pdf, expresiones matemáticas escritas en un editor visual de LATEX incorporado, iconos propios de GeoGebra y, por supuesto, construcciones dinámicas realizadas con GeoGebra que conservan *in situ* la capacidad de ser manipuladas por los alumnos.

Por otra parte, los *grupos de GeoGebra* disponen de herramientas que facilitan enormemente el proceso de evaluación formativa de la actividad de los alumnos, más allá de la simple evaluación calificadora. En este sentido cabe destacar las siguientes características del sistema:



16 panel de control de las actividades evaluables

- Las actividades propuestas por el profesor se presentan al alumno intercaladas en el propio entorno de trabajo, acompañadas de las explicaciones teóricas necesarias en cada caso.
- Los tipos de actividades evaluables que se pueden incorporar son: preguntas abiertas, preguntas de respuesta múltiple y propuestas de construcciones con GeoGebra que el alumno debe realizar en el propio entorno.
- El profesor dispone de un *panel de control* desde el cual puede hacer un seguimiento de forma visual del estado de realización de las tareas de cada alumno en cualquier momento.
- **La interacción alumno-profesor queda garantizada en este nivel gracias a la posibilidad, por ambas partes, de añadir comentarios privados en cada actividad, que resultan**

17 Interacción alumno - profesor

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

de gran ayuda, tanto al alumno para expresar sus dificultades como al profesor para realizar las indicaciones oportunas.

A continuación, intentaremos **proporcionar un pequeño tutorial** con las instrucciones mínimas necesarias para crear y gestionar un *grupo de GeoGebra*, **relatar nuestra experiencia** personal de su uso en el aula y **compartir algunas reflexiones** sobre los resultados obtenidos.

Pequeño tutorial para el trabajo con los *grupos de GeoGebra*

Creación de un nuevo grupo

En primer lugar, todos los miembros de un grupo deben disponer de una cuenta personal de GeoGebra, para lo cual deben darse de alta previamente en el portal https://www.geogebra.org.

La persona responsable de la creación del grupo deberá clicar en el botón "*Nuevo*", que le aparecerá en el margen superior derecho de su espacio personal, y seleccionar la opción "*Nuevo Grupo*".

A continuación, deberá especificar la información requerida, particularmente los permisos de publicación, incorporación de nuevos recursos o edición de los existentes, que puede restringir a los propietarios o autores (profesores) o ampliarlo a todos los miembros (alumnos). Estos parámetros podrán ser modificados posteriormente en cualquier momento, accediendo a la opción "*Configuración del grupo*".

Alta de nuevos participantes en el grupo creado

ISBN 978-84-945722-3-4

La persona creadora del grupo debe invitar a los nuevos participantes, accediendo a la pestaña "*Miembros*" dentro del grupo e introduciendo uno a uno sus nombres de usuario o direcciones de correo electrónico, o de forma más cómoda puede facilitar a sus alumnos el código de cinco caracteres que aparece en este mismo lugar y que cada nuevo miembro deberá utilizar para unirse al grupo desde su propio espacio personal (clicando en "*Nuevo*" y escogiendo la opción "*Unirse a un grupo*").

18 aspecto característico de un *grupo de GeoGebra*

Apariencia del grupo

Un *grupo de GeoGebra* se presenta con la apariencia típica de "*muro*" propia de diversas redes sociales, por lo cual será inmediatamente reconocible para nuestros alumnos la mecánica de trabajo, evitando así la necesidad de aprendizaje de un nuevo entorno.

En este "*muro*" el profesor y los usuarios autorizados, realizarán "*publicaciones*" ("*posts*") que aparecerán ordenadas cronológicamente y que podrán contener cualquier material de los indicados anteriormente; incluyendo o no actividades evaluables.

Todas las publicaciones admiten comentarios por parte de cualquiera de los miembros del grupo. Estos comentarios serán siempre públicos y por lo tanto visibles para todos.

Gestión de un grupo de GeoGebra

La gestión del grupo resulta extremadamente sencilla. Existen solo cuatro apartados:

- "*Publicaciones*": permite añadir materiales, publicaciones y comentarios, así como moderar los existentes.
- "*Miembros*": permite dar de alta o de baja a los usuarios del grupo y asignarles el rol adecuado ("propietario", equivalente a profesor y "miembro", equivalente a alumno).

- "*Recursos*": permite añadir, suprimir, editar, asignar visibilidad, compartir y organizar los materiales existentes en el grupo.
- "*Evaluación*": da acceso al *panel de control* dónde se puede observar el estado de cada alumno con respecto a las actividades evaluables; evaluar las entregadas, leer los comentarios privados y añadir retroacciones si es necesario.

19 Estructura de contenidos de un *libro de GeoGebra*

Contenidos

Como se ha dicho anteriormente, las publicaciones pueden incorporar cualquier tipo de material admitido por el sistema. Obviamente este apartado es el núcleo del grupo y el que le dota de sentido.

En la actualidad existen multitud de plataformas y entornos virtuales diversos que funcionan básicamente con el mismo tipo de dinámica, pero el valor añadido que suponen los *grupos de GeoGebra* es la posibilidad de **poner el foco permanentemente en el trabajo sobre y con las matemáticas.**

La posibilidad de incorporar directamente los contenidos de un *libro de GeoGebra* creado previamente facilita en gran medida dotar a estos contenidos de una estructura coherente.

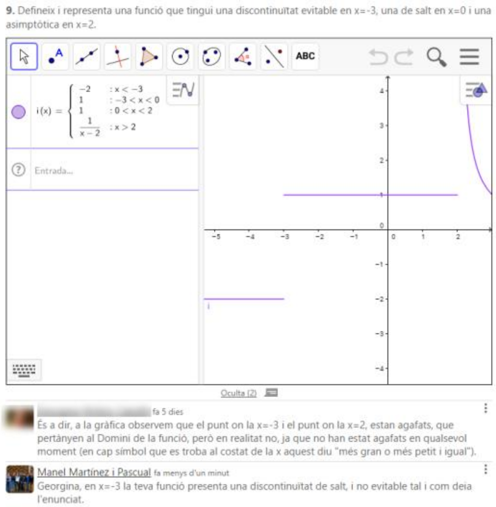
Notificaciones

Los "*propietarios*" (profesores) de un grupo de GeoGebra recibirán notificaciones por correo electrónico que les informarán de las actividades de los "*miembros*" (alumnos). Es importante configurar la frecuencia de estas notificaciones de acuerdo con las preferencias de cada profesor; puede variar desde recibir un correo electrónico cada vez que un alumno realiza alguna acción en el grupo, hasta recibir un único resumen horario, diario o semanal. Dicha configuración debe realizarse en el perfil personal de la cuenta de usuario de GeoGebra.

ISBN 978-84-945722-3-4

Evaluación

Tal y como se ha señalado anteriormente, este es uno de los aspectos más notables de un *grupo de GeoGebra*; la posibilidad de intercalar actividades evaluables directamente en cualquier lugar de una publicación, con el objetivo de reforzar el aprendizaje. Se ha comentado también la comodidad del *panel*
de control que permite hacer un seguimiento activo del progreso de cada alumno, permitiendo en todo momento la interacción entre profesor y alumno en cualquier dirección.



20 Ejemplo de interacción en la resolución de una actividad

Experiencia de aula con un *grupo de GeoGebra*

Nuestra experiencia de aula ha consistido en la creación, configuración y gestión de un *grupo de GeoGebra* dirigido a nuestros alumnos de matemáticas de 1º de bachillerato de la modalidad científico-tecnológica, en el cual hemos participado nosotros mismos como docentes, y nuestros alumnos, pertenecientes a dos centros educativos diferentes (La Salle Bonanova de Barcelona y El Colegio Sant Gabriel de Viladecans) durante el curso académico 2016-17.

El objetivo de esta experiencia ha sido el de validar este nuevo entorno como herramienta de gestión de aula y juzgar a partir de su uso el valor añadido que puede suponer su implementación como Entorno Virtual de Aprendizaje en el aula de matemáticas.

Para poder poner en marcha la experiencia fue necesario en primer lugar un esfuerzo compartido para unificar criterios de todo tipo por parte de los dos profesores implicados. Este ejercicio, tan poco frecuente, supuso un reto y a la vez resultó muy enriquecedor. **Poner**

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

de vez en cuando en cuestión la propia forma de trabajar frente a un colega debería ser una práctica más habitual en nuestra profesión.

Desde el primer momento intentamos aprovechar al máximo las posibilidades de interacción que ofrece este entorno, de tal manera que los contenidos y las actividades evaluables que propusimos a nuestros alumnos intentaban estar siempre orientadas a facilitar una mejor evaluación formativa de sus aprendizajes, provocando en todo momento que realizaran todas las intervenciones necesarias para manifestar sus dudas y dificultades.

En este sentido, para favorecer también el aprendizaje entre iguales, organizamos el trabajo de manera que cada semana un equipo de tres o cuatro alumnos, de forma rotatoria, se encargara de moderar los debates surgidos y de facilitar aclaraciones; que fueran responsables de la resolución de las actividades propuestas y que tuvieran la posibilidad de aportar material extra.

Conclusiones

GeoGebra ha dado un salto cualitativo ofreciendo respuestas a las necesidades que actualmente existen en el marco del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. En particular, los grupos nos han permitido tener un entorno virtual de aprendizaje donde:

- Organizar los recursos en unidades didácticas y gestionarlos en función de las necesidades del grupo.
- Colaborar con otros docentes para discutir qué materiales eran los adecuados, unificar criterios de evaluación, consensuar metodologías de explicación y aplicación en el aula, etc. En definitiva, gestionar el departamento.
- Mejorar la atención individualizada de los alumnos, haciendo hincapié en sus necesidades y particularidades, gracias al sistema de comunicación y evaluación.
- Utilizar tanto los materiales propios como los generados por otros profesores, compartidos en el entorno www.geogebra.org.
- Poner en práctica y potenciar el aprendizaje por competencias, el razonamiento, la discusión y la creación de conocimiento matemático.
- Trabajar de forma cooperativa y entender que el aprendizaje se construye mejor con la colaboración de todos los miembros del grupo.

- Reunir alumnos y docentes de diferentes centros docentes en un mismo grupo de aprendizaje, enriqueciéndonos todos de la suma de individuos.

Cabe señalar que la respuesta de los alumnos, tras una fase inicial de adaptación al nuevo entorno, ha sido en general muy positiva, valorando especialmente la posibilidad de interacción que permite el entorno.

A partir de esta experiencia esperamos animar a otros profesores a crear *grupos de GeoGebra* con sus alumnos, así como potenciar la creación de grupos compartidos con otros docentes, con la finalidad de hacer crecer esta red de conocimiento para mejorar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Referencias bibliográficas

Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya (2017). *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic*. http://ensenyament.gencat.cat/web/.content/home/departament/publicacions/colleccions/competencies-basiques/eso/eso-matematic.pdf. Consultado 17/4/2017.

Giménez, C. (2016). GeoGebra: ¿un juguete para el profesor o una herramienta para el alumno? *Uno. Didáctica de las matemáticas* 71, 26-32.

International GeoGebra Institute (2016). *¿Qué son los grupos de GeoGebra?* https://www.geogebra.org/b/Ucar7PHU. Consultado 17/04/2017.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-757

ÁREAS SIN RECETA

Ana Belén Petro Balaguer * – Ana Belén Montoro Medina * – Francisco Gil Cuadra**
anabelen.petro@uib.es – ana.montoro@uib.es - fgil@ual.es
(*) Universidad de las Islas Baleares (España) – (**) Universidad de Almería (España)

Núcleo temático: V. Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Modalidad: T
Nivel educativo: Primaria
Palabras clave: Medida, Áreas, Geoplano, Aritmetización

Resumen
¿Qué significa el concepto de área? ¿Qué dificultades encuentran nuestros alumnos en las fórmulas de las áreas de figuras planas? ¿Es necesario memorizarlas todas? ¿Es posible su comprensión en lugar de su memorización? ¿Por qué la primera fórmula de área que se proporciona es la del cuadrado? ¿Cómo nos pueden ayudar los materiales manipulativos en el aprendizaje significativo de estas fórmulas?
En este taller pretendemos trabajar la construcción de las fórmulas de áreas de las figuras planas de forma significativa. Para ello, y con la ayuda del geoplano y del uso de diferentes figuras planas, intentaremos seguir una breve secuencia didáctica donde la base de las fórmulas será un triángulo equilátero. Esto permitirá darse cuenta de que las fórmulas dependen de la unidad elegida para medir y aprehender las dificultades en las que se encuentran nuestros alumnos durante su aprendizaje. Haremos hincapié en que las estrategias de composición y recomposición de figuras para obtener fórmulas deberían ser las herramientas básicas en la medida del área, entendiendo esta como el pavimento de una superficie con una figura dada (unidad). Además se trabajará la búsqueda de regularidades numéricas en una sucesión de números, conectando así Álgebra y Medida.

La mayoría de las personas recuerdan haber trabajado el cálculo de áreas en sus clases de matemáticas, generalmente en los últimos cursos de primaria y durante la secundaria. Pero si preguntamos qué es el área de una figura cualquiera, casi todas tienen dificultades a la hora de explicar este concepto, por lo que harán referencia únicamente a fórmulas para su cálculo. El área es un concepto considerado como imprescindible por la mayoría del profesorado de matemáticas y al que se le dedica tiempo y esfuerzo, pero, ¿cómo se debería trabajar este concepto?

Si consultamos el término área en el Diccionario de la Real Academia Española, nos encontramos con dos acepciones de este término:

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

- Superficie comprendida dentro de un perímetro.
- Extensión de la superficie del área expresada en una determinada unidad de medida.

Esta doble acepción se refleja en el currículum de primaria que establece estándares evaluables relativos al cálculo de áreas en dos de los cuatro bloques de contenidos: Medida y Geometría. Así, en el bloque de Medida, encontramos diferentes estándares de aprendizaje evaluables que nos hablan de aprender a medir, a usar los instrumentos y elegir unidades adecuadas para medir las superficies. Concretamente, nos indica que los estudiantes deben ser capaces de "comparar superficies de figuras planas por superposición, descomposición y medición" (MECD, 2014). Por otro lado, en el bloque de Geometría se nombra como contenido "Perímetro y Área", especificando que deben "comprender el método para calcular el área de un paralelogramo, triángulo, trapecio y rombo", y ser capaces de calcular el área y perímetro del cuadrado, rectángulo, triángulo y círculo, aplicándolos en planos y espacios reales, para comprender situaciones de la vida diaria. De igual forma, en los Estándares para la Educación Matemática del NCTM (Ferrini-Mundy y Martín, 2000; NCTM, 1991), en el tema de medida, nos habla de la aplicación de una variedad de técnicas y herramientas para resolver problemas relativos a la medida de longitudes y áreas, entre las cuales aparecen las fórmulas de cálculo de áreas. Ambos documentos, dejan claro la necesidad del trabajo en el campo de la medida de la magnitud de superficie.

Moreno, Gil y Montoro (2015) nos indican que:

> "Trabajar las magnitudes básicas y su medida con escolares es mucho más que manejar fórmulas, memorizar un sistema estructurado de unidades o transformar unas unidades en otras. La medida de una magnitud es un proceso complejo que se inicia con la construcción de la magnitud y se completa con sus instrumentos, sus técnicas de medida y las estrategias para su estimación" (p.153).

Para establecer una base fuerte en la construcción del concepto de medida de una magnitud es necesario trabajar la comparación directa de magnitudes y crear la necesidad del uso de intermediarios cuando esta no es posible. Así, la medida surgirá como una comparación con una unidad o referente, generalmente, más pequeña que el objeto a medir, trabajando la selección de unidades adecuadas para la medida de los objetos y aprovechando cualquier oportunidad para realizar estimaciones previas a la medida. Se ha de mostrar las ventajas e inconvenientes del uso de unidades corporales y crear la necesidad del uso de unidades

ISBN 978-84-945722-3-4

estándar. Los contextos de comunicación y la historia del comercio nos pueden ayudar a mostrar el porqué de su aparición. Por último, destacar la importancia de la utilización de instrumentos de medida usuales y el carácter aproximado de la medida (Moreno et al, 2014).

La medida de la magnitud superficie (y volumen) cuenta, además, con una última etapa caracterizada por el uso de fórmulas que permiten calcular el área de una figura plana conociendo la longitud de algunos de sus elementos. En cambio, con demasiada frecuencia, se introduce esta etapa prematuramente, omitiendo la etapa de comparación por superposición de figuras y/o por composición y descomposición (Barba y Calvo, 2014).

La etapa de comparación es básica, ya que ayuda a los escolares a discriminar el tamaño de la superficie (su medida) de otras propiedades como son su forma o su perímetro (Godino, Batanero y Roa, 2002), ayudando a eliminar uno de los errores más frecuentes acerca del área, como es la confusión del perímetro y el área (Algar, Gómez, Gutiérrez-Rave y Pérez, 1991). Además, realizar actividades en las que se compare la superficie de distintas figuras construidas con una cuerda fija (mismo perímetro) y otras en las que se compare el perímetro de figuras construidas con una superficie concreta (misma superficie), trabajadas adecuadamente ayuda a trabajar la concepción errónea de las figuras que tienen mayor superficie tienen mayor perímetro, y por tanto, que comparar el perímetro de una figura plana es una estrategia inadecuada para conocer qué figura tiene mayor superficie (Olmo, Moreno y Gil, 1989).

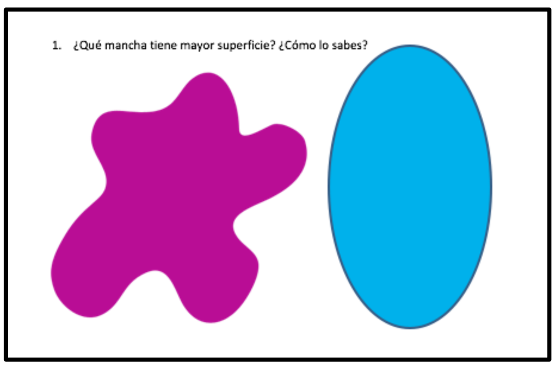


Figura 1. Actividad 1: Comparación de superficies.

Por tanto, en nuestro taller, empezaremos con dos actividades en las que trabajaremos la comparación y la ordenación de diferentes figuras. En la primera actividad (Figura 1) se

ISBN 978-84-945722-3-4

pretende que los asistentes al taller comparen la superficie de dos figuras, una figura irregular y un óvalo de aproximadamente la misma superficie. La comparación visual no permite obtener una conclusión, lo que nos llevará a la superposición de las dos figuras. Los asistentes dispondrán de tijeras para poder recortar estas figuras y realizar la superposición.

En la segunda actividad del taller (Figura 2), extraída de la página web de Nrich (Wallpaper, 1997-2017), los asistentes dispondrán de una serie de figuras irregulares y deberán ordenarlas de menor a mayor superficie. Estas figuras tienen dibujados en su interior un patrón de puntos y estrellas, que ayudará a introducir la idea de unidad, para poder avanzar en la elección y uso unidades.

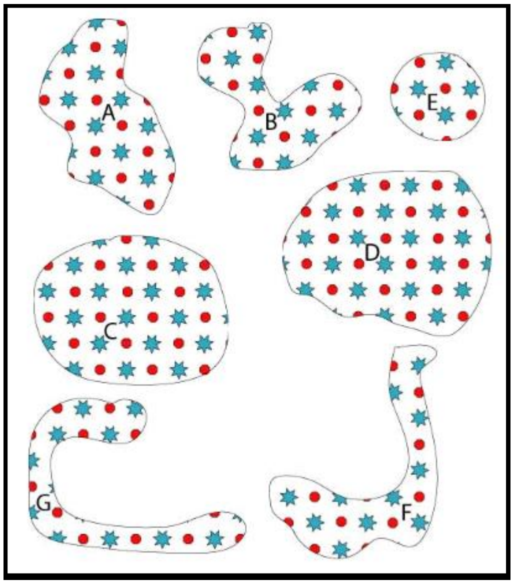


Figura 2. Actividad 2: Ordenación de figuras según su superficie. Extraída de Nrich (http://nrich.maths.org/4964/note)

Posteriormente debemos reforzar el concepto de "Medida del área" como el pavimento de una superficie con una figura dada (unidad). Por tanto, el primer paso en esta etapa debe ser hacer consciente a los asistentes (en su momento, a los alumnos) de qué figuras nos pueden servir para pavimentar, sin dejar agujeros y sin superponerse. Así, podrían trabajarse el cálculo de la superficie de objetos utilizando folios, post-it, azulejos… Con ellas, se trabajará el concepto de superficie y su medida directa, haciéndose evidente la utilidad del uso de

ISBN 978-84-945722-3-4

fórmulas para el cálculo indirecto de la medida de la superficie, dada la cantidad de tiempo y esfuerzo que simplifica. En cambio, cuando en la enseñanza se limita su uso al empleo de fórmulas estamos privando al alumno de la percepción del sentido de las fórmulas, además de no darle la oportunidad de manipular la magnitud antes de medirla. (Segovia, Castro y Flores, 1996).

En definitiva, acordamos con Godino *et al.* (2003) cuando afirma que:

> "Es recomendable que los niños no usen nunca las fórmulas sin que hayan participado en el desarrollo de dichas fórmulas. El desarrollo de las fórmulas por los propios niños es una actividad mucho más importante y significativa que la introducción de números en tales fórmulas. Pero en cualquier caso los alumnos deben comprender previamente el rasgo o característica de los objetos cuyo tamaño se mide mediante las fórmulas (longitudes, perímetros, áreas y volúmenes)" (p. 383).

Como dicen Castro, Flores y Segovia (1997), "con actividades de recubrimiento del plano podemos llegar con los alumnos a la conclusión de que entre las figuras que recubren el plano resaltan dos: el triángulo equilátero y el cuadrado" (p. 25).

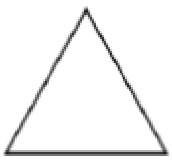
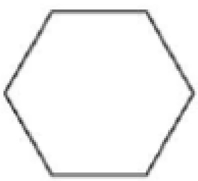
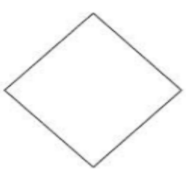
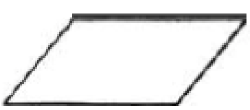
En el taller propondremos el desarrollo de las fórmulas de diferentes polígonos, utilizando como unidad de superficie el triángulo equilátero. De esta forma, los asistentes experimentarán otra forma de aprender este contenido y se enfrentarán a las dificultades propias de los alumnos. Por tanto, en la tercera actividad se les pedirá que, usando el geoplano triangular o papel isométrico, descubran las fórmulas de las áreas de los polígonos de la Tabla 1 usando como unidad el triángulo equilátero. Con esta actividad se pretende trabajar los procedimientos usuales de medida de superficie: *cuadricular* la superficie; descomponer la figura en otras de las que se sabe calcular el área; recortar y mover partes de la figura para componer otra de la que se sabe calcular el área; y componer otra figura que contiene a la dada, de la que se sabe calcular su área y la de los trozos sobrantes (Carrillo *et al.*, 2016).

La idea al realizar esta actividad es que los asistentes detecten las dificultades que han tenido ellos al obtener las fórmulas para comprender las dificultades de sus alumnos, que compartan estrategias e ideas que puedan trasladar a su alumnado y comprendan la dependencia de las fórmulas en función de la unidad. Además, analizaremos la secuencia de aprendizaje propuesta en esta actividad y la adaptaremos para utilizarla en el aula de primaria y secundaria en el aprendizaje de las fórmulas estándar.

ISBN 978-84-945722-3-4

Por último, ayudándonos de geoplanos cuadrangulares y la actividad 2, introduciremos una actividad de búsqueda de patrones que consiste en descubrir la Fórmula de Pick (Tabla 2).

Otro aspecto importante en la trayectoria de enseñanza-aprendizaje de la magnitud superficie es el uso de instrumentos, que hemos trabajado en las últimas actividades del taller ya que, como nos indica Godino *et al* (2002), el geoplano y las hojas isométricas se pueden considerar como “reglas de medir áreas”. Debemos tener en cuenta, como nos indican Barba y Calvo (2015), que combinar los geoplanos manipulativos (para experimentar), los de papel (para registrar las soluciones) y los virtuales (para compartir las soluciones) es la mejor experiencia que podemos ofrecer a nuestros alumnos, y es lo que se intenta hacer en nuestro taller.

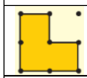
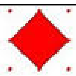
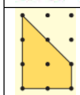
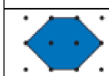
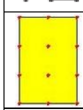
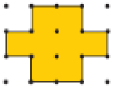
Figura	Justificación	Fórmula
 Triángulo equilátero		
 Hexágono regular		
 Rombo		
 Romboide		

ISBN 978-84-945722-3-4

Rectángulo		

Tabla 1. Actividad 3: Búsqueda de fórmulas para el cálculo de superficies de polígonos usando como unidad el triángulo equilátero.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Figura	Puntos interiores	Puntos frontera	Área
	0	4	1
	0		
			
	0		
	0		
	1	4	2
	1		
	1		
	1		
	1		
	2	6	4
	2		
	2		
	2		
	2		

ISBN 978-84-945722-3-4

Tabla 2. Actividad 4: Fórmula de Pick.

Referencias bibliográficas

Algar, C., Gómez, M.J., Gutiérrez-Ravé, A., y Pérez, A. (1991). *Área de figuras planas*. http//www.ugr.es/~sevimeco/documentos/edu_multimedia/area Consultado 10/04/2017.

Barba, D. y Calvo, C. (2014). Algunas actividades para hablar de medida. *Suma* 77, pp. 77-84.

Barba, D. y Calvo, C. (2015). Manipular, representar y describir figuras planas. *Suma* 79, pp. 85-92.

Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Montes, M. A., Escudero, D.I. y Flores, E. (2016). *Didáctica de las matemáticas para maestros de educación matemática*. Madrid. Ediciones Paraninfo.

Castro, E., Flores, P. y Segovia, I. (1997). Relatividad de las fórmulas del cálculo de superficie de figuras planas. *Suma* 26, pp. 23-32

Ferrini-Mundy, J. y Martín, W.G. (Eds.) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, NCTM.

Godino, J.D., Batanero, C. y Roa, R. (2002). Medida de las magnitudes y su didáctica para maestros. En Godino J.D. (Ed.), *Matemáticas y su didáctica para maestros* (pp. 607- 692). Granada, España: Proyecto Edumat - Maestros.

MECD (2014). Real Decreto 126/2014 de 28 de Febrero, por el que se establece el currículo básico de Educación Primaria. *BOE* nº 52, 1 de Marzo de 2014.

Moreno, M.F., Gil, F. y Montoro, A. B. (2015) Sentido de la medida. En L. Rico y P. Flores. (Eds.) *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 145-168). Madrid: Síntesis.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sevilla, SAEM THALES.

Olmo, M. A. del, Moreno, M.F. y Gil, F. (1989). *Superficie y volumen: ¿algo más que el trabajo con fórmulas?*. Madrid: Síntesis.

Segovia, I., Castro, E. y Flores, P. (1996). El área del rectángulo. *UNO* 10, pp. 63-77.

Wallpaper (1997- 2017). Nrich - *Enriching mathematics.* http://nrich.maths.org/4964/note Consultado 10/04/2017.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-782

QUAL É A MINHA CHANCE? O USO DE JOGOS NO ENSINO DE PROBABILIDADE

Rossano Evaldt Steinmetz Ribeiro – Elisa Daminelli – Gabriel de Souza Pinheiro
evaldt.rossano@gmail.com - daminelli.elisa@gmail.com - gabrielpmatematica@gmail.com
UNICNEC/Brasil – IFRS/Brasil – UNICNEC/Brasil

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Modalidad: Taller
Nivel educativo: Nivel educativo terciario o Bachillerato (16 a 18 años)
Palabras clave: Probabilidade, Jogos, Ensino Médio, Cenários para Investigação.

Resumo

Esta oficina tem a finalidade de apresentar atividades para o ensino de Probabilidade, no Ensino Médio, através do recurso de jogos. Em geral, os estudantes apresentam dificuldades na compreensão de conceitos de Probabilidade, muitas vezes porque os resultados contradizem concepções intuitivas. A utilização de jogos permite o desenvolvimento de estratégias que são intuitivas, e a discussão, sobre essas estratégias, possibilita introduzir conceitos básicos de Probabilidade, bem como avançar para discussões mais complexas partindo de situações vivenciadas em sala de aula. As atividades propostas foram testadas e validadas como parte de uma sequência didática para o ensino de Probabilidade, desenvolvida como trabalho de conclusão do curso de Licenciatura em Matemática de um dos autores. Como referencial teórico metodológico utiliza-se a concepção de Cenários para investigação de Skovsmose. Inicialmente, apresenta-se o tema e algumas atividades tradicionais utilizadas no ensino de Probabilidade, como lançamento de dados e moedas. Em seguida, realiza-se a atividade com o primeiro jogo, que usa como contexto os filmes da série "Star Wars" e tem como objetivo introduzir conceitos básicos de Probabilidade. Na sequência, apresenta-se o jogo "porrinha", com o objetivo de introduzir a ideia Probabilidade Condicional. Por fim, apresentam-se alguns problemas de Probabilidade para discussão com os participantes.

Introdução

Esta oficina apesenta uma proposta com atividades para o ensino de Probabilidade com estudantes do Ensino Médio. A oficina é constituída de quatro atividades, distribuídas durante as duas horas destinadas ao encontro. O objetivo da oficina é proporcionar a discussão de conceitos de Probabilidade através de atividades que envolvem jogos e situações-problema. A proposta pretende trazer situações e elementos que possam ser utilizados em sala de aula pelos professores de Matemática no ensino de Probabilidade.

ISBN 978-84-945722-3-4

Além de apresentar atividades para o ensino de Probabilidade, esta oficina também tem a preocupação de trazer uma proposta metodológica, para o ensino de Probabilidade, baseada nas concepções de Cenários para investigação de Skovsmose (2008). A oficina busca desenvolver as atividades em um ambiente de aprendizagem investigativo, no qual os estudantes são convidados a interagir com as atividades, estabelecendo estratégias e soluções para as situações apresentadas, possibilitando a compreensão dos conceitos e a construção do conhecimento.

Em geral, observamos que os estudantes apresentam dificuldades na compreensão de alguns conceitos de Probabilidade, principalmente quando envolvem situações em que a resposta ao problema não se apresenta de forma direta ou contradiz a concepção intuitiva sobre a situação. Por outro lado, o pensamento probabilístico é parte importante da formação escolar, sendo necessário, portanto, que se dedique atenção ao seu ensino, buscando atingir de forma satisfatória a compreensão dos estudantes sobre o assunto.

Diante disso, consideramos que uma parte importante do processo de ensino e aprendizagem de Probabilidade está relacionada ao professor, em relação à sua formação, e seu grau de conhecimento sobre o tema. Quando o professor tem bom domínio dos conceitos que serão trabalhados, ele tem maior confiança e consegue aprofundar conhecimentos em sala de aula. Portanto, uma boa formação, que tenha oportunizado ao professor aprofundar suas compreensões de Probabilidade possibilitará um trabalho de melhor qualidade em sala de aula.

Além disso, a forma como o trabalho é realizado em sala de aula também é fator relevante na aprendizagem dos estudantes. Utilizar-se de uma metodologia que possibilite maior participação dos alunos é uma forma de facilitar o processo de ensino e aprendizagem. Portanto, as atividades apresentadas nesta oficina visam também colaborar com a instrumentalização do professor, para que possa realizar um trabalho com o ensino de Probabilidade no Ensino Médio.

Destacamos que as atividades já foram utilizadas em sala de aula, com estudantes do Ensino Médio, durante o estágio obrigatório para a conclusão do curso de licenciatura de um dos autores, e que observamos resultados positivos na participação dos estudantes durante as atividades, demonstrando interesse e curiosidade sobre o tema, e também obtivemos resultados positivos na aprendizagem dos conceitos de Probabilidade que foram trabalhados.

ISBN 978-84-945722-3-4

Fundamentação teórica

O ensino de Probabilidade, embora previsto na matriz curricular brasileira para o Ensino Médio e presente nos concursos vestibulares e na prova do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), é um tema de grande dificuldade para os estudantes, e algumas vezes também para os professores. Essa dificuldade acaba por influenciar a forma como a Probabilidade é tratada em sala de aula. Muitas vezes o tema é abordado de forma rápida, ou superficial, dando ênfase para a aplicação de fórmulas na resolução de exercícios, em geral com menor grau de dificuldade. Essa é, de maneira geral, a forma como ocorre o ensino tradicional da Probabilidade, e também da Matemática na Educação Básica.

Nessa perspectiva Demo (2011) argumenta que o aluno está acostumado à "decoreba" para reproduzir na prova o ensino transmitido em aula. Em contrapartida, o autor afirma que o aluno só aprende, e compreende aquilo que é resultado de sua elaboração própria, ou seja, o conhecimento que foi produzido, construído ou reconstruído a partir da reflexão e argumentação individual sobre o tema. Ainda segundo Demo (2011), o estudante só carrega para a vida o que é fruto de sua própria elaboração, o que foi produzido a partir do seu esforço de sistematização.

Consideramos que o ensino tradicional, baseado na transmissão de informações, são as aulas nas quais o professor apresenta, para uma turma enfileirada em classes, os conceitos matemáticos e resolve alguns exemplos, para depois aplicar uma lista de exercícios similares ao exemplo explicado, e que deve ser resolvida pelos estudantes. A aula tradicional baseia-se na observação e repetição dos passos apresentados pelo professor durante sua explicação. Para Skovsmose (2008), é preciso transpor essa forma de trabalhar a Matemática em sala de aula, saindo do ensino tradicional, o qual ele denomina paradigma do exercício. O autor apresenta como proposta alternativa a ideia de Cenários para investigação. Nessa perspectiva os estudantes são convidados a participar de um ambiente de aprendizagem investigativo, no qual diversas situações podem ser simuladas, proporcionado aos estudantes um espaço para o debate e a argumentação que corroboram a construção do conhecimento.

Skovsmose (2008) apresenta uma matriz com seis ambientes de aprendizagem, na qual são relacionadas duas perspectivas para o ensino de Matemática, o paradigma do exercício e Cenários para investigação, os quais podem ser combinados com uma matriz de três

ISBN 978-84-945722-3-4

referências, Matemática pura, semi-realidade ou realidade. O quadro a seguir representa a matriz de referência adotada pelo autor:

	Exercícios	Cenários para investigação
Referências à Matemática pura	(1)	(2)
Referências à semi-realidade	(3)	(4)
Referências à realidade	(5)	(6)

Figura 3: Ambientes de Aprendizagem[19]

Para Skovsmose (2008), os ambientes de aprendizagem (1), (3) e (5) estão relacionados ao paradigma do exercício, ou à aula tradicional conforme já descrevemos. E os ambientes de aprendizagem (2), (4) e (6) estão relacionados à proposta de Cenários para investigação. Em relação às referências, para o autor, questões relacionadas à Matemática pura são aquelas que envolvem apenas conhecimento matemático, como conceitos, propriedades e demonstrações. No caso da semi-realidade, as questões abordadas podem simular problemas da realidade, exigindo a utilização de outros conhecimentos além daqueles específicos da Matemática pura. E quando se trata de referências à realidade, o autor considera que são aquelas situações que envolvem a busca por soluções de problemas reais, que podem exigir conhecimento inclusive de outras áreas.

Para Skovsmose (2008) é possível trabalhar com situações dos três tipos de referências tanto no paradigma do exercício quanto em cenários para investigação. Aliás, o autor ressalta que é importante também utilizar de exercícios na aprendizagem de Matemática. Portanto, enfatiza que a proposta de Cenários para investigação visa trazer um novo caminho para o ensino de Matemática, mas que pode ser complementado pelo paradigma do exercício. A proposta de Cenários para investigação se difere do paradigma do exercício pela forma como as situações são apresentadas em sala de aula, e principalmente pela forma como o professor

[19] **Quadro utilizado por Skovsmose (2008) para representar os Ambientes de Aprendizagem.**

ISBN 978-84-945722-3-4

vai coordenar as atividades propostas, possibilitando o diálogo, e instigando os estudantes com possíveis cenários que podem ser imaginados ou testados em uma mesma situação.

Transitar por uma proposta de Cenários para investigação pode ocasionar situações que fogem do controle do professor, como situações de conflitos, ou inesperadas, como também podem surgir temas ou conhecimentos com os quais o professor não tem familiaridade. Para Penteado & Skovsmose (2008) essa situação, denominada pelos autores como zona de risco, se contrapõe a zona de conforto, que é marcada pela forma tradicional de ensino. No entanto, para Penteado & Skovsmose (2008) riscos trazem possibilidades de aprendizagem que não estão presentes em uma aula tradicional, os riscos possibilitam que os estudantes possam dialogar e argumentar sobre diferentes situações que podem ser inclusive testadas em experiências. Essa proposta de atividades visa tratar o ensino de Probabilidade em ambientes de aprendizagem de Cenários para investigação, em especial com o auxílio de jogos. As atividades propõem a discussão, e a participação dos estudantes em situações que possibilitem a compreensão dos conceitos de Probabilidade abordados.

Metodologia

As atividades apresentadas e discutidas a seguir visam trazer uma proposta para trabalhar alguns conceitos de Probabilidade no Ensino Médio. Destacamos que as atividades foram pensadas e elaboradas com o intuito de que pudessem ser facilmente utilizadas em sala de aula pelos professores, pois não exigem recursos financeiros ou a utilização de materiais com alto custo, podendo, portanto, serem reproduzidas sem grandes dificuldades.

No primeiro momento, apresentamos uma atividade que envolve lançamento de moedas. Nesta atividade os participantes são posicionados sobre uma linha no chão da sala, e em seguida devem realizar 15 lançamentos de uma moeda, fazendo registro dos resultados obtidos. Quando obtiver o resultado “cara” na moeda o participante deve dar um passo à frente, perpendicularmente a linha na qual foi posicionado, e quando obtiver o resultado “coroa” deve dar um passo para trás. É importante questionar, antes da realização dos lançamentos, sobre o que os participantes esperam do processo. Questões como: “Qual a posição final de cada um?” ou “Como serão os movimentos?” ou se “Um mesmo participante irá cruzar a linha muitas vezes?”.

ISBN 978-84-945722-3-4

Após os lançamentos, os resultados, de todos os participantes, são organizados no quadro para que se possa fazer uma discussão. É importante que sejam calculadas as frequências relativas dos resultados (cara e coroa) de cada participante e a frequência absoluta (fa) e frequência relativa (fr) dos resultados de todos participantes juntos. A seguir, um exemplo, com dez participantes, do quadro para o registro das frequências.

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	Total
Cara	6 40%	9 60%	7 46,7%	6 40%	7 46,7%	11 73,3%	8 53,3%	7 46,7%	10 66,7%	6 40%	77 51,3%
Coroa	9 60%	6 40%	8 53,3%	9 60%	8 53,3%	4 26,7%	7 46,7%	8 53,3%	5 33,3%	9 60%	73 48,6%

A partir da atividade, alguns conceitos podem ser definidos, tais como: Espaço Amostral, Evento, Eventos equiprováveis, entre outros. No entanto, o objetivo principal desta atividade é discutir a definição da Lei dos Grandes Números: "É muito pouco provável que, se efetuarmos um número suficientemente grande de experimentos, a frequência relativa de um acontecimento se afaste muito da sua probabilidade". (SILVA, 1999. p. 67).

Na segunda atividade, convidamos o grupo para participar de um jogo, elaborado pelos autores, denominado "Corrida nas Estrelas"[20]. O jogo consiste numa corrida para conquistar uma região do tabuleiro, com o uso de unidades (tropas) geradas (produzidas) em determinados locais do tabuleiro. Tanto a movimentação destas unidades, como sua própria produção, dependem de resultados obtidos com o lançamento de dados. Os participantes são apresentados às regras e então são convidados a jogar. Neste momento é interessante observar as estratégias desenvolvidas pelos participantes, pois existem diferentes rotas e pontos para produção de unidades, com probabilidades diferentes.

Dependendo da disponibilidade de tempo, sugerimos que os participantes possam jogar mais de uma vez, buscando avaliar melhor as possibilidades do jogo. Esta atividade permite a abordagem de muitos conceitos de Probabilidade, que podem ser estabelecidos com a participação do professor. Mas, dependendo do domínio que os estudantes têm do assunto, algumas perguntas, relacionadas à melhor estratégia, podem ser deixadas a cargo dos

[20] Nos anexos o leitor pode encontrar o tabuleiro e maiores detalhes sobre as regras.

ISBN 978-84-945722-3-4

estudantes, sendo que possivelmente estas perguntas sejam elaboradas por eles durante uma discussão inicial.

A terceira atividade é uma variação do jogo conhecido como “Porrinha”[21], que pode ser jogado com duas ou mais pessoas, e no qual cada um dos jogadores deve dar um palpite sobre a soma dos palitos nas mãos dos participantes. Para simplificar a exploração do jogo durante a atividade, propomos que seja jogado apenas por duas pessoas. Inicialmente, os jogadores são apresentados às regras básicas e convidados a realizar uma partida com até 10 pontos. Assim como foi proposto na segunda atividade, esperamos que os participantes desenvolvam estratégias e elaborem questões a respeito do jogo. Uma das questões iniciais poderá ser com relação à definição de qual jogador será o primeiro a dar o palpite. Um dos objetivos da discussão sobre o jogo é explorar a diferença entre ser o primeiro ou o segundo jogador a dar o palpite.

A última atividade propõe ao grupo duas situações que envolvem probabilidade. A primeira situação é uma adaptação de uma questão da Prova da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). A questão diz que quatro amigos querem sortear um livro entre si, e para isto utilizam quatro bolinhas, sendo três da mesma cor e uma de cor diferente. Eles combinam que o participante que retirar da urna a bolinha de cor diferente ficará com o livro, e também que o sorteio será por ordem alfabética do primeiro nome. Essa atividade possibilita explorar algumas questões, como “Todos têm a mesma chance de ganhar o livro?” “A ordem do sorteio influencia na probabilidade de cada um ganhar o livro?”

A segunda questão propõe que os participantes escolham de que modo devem distribuir quatro cartões de papel (dois brancos e dois vermelhos) dentro de dois sacos idênticos. Em seguida, alguém que não viu como os cartões foram distribuídos irá escolher um dos sacos e sortear um cartão. O objetivo dos participantes é que o cartão sorteado seja vermelho. Os participantes podem distribuir os quatro cartões nos dois sacos da maneira que acharem mais conveniente, podendo, inclusive, colocar quantidades diferentes de cartões em cada saquinho, desde que nenhum deles fique vazio. Este é um problema que permite a discussão do conceito de Probabilidade Condicional.

Considerações finais

A Probabilidade é um tema relevante na formação dos estudantes da Educação Básica, uma vez que o pensamento probabilístico encontra-se presente em diversas situações cotidianas e

[21] Nos anexos o leitor pode encontrar as regras do jogo.

ISBN 978-84-945722-3-4

pode auxiliar na tomada de decisões com base em argumentos racionais. Por outro lado, a Probabilidade é um tema que gera dificuldades em sua compreensão para a maioria dos estudantes.

Dessa forma, preocupar-se com o ensino de Probabilidade é uma questão relevante para a formação e para a atuação profissional dos docentes de Matemática. Portanto, conforme apresentado ao longo do texto, esta proposta de atividades pretendeu subsidiar os professores com ferramentas e com uma proposta metodológica para o ensino de Probabilidade no Ensino Médio. As atividades buscaram aliar os conceitos de Probabilidade com situações vivenciadas em jogos, partindo de análises das regras e dos resultados dos jogos, e também das discussões sobre as estratégias utilizadas pelos participantes nas competições.

As atividades já foram aplicadas com estudantes de Ensino Médio e mostraram resultados satisfatórios. Verificamos que a partir de situações nas quais os estudantes estão amplamente envolvidos, como nas atividades com jogos em que eles necessitam avaliar possibilidades e analisar suas estratégias, é possível discutir os conceitos de Probabilidade tomando por base os próprios argumentos dos estudantes. Essa situação permite que os estudantes possam reavaliar suas estratégias e perceber eventuais equívocos, além de possibilitar a desconstrução de concepções errôneas, que podem ser verificadas através da experiência nos jogos e nas atividades propostas.

Consideramos que a proposta é uma alternativa ao ensino tradicional e que pode ser facilmente aplicada com estudantes da Educação Básica. Portanto, os objetivos da oficina foram atendidos à medida que a proposta foi divulgada aos professores participantes, de forma que estes possam fazer o melhor uso das atividades apresentadas, inclusive fazendo adaptações e alterações que possam melhorar a proposta inicial.

Referencias bibliográficas

Demo, P. (2011). Pesquisa: princípio científico e educativo. 14 Ed. São Paulo: Cortez.

Penteado, M. G, & Skovsmose, O. (2008). Riscos trazem possibilidades. En: O. Skovsmose, Desafios da reflexão em educação matemática crítica, capítulo 2, p. 41 – 50. Campinas: Papirus.

Pinheiro, P, G, S. (2014). Porrinha: quando as probabilidades estão além das moedas. Estação Científica (UNIFAP), V.4, n.1, p.97-105.

ISBN 978-84-945722-3-4

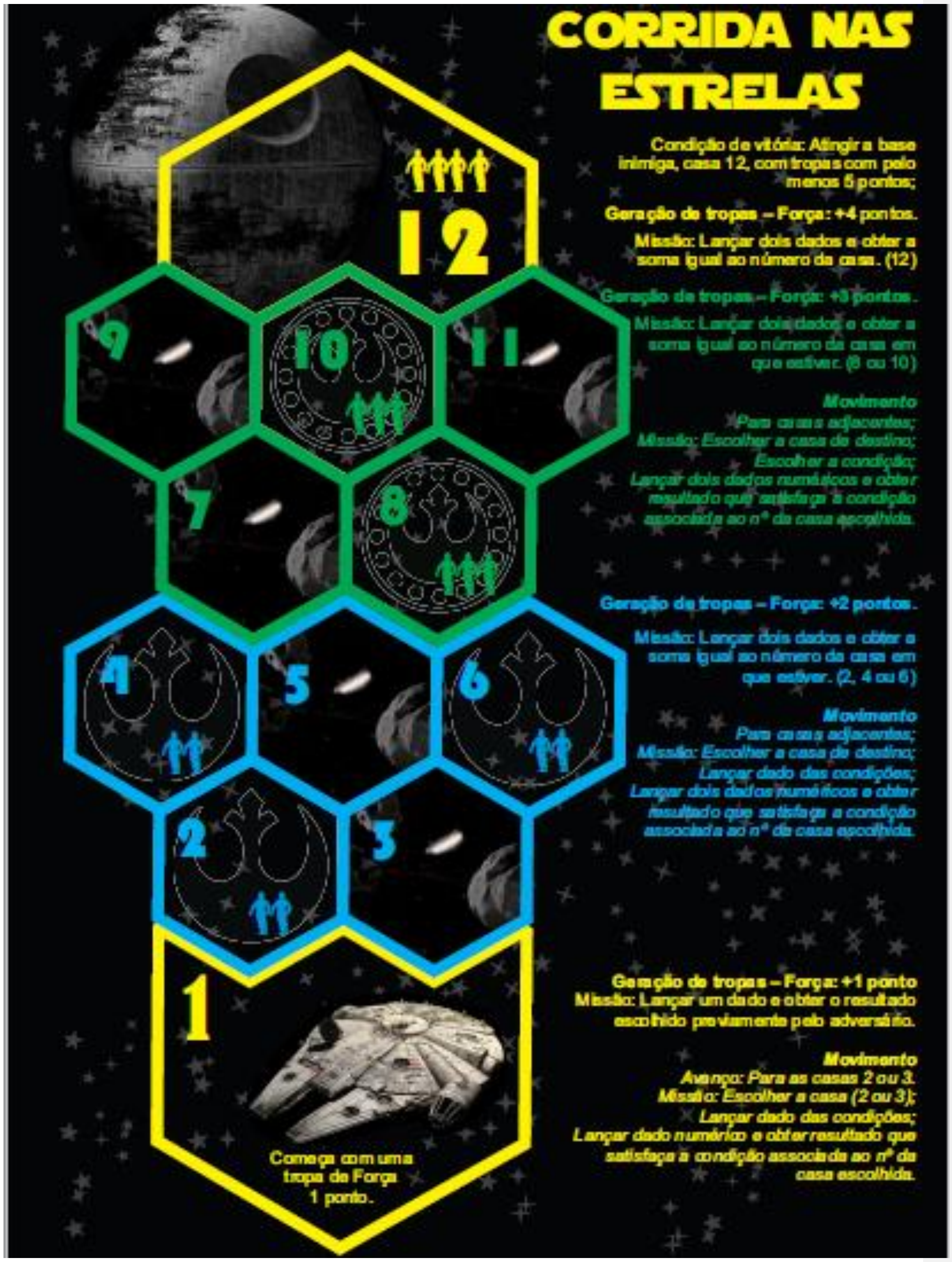
Silva, P. A. L. (1999). Probabilidades e Estatística**.** Rio de Janeiro: Reichmann e Affonso Editores.

Skovsmose, O. (2008). Cenários para investigação. En: O. Skovsmose, Desafios da reflexão em educação matemática crítica, capítulo 1, p. 15 – 40. Campinas: Papirus.

Anexo 1
PORRINHA: Regras e comentários sobre o jogo Porrinha (Purrinha)
Número de jogadores: Dois ou mais jogadores. Sugerimos que nas primeiras vezes o jogo seja realizado com apenas dois participantes.
Material necessário: Cada jogador deve ter três palitos ou moedas (quaisquer objetos que caibam na mão do participante e que este possa fechar completamente a mão sem denunciar o número de objetos).
Objetivo do jogo: Adivinhar a soma formada pelos palitos que os dois jogadores têm nas mãos.
Como se joga:
1º Momento: Cada jogador deve escolher uma quantidade de palitos (de zero a três) e colocar na sua mão. Se sobrarem palitos, estes devem ficar escondidos do adversário.
2º Momento: com as mãos à frente, mas ainda fechadas, cada jogador deve dar seu palpite, sobre qual a soma formada pelos palitos nas mãos dos dois jogares.
3º Momento: Os jogadores abrem as mãos, ganha um ponto quem acertou a soma do total de palitos apresentados.
Final: Os jogadores devem combinar quantos pontos devem ser obtidos para que o jogo acabe. Sugerimos que sejam contabilizados dez pontos, pois os participantes terão tempo para analisar as variáveis do jogo.
Comentários: No segundo momento, em que os participantes precisam dar seu palpite sobre a soma, deverá surgir a discussão sobre quem deve dar o palpite primeiro. Encorajamos os participantes para que eles discutam qual a melhor forma de fazer isso. As soluções encontradas pelos participantes devem ser discutidas e analisadas.
Sobre as Regras: Existem algumas variações do jogo, como por exemplo, não colocar a mão vazia, ou seja, colocar zero palito. Ou a cada vez que ganha um ponto por acertar a soma, o adversário perde um palito, até que acabem os palitos de um jogador. O leitor pode encontrar na internet outras possibilidades e pode testar com seus estudantes.

Anexo 2
Tabuleiro do jogo Corrida nas Estrelas

ISBN 978-84-945722-3-4



ISBN 978-84-945722-3-4

Manual do jogo Corrida nas Estrelas
Número de jogadores: Dois a quatro jogadores.
Material: Um tabuleiro por jogador e dois dados de seis faces, numeradas de 1 a 6. Um dos dados será denominado "**Dado das Condições"**, que irá indicar quais resultados o jogador deve obter. A seguir são indicadas as condições associadas a cada resultado do **Dado das Condições**:

Dado das Condições

1 = Maior que;	2 = Menor que;
3 = Igual a;	4 = Maior ou igual;
5 = Menor ou igual;	6 = Jogador escolhe;

Objetivo do jogo: Mover suas unidades (tropas) até a última casa do tabuleiro (casa número 12 na figura) de forma a somar pelo menos cinco pontos. Sendo que existem quatro tipos de unidades, cada uma com um valor diferente.
No contexto "Star Wars": Criar tropas de **Rebeldes**, tropas **Aéreas, Millenium Falcon** e **Jedi** para atingir e dominar a estrela da morte e derrotar o império.
Tabuleiro
Nível 1 (Base): O nível um abrange somente uma casa (1), nesse nível para criar tropas é necessário apenas um dado, as tropas geradas nesse nível valem um ponto;
Nível 2: O nível dois abrange as casas 2,3,4,5 e 6, nesse nível serão utilizados dois dados para fazer os lançamentos. As tropas geradas nesse nível valem dois pontos;
Nível 3: O nível três abrange as casas 7,8,9,10 e 11, nesse nível serão necessários dois dados para fazer os lançamentos, as tropas geradas nesse nível valem três pontos;
Nível 4: O nível quatro é a linha de chegada, a casa 12. Você não irá mais mover as tropas, mas após atingir esse nível você poderá tentar gerar tropas (Jedi) que valem quatro pontos;

Início do jogo: Cada jogador inicia com uma unidade básica, que vale um ponto, na sua base.

Movimentação: A movimentação nos quatro níveis do tabuleiro ocorre de acordo com as orientações indicadas no tabuleiro, ou seja, existem regras de movimentação para cada nível. A seguir um exemplo:
O jogador pretende mover uma unidade básica da base (casa 1) para a **casa 3**. Ele joga o **Dado das Condições** o obtém o resultado 5. A condição a ser satisfeita é: "menor ou igual". O jogador deve lançar um dado e obter um resultado **menor ou igual a 3,** para conseguir se mover para a **casa 3**.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Obs.: Nos níveis seguintes o jogador deve lançar o dado para verificar qual a condição e usar **dois dados** ao tentar se mover.

Gerando Tropas: É possível produzir novas unidades ao longo do jogo, e elas podem ser produzidas em diferentes locais, tendo assim valores diferentes de acordo com o nível em que estão localizadas, ou seja, podem valer 1, 2, 3 ou 4 pontos. As unidades podem ser produzidas nas casas ilustradas do tabuleiro, números 1, 2, 4, 6, 8, 10 e 12.

Em todos os níveis, para gerar as tropas, é necessário que o jogador consiga obter o número da casa como a soma dos dois dados que serão lançados, com a exceção da primeira fase, em que o jogador lançará apenas um dado.

Fim do Jogo: O jogo termina quando ao final de uma rodada algum dos jogadores tiver unidades na casa doze que somem pelo menos cinco pontos. No caso de mais de um jogador alcançar este objetivo no fim de uma mesma rodada, o que tiver mais pontos será o vencedor.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-842

El EXTRAÑO MISTERIO DE LAS MATEMÁTICAS

Manuel Santiago Espejo
msantiespejo@gmail.com
IES Ángel Sanz Briz de Zaragoza. España

Núcleo temático: 1- **Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.**
Modalidad: T
Nivel educativo: Educación Primaria
Palabras clave: didáctica, recursos manipulativos.

Resumen:
Un extraño fenómeno ocurre con las matemáticas. Un importante número de alumnos, ya a los 12 años de edad e incluso antes, manifiestan su animadversión a las matemáticas. Y cuando se les pregunta por qué, indefectiblemente responden que porque "no se les dan bien". Sin embargo numerosos neurocientíficos aseguran que "los niños nacen matemáticos". ¿Por qué entonces tantos niños a edades tan tempranas están convencidos de que no sirven para las matemáticas y presentan tantas dificultades para su aprendizaje? Afortunadamente hoy en día sabemos el por qué ocurre este extraño fenómeno, y lo más interesante, sabemos cómo podemos ayudar a nuestros alumnos para que aprendan y disfruten con las matemáticas. Este taller tiene como finalidad que los asistentes conozcan este "por qué" y este "cómo".

Para ello se realizarán actividades que ejemplifican cómo diseñar y llevar a cabo situaciones de aprendizaje que favorezcan el aprendizaje en Educación Primaria de la Numeración, el Cálculo y las operaciones, la Resolución de Problemas, la Medida, la Estadística y la Probabilidad, contando para ello con dos grandes aliados: los recursos (corporales, manipulativas y TIC) y el juego.

Trabajo:

Comencemos con la primera de las cuestiones: ¿por qué muchos niños y niñas a edades muy tempranas ya están convencidos de su incapacidad para las matemáticas?.

El profesor Servais, catedrático de Lógica de la Universidad de Mons (Bélgica), señala que existen dos grandes ámbitos de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: dificultades relacionadas con la materia y dificultades relacionadas con la enseñanza (Martínez, J. y Sánchez, C., 2011, p. 24).

Respecto a las dificultades de la materia destaca las siguientes:

- Elevado nivel de abstracción.

- Carácter acumulativo. Así por ejemplo, para aprender la multiplicación han tenido que aprender antes el de suma.
- Escaso aporte de la vida. Aunque las matemáticas están omnipresentes en nuestro entorno próximo, lo cierto es que la mayoría de las personas viven sin grandes dificultades utilizando un porcentaje muy pequeño de las matemáticas que estudiaron en el colegio.
- Elevado nivel de concreción. En numerosas ocasiones las actividades matemáticas se plantean en términos de correctas o incorrectas, sin situaciones intermedias, lo que ha provocado que tradicionalmente los alumnos se dividan en dos grupos, a los que se les da bien y a los que se les da mal las matemáticas.

En cuanto a las dificultades relacionadas con la enseñanza señala las siguientes:

- Arreferencialidad. Muchas de las situaciones matemáticas que se les presentan a los alumnos en el colegio están descontextualizadas y tienen poco que ver con sus intereses y necesidades, por lo que les resultan poco significativas y motivadoras.
- Cálculo ciego y memorístico. Tradicionalmente en la enseñanza de las matemáticas se le ha dado mucha importancia y se le ha dedicado mucho tiempo a los algoritmos, en detrimento de la construcción de conceptos lógico-matemáticos y de la resolución de problemas. Esto ha supuesto un error importante, ya que como señaló el profesor de matemáticas Miguel de Guzmán la resolución de problemas es el corazón de las matemáticas.
- Carencia de flexibilidad. Durante muchos años las matemáticas se han enseñado de una forma muy rígida, en la que el alumno o la alumna debían de resolver los algoritmos y los problemas de una forma muy determinada, impidiendo así que utilicen los numerosos aprendizajes matemáticos previos con los que acuden a la escuela.
- Uso inadecuado de fichas, libros de texto y cuadernos de trabajo. En ocasiones se interpreta este material como un método rígido que hay que ir cumplimentando completamente, de principio a fin, en el orden establecido, lo que impide cualquier tipo de adaptación a las características de cada grupo de alumnos.

Analizadas las dificultades para aprender matemáticas, se nos plantea la cuestión principal: ¿cómo enseñar para que los alumnos sean matemáticamente competentes?

ISBN 978-84-945722-3-4

Antes de darle respuesta, conviene que nos pongamos de acuerdo en qué entendemos por ser matemáticamente competentes. Para Planas y Alsina implica:

- Pensar y razonar matemáticamente.
- Plantear y resolver problemas.
- Obtener, interpretar y generar información con contenido matemático.
- Usar técnicas básicas e instrumentos.
- Interpretar y representar expresiones, procesos y resultados matemáticos.
- Comunicar el trabajo y los descubrimientos a los demás, tanto oralmente como por escrito, usando de forma progresiva el lenguaje matemático.

A la hora de diseñar situaciones de aprendizaje para que los alumnos sean competentes, los profesores deben de tener en cuenta tanto las características de los alumnos como las características de la materia.

En cuanto a las características de los alumnos de Educación Primaria, es preciso tener presente que, siguiendo las aportaciones de Piaget, se encuentran en el periodo de las Operaciones concretas. En este periodo los alumnos van superando de forma progresiva los rasgos del pensamiento preoperacional (centración, irreversibilidad, egocentrismo, finalismo, etc.) y desarrollando una creciente capacidad de abstracción. Cada vez son más capaces de realizar deducciones e inducciones, pero partiendo de situaciones manipulativas.

Asimismo, todas las actuales investigaciones neurocientíficas están enfatizando la importancia del componente socioafectivo en el proceso de aprendizaje, hasta el punto de poder afirmar que sin emoción no hay aprendizaje. Está demostrado que aspectos como las creencias de autoeficacia o la ansiedad repercuten en el rendimiento matemático.

En cuanto a las características de las matemáticas, conviene tener en consideración los siguientes aspectos:

- Doble naturaleza: finalizada-formal/en construcción-informal.
- Estructura interna jerárquica.

ISBN 978-84-945722-3-4

- Triple función: instrumental, funcional y formativa. Las matemáticas constituyen una herramienta fundamental para resolver situaciones de la vida cotidiana (funcional), también son de gran utilidad para realizar otros aprendizajes (instrumental) y contribuyen de manera esencial al desarrollo en el niño de su capacidad de razonamiento lógico-matemático y de resolución de problemas, de su capacidad comunicativa, de su constancia, etc. (formativa).
- Potente instrumento de comunicación.
- Contenidos de diferente naturaleza: conceptos, procedimientos y actitudes.

Tomando como referencia estas características de los alumnos y de las matemáticas, los profesores debemos de definir nuestro modelo de enseñanza. Según Mª Carmen Chamorro y otros, podemos distinguir dos grandes modelos: el empirista y el constructivista.

El modelo empirista, entiende que aprender matemáticas significa trasvasar los saberes del profesor/a al alumno y, a groso modo, se caracteriza por:

- El frecuente uso de presentaciones ostensivas.
- Concebir el error como signo de fracaso en el aprendizaje.

El enfoque empirista, por su parte, entiende que aprender matemáticas significa construir matemáticas, y se basa en cuatro hipótesis:

1º. El pensamiento matemático procede de la acción, entendida ésta como la capacidad de anticipar.

2º. La adquisición, organización e integración de los conocimientos del alumno pasa por estados transitorios de equilibrio y desequilibrio.

3º. La utilización y la destrucción de los conocimientos precedentes forman parte del acto de aprender. En consecuencia, tal y como señala Braousseau, el error no es sólo un obstáculo para el aprendizaje sino una necesidad.

4º. Los conflictos cognitivos entre miembros de un mismo grupo social facilitan la adquisición de conocimientos.

Según este modelo, las fases en la construcción del conocimiento matemático por parte de los alumnos son las siguientes:

1º. El alumno entra en el problema, comprendiéndolo y haciéndolo suyo.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

2º. Utiliza una estrategia "base" procedente de sus conocimientos y experiencias previos, que resultará pesada, antieconómica, defectuosa, etc., para la nueva situación problemática que se le plantea.

3º. Trata de superar el desequilibrio generado por la estrategia de base inútil, y emite hipótesis que le permitan:

a. Elaborar y aplicar estrategias nuevas, observando los resultados.
b. Automatizar aquellos procedimientos solicitados con más frecuencia.
c. Ejercer un control sobre los resultados.

La extraordinaria profesora y formadora de profesores, Mª Antonia Canals, afirma que "hay que llevar el aprendizaje por el camino de una comprensión que procure el propio descubrimiento, y o no por los caminos tan fáciles como débiles y falsos, de la mecánica" (Biniés, 2011, pág. 9).

Constance Kamii nos dice que no se les puede enseñar a los niños a pensar de forma lógico-matemática, lo único que podemos hacer como educadores es animarles a que piensen por sí mismos. Como hemos señalado anteriormente, el alumno no aprende a construir relaciones lógico-matemáticas observando relaciones ya construidas, sólo aprenderá a construir relaciones construyendo relaciones a partir de las situaciones de aprendizaje que previamente habrá diseñado su maestro o maestra.

Esta realidad es muy importante, ya que supone un cambio radical en el rol del profesorado, que pasa de ser un transmisor de conocimientos a una especie de "arquitecto" que debe de diseñar situaciones de aprendizaje que promuevan en sus alumnos la construcción de los conocimientos lógico-matemáticos previstos. Se trata de una tarea compleja y laboriosa, para la que el profesorado cuenta con algunos importantes aliados:

- Los recursos manipulativos. Decía María Montessori refiriéndose a los niños pequeños que "la inteligencia está en los dedos". Estos recursos invitan a la acción y a la experimentación, resultan motivadores y promueven la interacción de unos niños con otros. No obstante, conviene tener en cuenta que la manipulación por la manipulación no garantiza el aprendizaje, y que en última instancia se pretende, tal y como indicaba Piaget, que los niños pasen de la manipulación física a una acción

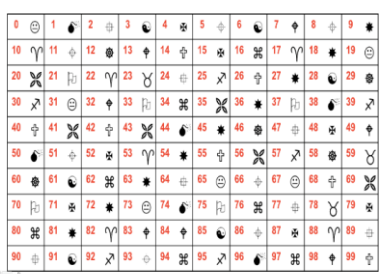
ISBN 978-84-945722-3-4

mental, entendida como anticipación de lo que va a ocurrir. En este sentido, resulta muy ilustrativo lo que dice Marcus Satoy, profesor de matemáticas de la Universidad de Oxford, cuando afirma que muchas personas piensan que los matemáticos se dedican a realizar operaciones matemáticas muy complejas, pero están equivocadas, en realidad los matemáticos se dedican a buscar patrones.

- El juego. Si como hemos señalado anteriormente no hay aprendizaje sin emoción, no hay mejor manera de aprender que jugando, pues la emoción está garantizada. No es extraño, en consecuencia, que se haya puesto de actualidad en el ámbito educativo la gammificación como recurso educativo de primer orden.
- Los otros. Decía Vigotsky que aprendemos en un primer momento en un plano social, para pasar después a un plano individual, interiorizando los descubrimientos realizados en interacción con los otros.
- Situaciones de la vida diaria. Los alumnos aprenden matemáticas utilizándolas en contextos funcionales relacionados con la vida diaria para ir adquiriendo progresivamente conocimientos más complejos a partir de experiencias.

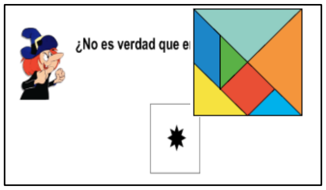
Analizadas las causas por las que nuestros alumnos y alumnas tienen tantas dificultades para aprender matemáticas y sabiendo cómo podemos ayudarles a que construyan los conocimientos lógico-matemáticos, veamos a continuación una serie de situaciones de aprendizaje lúdicas y motivadoras, que utilizan recursos manipulativos y que promueven la interacción de unos alumnos con otros:

1. Numeración y cálculo con el juego de "La bruja". En este juego, de los autores Cobo Mérida y Berenguer, se le pide a cada uno de los componentes del grupo que piense un número de 2 cifras, y que a continuación le reste a dicho número la suma de las 2 cifras. Por ejemplo 19 – (1+9) = 9. Después se le pide que busque el número resultante en la tabla numérica el número resultante de la resta y que se fije en el símbolo que está junto a él.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

A continuación le invitamos a que le pregunte a la bruja cuál será dicho símbolo . Comprobaremos para sorpresa de todos que la bruja ha adivinado el símbolo.



Hasta aquí la parte de sorpresa, juego y emoción. Seguidamente viene la parte de reflexión y de razonamiento: ¿cómo es posible que la bruja nos haya averiguado a todos el símbolo, si cada uno de nosotros hemos pensado números de dos cifras diferentes?. Observemos de nuevo la tabla numérica de la que partimos y saquemos conclusiones.

2. La medida a partir de una tarea competencial: decorar nuestra aula. Imaginemos que vamos a celebrar un fiesta y queremos decorar nuestra clase. Para ello vamos a colocar cintas de colores de un extremo a otro del ancho de la clase, pero necesitamos saber cuánto mide la clase de ancho para ir a comprar las cintas de colores. ¿Cómo podemos averiguarlo?, esta es la cuestión que le plantearíamos a nuestros alumnos. Quizás alguno, dependiendo de su edad, nos diga que con una cinta métrica, pero no tenemos cinta métrica. Será interesante escuchar las propuestas del resto para resolver la situación problemática que se nos ha planteado.
3. La geometría jugando con el Tangram. El tangram es un juego chino milenario compuesto por 7 piezas (2 triángulos rectángulos grandes, 1 mediano y 2 pequeños, 1 cuadrado y 1 romboide). Podemos organizar equipos de 4 personas y que cada equipo realice "familias" con las piezas del tangram, explicando después el criterio utilizado para formarlas. Seguidamente, organizados por parejas, uno realizará una figura con las piezas del tangram y se la describirá al otro para que la reproduzca sin verla.
4. El razonamiento lógico con la "caja de los cambios de bloques lógicos de Dienes". En numerosos problemas de los que les planteamos a los alumnos, se producen cambios o transformaciones sobre la situación inicial. Por ejemplo cuando decimos: "Luisa tenía ahorrados 50 €, y se ha gastado 25 en unos pantalones. ¿Cuánto dinero le queda?"

ISBN 978-84-945722-3-4

Por este motivo es importante que los alumnos y las alumnas vayan interiorizando ese concepto de transformación de la situación inicial. Un recurso de gran utilidad para ello y muy motivador es la "máquina de los cambios de bloques lógicos".

Los bloques lógicos de Dienes son unas piezas que tienen cuatro variables, cada una de las cuales se concreta en una serie de atributos: color (amarillo, rojo y azul); forma (cuadrado, rectángulo, triángulo y círculo); tamaño (grande y pequeño); grosor (delgado y grueso). Así, tenemos 3 colores, 4 formas, 2 tamaños y 2 grosores, lo que nos hace un total de 3 x 4 x 2 x 2 = 48 combinaciones, por tanto tendremos 48 piezas distintas.

Un alumno introducirá por uno de los orificios laterales de la caja de los cambios una pieza del bloque lógico (por ejemplo, un círculo pequeño rojo grueso) y colocará en la parte superior etiquetas que expresen los cambios que tiene que sufrir dicha pieza (por ejemplo, color azul y tamaño grande). El otro, tendrá que pensar en estas cualidades que deben de cambiar y en aquellas otras que se deben de mantener (grosor y forma), y hacer salir por el orificio del otro extremo la pieza correspondiente (en este caso, un círculo azul, grande y grueso). Esta actividad se puede complicar aumentando el número de etiquetas y utilizando las de negación.

Referencias bibliográficas

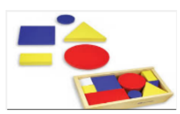
Biniés, P. (2008): *Conversaciones matemáticas con Maria Antònia Canals.* Barcelona: Ed Graó.

Chamorro, Mª del C. (Coord.) (2003): *Didáctica de las matemáticas para Educación Primaria*. Madrid: Ed. Pearson.

Jimeno, M. (2006*): ¿Por qué las niñas y los niños no aprenden matemáticas?* Barcelona: Ed. Octaedro.

Planas, N. Y Alsina, A. (2009): *Educación matemática y buenas prácticas*. Barcelona: Ed. Graó.

Martínez, J. y Sánchez, C. (2011): *Desarrollo y mejora de la inteligencia matemática en Educación Infantil.* Ed. Wolters Kluwer. Madrid, 2011.



ISBN 978-84-945722-3-4

ISBN 978-84-945722-3-4

T-859

SITUACIONES PROBLEMA DE LA VIDA COTIDIANA, LA MATEMÁTICA ESCOLAR Y LA MODELACIÓN MATEMÁTICA: EL CASO DEL CHORRO DE AGUA

Rafael Pantoja Rangel, [1]María Inés Ortega Árcega, Elena Nesterova
rpantoja@prodigy.net.mx, maijua9@hotmail.com
Universidad de Guadalajara, [1]Universidad Autónoma de Nayarit, México

Núcleo temático: Matemáticas y su integración con otras áreas.
Modalidad: T.
Nivel educativo: Medio superior.
Palabras clave: Modelación, Fotografia, Tracker, Parábola.

Resumo

El taller se centra sobre la relación existente entre los elementos de la parábola y la forma de un chorro de agua, con el propósito de que el alumno vincule los elementos que intervienen en la modelación matemática de la situación problema. Previo estudio de videos en la red de la parábola, se observa que los ejes coordenados se mantienen estáticos, se ubica al objeto parábola en cualquier lugar del plano y se determinan los parámetros. En el taller se plantea, que el alumno, a partir del video o de la fotografía de un chorro de agua, determine, en primera instancia con las rutinas del Tracker, la ecuación cuadrática asociada y con GeoGebra se auxilia para ubicar el vértice, el foco y la directriz. En la segunda parte, se aprovecha la versatilidad del Tracker para mover y rotar los ejes coordenados y que el alumno se dé cuenta del efecto que se propicia sobre los coeficientes de la cuadrática y los parámetros de la parábola. Se plantean cuestiones como: Ubica los ejes coordenados de tal forma que b=0 en la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c$*, o bien, ¿Qué efecto tiene sobre los coeficientes que los ejes coordenados se roten 90°?*

Introducción

Una forma de enseñanza y aprendizaje es situar al estudiante en un contexto de su vida cotidiana (Téllez, López, Mora, 2013), porque le permite integrar nuevos conocimientos mediante el desarrollo de un proceso de investigación y aplicación de una situación problema (Hitt y González, 2014), así como en la presentación de alternativas de solución, en este caso, de la modelación matemática de la forma de un chorro de agua.

El flujo de un chorro de agua en caída libre ha sido tratado en distintos estudios (Balukovic, *et al*, 2015; Castro, *et al*, 2013), en donde se supone la forma de su trayectoria idealmente parabólica, tal y como se plantea en este trabajo, pues sólo se busca relacionar la forma del

ISBN 978-84-945722-3-4

chorro de agua con la ecuación de segundo grado, la parábola y sus parámetros con apoyo del Tacker y GeoGebra.

En la enseñanza tradicional, el hecho de saber matemáticas significa que el alumno solucione problemas planteados por el profesor o en el libro de texto, con enunciados como "desarrolla en fracciones parciales", "soluciona la ecuación" o "deriva la función", ejercicios sin relación con las actividades cotidianas y a la pregunta del alumno "¿por qué tengo que aprender esto?" y a la respuesta del profesor, "bueno, ya lo verás, pero ahora mismo, lo necesitas debido al examen", Pollak (2007, p. 111) lo critica como que "la gratificación siempre se retrasa y pienso que no se puede incentivar la motivación por la belleza de la matemática por si sola sin ver la utilidad".

En la figura 1, se señala que la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se orienta a la solución de ejercicios o de problemas que genera conocimiento dentro de la misma matemática, omitiendo la relación del saber matemáticas con la vida cotidiana, que favorezca la generación de las competencias como trabajo colaborativo, elaboración de un reporte, la discusión de los resultados ante el grupo y la interpretación de las diferentes representaciones semióticas en función de la situación problema.

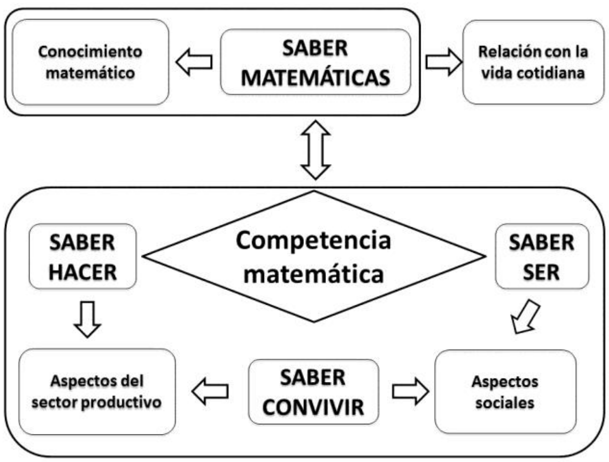


Figura 1. Elementos a considerar en la enseñanza de las matemáticas.

De acuerdo con Hitt y González (2014), una situación problema debe ser simple, fácil de entender (no implica que sea fácil de resolver), que propicie la reflexión y la interacción de los estudiantes, con la diferencia que la manipulación de la fotografía o video con el software

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Tracker genera registros semióticos, que los miembros del equipo colaborativo relacionan y les oferta la posibilidad de construir, discutir y comprender, en sus diferentes formas de representación, el modelo matemático (Pantoja, Guerrero, Ulloa, Nesterova, 2016; Arrieta y Díaz, 2015) de forma del chorro de agua.

En el estudio los alumnos enfrentaron el reto de diseñar colaborativamente el escenario de grabación, a manipular la cámara de video, ya sea de su dispositivo móvil o estándar, a discutir e interpretar lo presentado por Tracker en la pantalla, a determinar con el empleo de GeoGebra, los parámetros de la parábola que modela la forma idealizada del chorro de agua, entre otras actividades.

Teoría de las representaciones semióticas

El sistema de representación semiótica (Duval, 2004) se empleó como sustento teórico, pues una vez que se procesa la fotografía o el video con el Tracker, se muestra en la pantalla de la computadora, diversas representaciones matemáticas relacionadas con la forma del chorro de agua, que el alumno tiene que interpretar y relacionar, con la finalidad interpretar la trayectoria del chorro del agua en función de los coeficientes de la ecuación de segundo grado, comparar las ecuaciones que calcula Tracker para describir la trayectoria del chorro del agua, cuando se desplazan los ejes coordenados a distintas posiciones y analizar los cambios en los coeficientes de la ecuación de segundo grado al girar los ejes coordenados 90°, 180° y 270° grados.

Los registros y representaciones semióticas (Figura 2) que emergen una vez que la fotografía o el video son tratadas con el Tracker son: visual correspondiente a la fotografía o al video; analítico con la ecuación de segundo grado; gráfico correspondiente a tres gráficas; numérico en tablas que señalan las coordenadas del chorro de agua; verbal en descripción que hacen los estudiantes sobre relacionar los distintas representaciones y presentación grupal; escrita indicada por el informe y elaboración de la presentación.

ISBN 978-84-945722-3-4

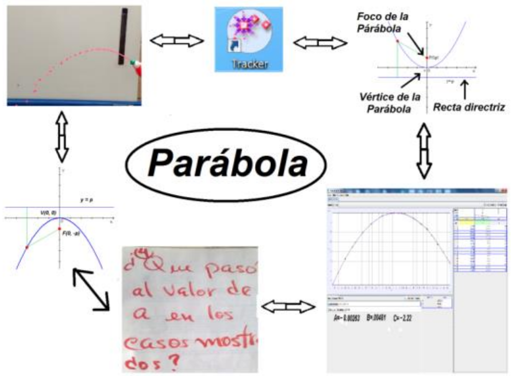
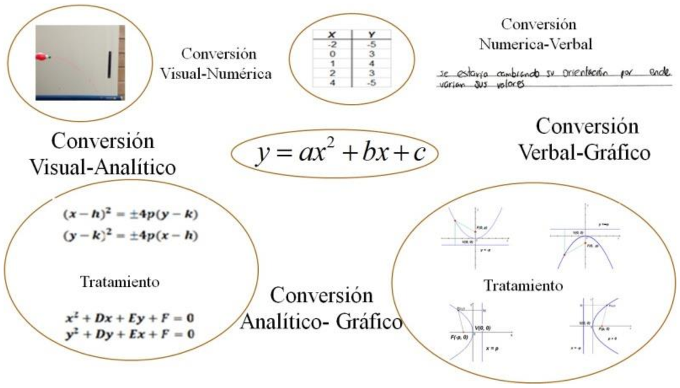


Figura 2. Un Esquema representativo de la construcción de la Parábola mediante la modelación matemática

Todas estas representaciones semióticas no se obtienen de manera natural (Figura 3), ya que es el profesor quien debe diseñar actividades para que el alumno logre apropiarse de ellos, es decir, con propósitos comunicativos, en los que se detecte tanto los distintos tratamientos y como las conversiones. Las actividades que se diseñaron y que se pretende replicar en el taller, se integraron en una secuencia didáctica, que los alumnos en trabajo individual y colaborativo, desarrollan a lápiz y papel y con la computadora.

Para Duval (2004) la actividad intelectual consiste esencialmente en la transformación de las representaciones semióticas, las cuales son de dos tipos: tratamiento y conversión. El tratamiento sucede cuando una transformación produce otra al interior de un mismo registro y hace relevante la elección del "mejor" cambio de registro para resolver el problema dado, al transformar internamente el registro.

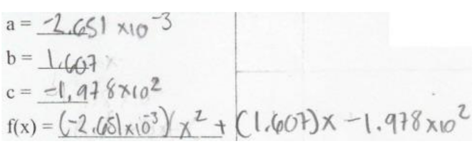


ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 3. Registros semióticos del objeto parábola

Se realizan diferentes transformaciones dentro de un mismo registro, por ejemplo, si se considera el registro analítico, se puede aplicar el tratamiento del polinomio $f(x) = -.002651x^2 + 1.607x - 197.8$ obtenido con Tracker e identificar con ayuda de GeoGebra los parámetros de la parábola asociada V(288.38, 232.07) y F(193.16, 286.66) para determinar la forma $y - 288.38 = 4p(x - 232.07)^2$.

La conversión se refiere a la transformación de una representación de un registro en otra representación de otro registro, en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial, así por ejemplo del registro analítico al registro gráfico (Figura 4) o del registro verbal hacer la conversión al registro gráfico, numérico o analítico, para que el estudiante pueda interiorizar el conocimiento emergente.

<table>
<tr><th>Registro Analítico</th><th>Registro Gráfico</th></tr>
<tr><td>


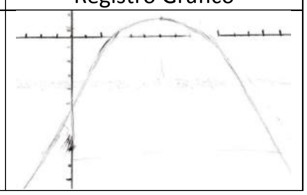
</td><td>

</td></tr>
</table>

Figura 4. Conversión del registro analítico al gráfico.

La conversión cognitiva rápida y espontánea de la coordinación de al menos dos registros de representación, es la base de la comprensión (integral) de un contenido conceptual, situación que el alumno tuvo que enfrentar cuando en la pantalla del computador se muestra la fotografía o el video del chorro de agua, la gráfica que modela la forma del chorro de agua y los datos numéricos de la posición. Con otra rutina, se presenta la opción de seleccionar la función que más se apega a los datos, en suma, los estudiantes en trabajo colaborativo tuvieron que interpretar las distintas conversiones y los tratamientos entre los registros del objeto parábola con la situación problema empleada.

Metodología

Se trabajaron cuatro fotografías del lanzamiento de un chorro de agua, una de internet con la que se realizó la tarea de manejo de Tracker y GeoGebra, y tres inéditas que se tomaron como base para el trabajo en el aula y responder la secuencia didáctica, en tres tiempos: obtención

ISBN 978-84-945722-3-4

de la ecuación de la forma del chorro; luego se desplaza el plano cartesiano, sin girar los ejes, a distintas posiciones; por último, se gira 90°, 180° y 270°.

Se organizó al grupo en equipos de cuatro integrantes para el trabajo colaborativo, que analizaron la fotografía con el Tracker para obtener las gráficas, la tablas de datos y la ecuación de segundo grado, para al final, discutir el modelo matemático en función de la situación problema.

En un segundo momento, se solicitó a los estudiantes que observaran los efectos causados por la traslación de los ejes coordenados sobre los coeficientes de la ecuación de segundo grado que arroja el Tracker. Esta situación se registró en video y en las hojas de trabajo de las actividades incluidas en la secuencia didáctica.

En la tercera sesión, se presenta en sesión grupal los reportes de cada equipo de trabajo y se entrega el reporte elaborado. Se grabaron todas las presentaciones en video para su posterior análisis.

Finalmente se entrevistó a cinco estudiantes sobre el desarrollo de la propuesta, para conocer de primera voz sus impresiones sobre esta alternativa de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Resultados

La secuencia didáctica, se integró de tres secciones y de la revisión de la primera sección, se evidencia que los alumnos tienen un nivel aceptable de manipulación algebraica, logran identificar los parámetros y los señalan sobre la gráfica que se les pide trazar en el cuaderno, aunque con sus acepciones, porque no logran identificar algunos parámetros (Figura 5), por ejemplo en el reporte del alumno 4, el desarrollo algebraico tiene una equivocación de signo, pero la gráfica la representa bien.

Otro aspecto que se trató en esta sección, fue que el alumno visualizara el efecto de los coeficientes a, b y c del polinomio $y = ax^2 + bx + c$, con la ayuda de los deslizadores de GeoGebra y no tuvieron problemas de interpretación, pero se nota un pobre dominio en la redacción de sus observaciones, pero en general logran identificar los diferentes desplazamientos de la parábola. No se manifiesta algún problema extremo sobre los conocimientos previos, como para plantear actividades remediales sobre el manejo algebraico requerido para la actividad.

ISBN 978-84-945722-3-4

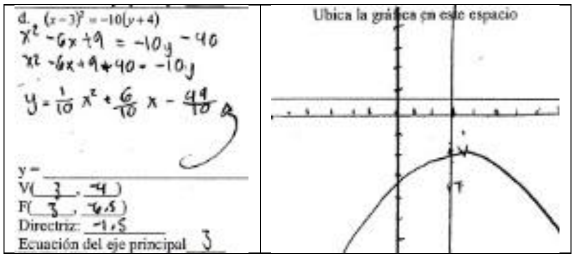
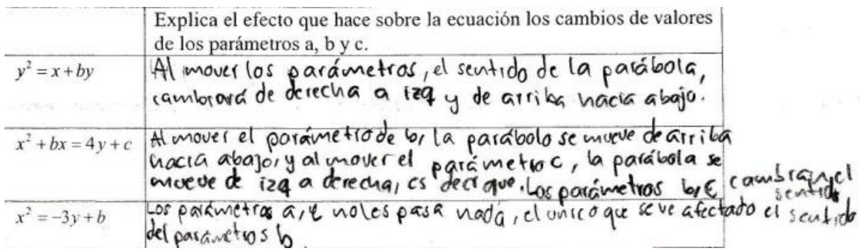


Figura 5. Extracto de la respondido por los alumnos en el cuaderno de trabajo.

En la figura 6, al hacer un análisis detallado de lo escrito, señala de manera correcta lo solicitado en este apartado de la secuencia didáctica.



	Explica el efecto que hace sobre la ecuación los cambios de valores de los parámetros a, b y c.
$y^2 = x + by$	Al mover los parámetros, el sentido de la parábola, cambiará de derecha a izq y de arriba hacia abajo.
$x^2 + bx = 4y + c$	Al mover el parámetro de b, la parábola se mueve de arriba hacia abajo, y al mover el parámetro c, la parábola se mueve de izq a derecha, es decir que. Los parámetros b, c cambian el sentido
$x^2 = -3y + b$	Los parámetros a, c no les pasa nada, el único que se ve afectado el sentido del parámetros b

Figura 6. Redacción no clara del estudiante con ideas correctas.

En la sección relacionada con la rotación del plano cartesiano de 90°, 180° y 270° fue en la que los alumnos tuvieron más dificultades, pues como Tracker no manifiesta en la pantalla alguna seña visible de tal acción, los alumnos no lograron desarrollar las actividades, manifestado en la secuencia y en las entrevistas.

Análisis de la entrevista realizada a los estudiantes

La entrevista refleja la opinión de los alumnos que han desarrollado las distintas actividades durante la fase experimental, y se muestra una actitud positiva, un gusto por haber sido partícipes activos en esta propuesta. Se entrevistó a cinco estudiantes sobre aspectos cualitativos, con un guion integrado por siete preguntas orientadas a conocer la opinión sobre esta alternativa didáctica para aprender, su experiencia anterior con este tipo de propuestas y el gusto y el efecto por la inclusión de las TIC en el aula; sólo una pregunta se orientó a la identificación de la trayectoria del chorro de agua con la ecuación que la describe. A continuación se presentan algunas respuestas de los estudiantes:

Profesor: ¿Cómo te pareció esta forma de aprender matemáticas?

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

A1: Me pareció padre porque siempre nos daban la ecuación y hacíamos la gráfica, sabíamos que era una parábola, pero no sabíamos que la podíamos aplicar a la vida real. Relacionábamos cosas que veíamos todos los días con cuestiones matemáticas.

Profesor: ¿Cómo ha sido la enseñanza de las matemáticas en tu vida escolar?

A4: Ha sido de una manera yo digo interesante, porque los maestros que he tenido de matemáticas, son buenos maestros, tienen su grado en maestría y doctorado, únicamente que entran mucho en la teoría, conceptualizan mucho, es poco atractivo la forma de aprender.

Conclusiones

Respecto de la modelación de la forma del chorro de agua, los alumnos logran determinar la ecuación, identificar sus parámetros y ubicarlos en la gráfica.

Los programas Tracker y GeoGebra ayudaron a visualizar la fotografía de la trayectoria idealizada del chorro de agua con la parábola: su gráfica, su ecuación y sus parámetros.

Cuando se desplazaron los ejes coordenados, lograron relacionar el movimiento con los coeficientes de la ecuación cuadrática. Donde se reflejó una falta de comprensión, fue en el momento de la rotación de los ejes coordenados y el efecto sobre los coeficientes de la ecuación de segundo grado, y una de las causas fue que al cambiar el ángulo de giro en Tracker, no se visualiza explícitamente la rotación (al pasar el ratón por encima del eje x cambia su forma) y pareciera que los ejes están donde mismo pues no se manifiesta ninguna acción, pero al ajustar el polinomio, difiere del que se calculó antes de la rotación.

Referencias

Arrieta, J., y Díaz, M. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *RELIME*, 18 (1), 19-48. DOI: 10.12802/relime.13.1811.

Balukovic, J., Slisko, J., Corona, A. (2015). ¿Cómo deja de fluir un chorro de agua de un recipiente en caída libre?. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias,* 593-600. ISNN: 1697-011X.

Castro, L., Campos J., Manzanares, B., Gomez, O., Figueroa C. (2013). Prototipo didáctico para visualizar la trayectoria parabólica de un chorro de agua. *Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 7, No.3. 429-432* ISSN 1870-9095.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo.* Santiago de Cali, Colombia:

Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. ISBN: 958-670-329-0.

Hitt, F., y González, A. (2014). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. USA: Springer Science+Business Media, 201-219.

Pantoja, R. Guerrero, L., Ulloa, R. Nesterova, E. (2016*).* Modeling in problem situations of daily life. *Journal of Education and Human Development,* Vol. 5, No. 1, pp. 62-76. Published by American Research Institute. Recuperado el 23 de Mayo de 2016 de http://jehdnet.com/. Electronic Version. DOI: 10.15640/jehd.v5n1a1. IS**SN**: 2334-2978.

Pollak, H. (2007). Mathematical Modelling- A conversation with Henry Pollak. En W. Blum, G. Galbraith, H. Henn, M. Niss (Eds.) *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study*. (pp. 109-120). USA: Springer.

Téllez, A., López, A., Mora, C. (2013). Secuencias didácticas ABP para principios de la Dinámica y leyes de Newton en bachillerato *Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 7, No.1. 47-57* ISSN 1870-9095.

T-899

LA CREACIÒN DE UN VÍNCULO ENTRE LA COMUNDAD DE INVESTIGADORES Y LA COMUNIDAD DE PROFESORES

María de Lourdes Sánchez Ugalde
lulusa41@hotmail.com
SECyBS, Gobierno del Estado de México, México

Modalidad: Taller
Nivel educativo: secundario
Núcleo temático: Formación del profesorado en Matemáticas
Palabras clave: variable, base orientadora, usos de la variable

Resumen

Nuestro taller está dirigido a establecer vínculo entre la práctica profesional del profesor y los conocimientos venidos de la investigación acerca de la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar, en particular el concepto de variable y sus diferentes usos.

Aquí, se pretende que los profesores analicen situaciones y tareas algebraicas hechas por estudiantes de secundaria. Para ello, será necesario usar una Base Orientadora para tal análisis. En ella se anidan aspectos que detallan el desarrollo cognitivo (interpretación, simbolización, manipulación) adquirido por los estudiantes, su calidad y asimilación (Galperin, 1959).

El taller está conformado por dos momentos de trabajo. En el primero, se presenta el modelo 3UV diseñado por Ursini y Trigueros (1997), su forma, su estructura y uso. Este modelo permite a los profesores conformar una base BO que permite valorar el trabajo hecho por los estudiantes, los niveles logrados de avance, las debilidades, y la calidad de ejecución de la estructura algebraica. Este análisis, da a los profesores una base de conocimiento para realizar las orientaciones, ajustes, correcciones de ejecución y comprensión en las acciones en la formación del concepto de variable (Sánchez, 2006). En el segundo momento, los profesores analizaran paso a paso los trabajos algebraicos hechos por estudiantes de secundaria bajo la BO del modelo3UV.

1. Antecedentes

Nuestra pretensión es crear un espacio entre la práctica profesional del profesor y los conocimientos venidos de la comunidad de investigadores educativos. Investigaciones hechas desde hace más de tres décadas han puesto su atención en esta comunidad de profesores. Algunas hacen referencia a preguntas concretas cuyo argumento descansa en

ISBN 978-84-945722-3-4

cómo relacionar estos dos mundos "el mundo de la práctica profesional del profesor y el mundo de la investigación educativa" (Fenstermacher 1988; Bednarz 2001).

Aunque los esfuerzo por explicar cómo debería la teoría relacionarse con la práctica de los profesores, los cambios dentro de las aulas no resultan ser significativos. Al parecer las respuestas ofrecidas en los congresos, revistas, reportes de investigación no satisfacen las expectativas de los profesores. Por lo general, tienen una imagen de la teoría como algo ininteligible, que nada tiene que ver los problemas a los cuales se enfrentan día con día. La explicación de algunos investigadores es que su falta de impacto práctico es precisamente que la relevancia práctica de su trabajo de investigación no resulta obvia y mucho menos cumple la función orientadora que debe. Kemmis (1985) determinó la existencia de un "vacío" entre las dos comunidades el cual podría salvarse sugiriendo estrategia didácticas y orientaciones necesarias para ser usadas en la práctica de los profesores y con ello, convencerlos de su valor práctico.

Al parecer una de las razones por las cuales los resultados de investigación educativa no ha tenido relevancia en la actividad del aula, tiene poco que ver con las actitudes poco favorables de los profesores o con su incapacidad por comprender o poner en práctica las teorías. Tal vez sean otras razones más profundas. Por ejemplo, los fundamentos conceptuales de la teoría educativa.

La teoría es una oportunidad para dar claridad a la práctica docente. Acercar conocimiento que surge de la investigación educativa representa la mejora de esas prácticas, beneficiándose ambas comunidades. Por un lado, tomar la opinión de los profesores implica tener acceso a su práctica y llevarlos a la reflexión de esa práctica. Asimismo los investigadores se valen de esa interacción para saber de las necesidades de los profesores. La interacción entre las dos comunidades, *practica-teoría* da fuerza a ambas transformando las practica en el aula y orientando las formas de comprender la práctica del aula.

La teoría debe mirarse como apoyo para mejorar la eficacia practica de las teorías que los profesores emplean al conceptuar sus propias actividades con ello, se lograría un vínculo. Aminorar la distancia entre estas comunidades es ideal de algunos investigadores (Carr 1988; Gitlin 1983; Shon 1992). Mirar a los profesores como verdaderos profesionales de la educación representa crear puentes de comunicación y llevar recursos intelectuales para lograr un cambio sustancial en las formas de intervención en el aula. La seguridad y certeza

ISBN 978-84-945722-3-4

en las prácticas de los profesores debería ser un rasgo básico de la investigación educativa. Liberar a los profesores de su dependencia de prácticas que son el producto de la rutina y la tradición sería necesario acercar conocimiento venido de la comunidad de investigadores con la intensión de dar la posibilidad de hacer una intervención coherente, racional, congruente y eficaz.

La intensión de este taller es acercar conocimiento de la enseñanza del algebra escolar con el propósito de fortalecer y actualizar las formas de intervención. De esta forma se espera que esta actividad entre profesores e investigadores resulte favorable para ambos, enriquecida por las conversaciones, el intercambio de comentarios y observaciones de la actividad algebraica.

1.1 Orientaciones desde la teoría hacia la práctica

Los profesores han jugado un papel tradicionalmente definido "los que enseñan" Con ello, no restamos importancia a su actividad, por el contrario, damos la importancia que en algunos momentos la sociedad le ha quitado. Enseñar requiere valerse de recursos y habilidades intelectuales, emocionales y culturales de alta complejidad, los cuales requieres no sólo de conocimientos, sino el cómo ponerlos a disposición de los estudiantes a su cargo.

Es obligatorio señalar que en frecuentes ocasiones los profesores viven los cambios educativos con ansiedad, como un riesgo, una alteración de su práctica tradicional. Enfrentarse a la realidad del aula produce en los profesores incertidumbre, incomodidad frustración, estas emociones penetran en la vida escolar influyendo en los estudiantes.

El alumno que no puede aprender presenta inconformidad, frustración y desesperación al igual que su profesor. Para que los profesores reconozcan las deficiencias y debilidades que presentan sus estudiantes en matemáticas, en particular en álgebra, es necesario que reconozca sus debilidades. Con ello, será capaza de hacer los ajustes necesarios e intervenir de forma adecuada y oportuna.

El profesor como todo profesional recibe una formación escolarizada[22] y una formación práctica la adquiere desde su propia práctica, a fuerza de ensayo y error. Es importante que ellos puedan complementar su formación actualizándose continuamente. Acercamientos periódicos con la comunidad de investigación educativa sobre matemáticas podrían subsanar las deficiencias de las cuales hemos hablado.

[22] En el caso de México la formación docente se obtiene en la Normal Superior

ISBN 978-84-945722-3-4

2. Un soporte algebraico: el modelo 3UV (tres usos de la variable) como base orientadora para el análisis de las producciones de estudiantes de secundaria.

El Modelo 3UV (los tres usos de la variable fue diseñado por Ursini y Trigueros (2001). El Modelo se caracteriza por los tres diferentes usos de la variable los cuales son: como número general, incógnita específica y las variables relacionadas. Asimismo, los usos se acompañan de aspectos que señalan la cualidad específica en cada uno de los tres usos.

Es fundamental desarrollar la comprensión de la variable como numero general. Con ello, ser hábil en el reconocimiento de patrones, deducir reglas generales y métodos que los describan y simbolizarlos. Para ello, se requiere percibir los aspectos que cambian de los que no cambian en problemas que involucran secuencias numéricas. Reconocer el símbolo literal como la representación de un objeto indeterminado.

Para comprender a la variable como incógnita específica se requiere identificar a la literal como la representación de una cantidad desconocida, la cual pude conseguirse mediante un procedimiento. Asimismo es indispensable simbolizar las cantidades desconocidas de tal forma que se obtenga una ecuación con la finalidad de conseguir el valor o los valores de la incógnita o incógnitas que hacen que la ecuación sea verdadera.

Las variables en una relación funcional para ser comprendidas es fundamental desarrollar la habilidad de reconocer situaciones de correspondencia entre variables las cuales son tratadas en tablas, graficas o en expresiones analíticas. Asimismo, la habilidad para determinar la correspondencia se ve reflejada en la capacidad para conseguir el valor de una de la variable cuando se conoce el de la otra. Al igual, es necesario trabajar con la variación, determinar intervalos, precisar dónde la función de incrementa o decrece; es positiva o negativa; tiene un máximo o un mínimo. También es necesario simbolizar e interpretar.

3. Un método para llevar conocimiento algebraico a los profesores

En este apartado se describe la forma de trabajo colaborativo entre profesores y una investigadora, la cual dará las orientaciones suficientes para el uso del Modelo 3UV, con ello, realzar el análisis de los productos de los estudiantes de secundaria. El acto de conocer las

ISBN 978-84-945722-3-4

tareas hechas por los profesores dentro de su actividad de enseñar en aula, pude obtenerse mediante la comunicación directa. Hacer preguntas a los profesores acerca de algún aspecto de su práctica, exponer sus conocimientos acerca del álgebra, cómo los usa, forma que introduce a las aulas, el concepto que tiene de la disciplina. Lo anterior significa un objeto común de estudio. Ambos obtendrán un beneficio, los profesores exponen las necesidades para poner en marcha su práctica en las aulas. La investigadora por su parte pone a disposición los conocimientos de la comunidad de investigadores educativos.

La colaboración dirigida al logro de una mediación entre la práctica de los profesores y la investigadora. Los profesores son apoyados por una comunidad de profesores, los cuales orientan sus acciones esencialmente en sus experiencias. La investigadora está respaldada por una comunidad de investigadores educativos que le permiten orientar sus acciones basadas en fundamentos teóricos. Estos dos grupos contribuyen con sus respectivas experiencias intelectuales mediante conversaciones. Éstas se concierten en discusiones centradas en el álgebra que se enseña en la escuela secundaria. Recolectar opiniones, creencias y conceptos venidos de la situación de grupalidad producirá un desplazamiento del control de la interacción, lo cual permitirá profundizar en el tema propuesto.

3.1 La sesiones del taller

Primera sesión: la formación de un concepto de variable multifacética

En la primera parte de la sesión se iniciara con una exploración de los conceptos que tienen del álgebra los profesores. Esta exploración se basa en preguntas tales como: ¿Qué es el álgebra?, ¿Cómo se introduce el álgebra en las aulas?, ¿Cuáles son los recursos materiales en los cuales se apoyan?, ¿Cómo evaluar las producciones de los estudiantes?, ¿Cuáles son lo criterios que se usan para evaluar las tareas en el aula?, entre otras. Discutir y reflexionar es uno de los principales objetivos de esta sesión, dar explicaciones y argumentos acerca del álgebra que se enseña en la escuela secundaria. Esta actividad permite saber de las debilidades y fortalezas conceptuales de los profesores, así como diseñar estrategias de intervención para realizar acciones de corrección y orientación. Para finalizar la sesión se entrega un cuestionario[23], el cual será respondido y entregado a la investigadora. Este consta de doce preguntas abiertas las cuales demandan habilidades de *identificación*, *simbolización* y *manipulación* de la variable en diferentes contextos.

---

[23] Es un extracto (en él se encuentran 12 preguntas directamente relacionadas con los tres usos de la variable, como número general, incógnita específica y las variables relacionadas). del diseñado y validado por Urisni y Trigueros (1998), el cual consta de 65 preguntas.

ISBN 978-84-945722-3-4

La simbolización, interpretación y manipulación son habilidades necesarias para desarrollar pensamiento algebraico. **Representar** situaciones o fenómenos naturales o sociales con el uso de símbolos literales implica saber mirar a esa literal como un ente algebraico en diferentes contextos, es decir, la variable al estar implicada en situaciones que generalizan el fenómeno que se estudia será nombrada *número general.* Si la variable está implicada en una ecuación o ecuaciones debe ser identificada como *incógnita específica* y si encontramos en problemas a las variables relacionadas con enlaces de dependencia e independencia, se encuentran implicadas en una relación funcional. **Interpretar** los símbolos literales en diferentes contextos requiere ser hábil para reconocer el papel específico de la variable en determinada relación. Estas habilidades se acompañan con la capacidad para ejecutar operaciones con los símbolos literales que forman las expresiones algebraicas, es decir, **manipular** los objetos algebraicos de forma correcta. Para finalizar se entregará el esquema del modelo 3UV en fotocopia para su análisis.

Segunda sesión: la formación de una Base orientadora de la acción para analizar trabajos

En esta sesión se pretende que los profesores utilicen el modelo 3UV como una herramienta para analizar actividades tales como, el cuestionario resuelto por ellos en la sesión anterior y algunas tareas hechas por estudiantes mexicanos de secundaria, enfatizando los usos de la variable y aspectos que se encuentran involucrados en cada una de las tareas. Con esta actividad verificamos la comprensión e interpretación, el uso correcto que hacen del modelo. Asimismo aseguramos que el modelo y las orientaciones recibidas en el transcurso del taller conformaran una Base Orientadora que permita a los profesores valorar las actividades, tareas, exámenes y actividades de sus estudiantes dentro de sus propias aulas. No obstante, pensamos que estas acciones hechas en el taller por los profesores se verán reflejadas en su actividad de enseñar.

ISBN 978-84-945722-3-4

Referencias bibliográficas

Seguir el formato APA. (Disponible en http://formatoapa.com/)

Bednarz, N., Desganè, S., Lebuis, P. y Poirer, L. (2001). *L'approche collaborative de recherche en éducation: un rapport nouveau à établir entre recherche et formation.* www.erudit.org/fr/revues/rse/2001-v27-n1-rse369/000305ar/

Carr, W. y Kemmis, S. (1986). *Beacoming Critical: Education Knowledge, and Action Research*. Londres: Falmer , Press.
Fenstermacher, G. (1988). Reflection in the Teacher Education. (Edit.) P. Grimmett y G. Erickson. Teachers College Press.

Galperin, P. Y. (1959). *La formación de las acciones mentales*. Ciencia psicológica en la URSS, Moscú.

Gitling, A. (1983). Linkingn Theory and Practice: *The use of Etnographic Metodology by Prospective Teacher* Journal of Education for teaching 9, (pp 225-234).

Kemmis, S. (1985). Action Research and the Politics of Reflection. In *Reflection: Turning experence in to learning*, (Edit) D. Boud, R Keogh y D. Walker. Londres, Com Helm.

Sánchez, U. L. (2006). *Estableciendo un vínculo entre investigadores y profesores: El caso de la variable multifacética*. Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.

Schön, D. A (1992). *La formación de Profesionales Reflexivos. Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones*. Barcelona: Paidós-M.E.C.

Ursini, S. & Trigueros, M. (1997). Understanding of different uses of variable: A study with starting college students, In Pehkonen, E. (Ed.), Proceedings of the Twenty-first International PME Conference., (pp. 4-254, 4-261). Finland.

Ursini, S. & Trigueros, M. (2001). A model for the uses of variable in elementary algebra. In Van den Heuvel-Panhuizen M. (Ed.), Proceedings of the Twenty-fifth International PME Conference., Utrecht, Neatherlands, 4, 327-334.

ISBN 978-84-945722-3-4

Anexo 1

La estructura del modelo 3UV

Numero general	Incógnita especifica	Relación funcional
G1 Reconocer patrones, percibir reglas y métodos en secuencias. **G2** Interpretar un símbolo como una representación general indeterminada que puede tomar cualquier valor. **G3** Deducir reglas y métodos en secuencia. **G4** Manipular: simplificar y desarrollar, la variable simbólica. **G5** Simbolizar enunciados generales, reglas o métodos.	**I1** Reconocer e identificar en una situación problemática la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema. **I2** Interpretar los símbolos que aparecen en una ecuación, como la representación de valores específicos. **I3** Sustituir l variable, por el valor o valores que hacen la ecuación verdadera. **I4** Determinar la cantidad desconocida que aparece en una ecuación o en un problema realizando las operaciones aritméticas y/o algebraicas. **I5** Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarla para plantear ecuaciones.	**F1** Reconocer la correspondencia entre las variables relacionadas independientemente de la representación. **F2** Determinar los valores de la variable dependiente dados los valores de la independiente. **F3** Determinar los valores de la variable dependiente dados los valores de la independiente. **F4** Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación independientemente de la representación de la representación utilizada. **F5** Determinar los valores de la variación de una de las variables, dado el intervalo de la variación de la otra. **F6** Simbolizar una relación funcional basada en el análisis de os datos de un problema.

ISBN 978-84-945722-3-4

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

T-902

ACTIVIDADES CON GEOGEBRA PARA LOS PRIMEROS AÑOS

Carmen Soguero Pamplona – Ricardo Alonso Liarte - Ana I. Blasco Nuño
csoguero@educa.aragon.es – ralonso@educa.aragon.es - aiblasco@educa.aragon.es
Departamento de Educación del Gobierno de Aragón - España

Núcleo temático: V. Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
Modalidad: Taller
Nivel educativo: Inicial (3 a 5 años) y primario (6 a 11 años)
Palabras clave: Geogebra, Infantil, PDI

Resumen
En este taller se pretende que cada asistente desarrolle actividades interactivas con Geogebra para utilizar en la Pizarra Digital Interactiva (PDI) del aula de Infantil y primeros años de Primaria.
Durante el mismo, los asistentes desarrollarán, al menos, una actividad con el formato de cuento, en la que se mezclarán herramientas de diferentes tipos. Al menos, se trabajará con imágenes que hagan amigable el escenario, audio que permita desarrollar una historia y/o dar indicaciones sobre las acciones a realizar, uso de los colores para que el alumnado ilustre los elementos del escenario, inclusión de aspectos aleatorios que permitan variar las condiciones iniciales de la actividad, o uso de botones que permitan eliminar o incluir aspectos que cambian las variables didácticas que intervienen en el proceso.
La metodología del taller estará basada en el trabajo individual de los asistentes, que seguirán las indicaciones guiadas de los coordinadores.
La presencia de varios coordinadores permitirá la adaptación al ritmo de los diferentes asistentes, pudiendo asistir incluso aquellos que hayan tenido poco contacto con Geogebra.

Entre los objetivos generales de la Educación Infantil que figuran en el artículo 7 de la Orden de 28 de marzo de 2008 del Departamento de Educación, Cultura y Deporte de Aragón, se recoge que esta etapa contribuirá a desarrollar en el alumnado, entre otras, las capacidades que les permitan:

« —Desarrollar habilidades comunicativas en diferentes lenguajes y formas de expresión.

—Descubrir las tecnologías de la información y la comunicación e iniciarse en su uso.

ISBN 978-84-945722-3-4

—Iniciarse en las habilidades lógico-matemáticas, en la lecto-escritura, en el movimiento, el gesto y el ritmo. »

En esta etapa la actividad práctica debe ser el centro del acercamiento a los contenidos matemáticos. Esto permitirá el descubrimiento de las propiedades y relaciones de los objetos a través de la experimentación activa, facilitando los aprendizajes significativos que llevarán al desarrollo de las competencias básicas, especialmente la matemática y la digital.

La combinación de la pizarra digital interactiva con el programa de geometría dinámica Geogebra facilita el desarrollo curricular de matemáticas en estas etapas. Aunque no es un programa específico para crear actividades de estos niveles, Geogebra cuenta con múltiples aspectos que nos invitan a utilizarlo como software base en la creación de actividades. Entre otras cosas permite combinar elementos matemáticos abstractos (como números, polígonos, rectas...) con imágenes y sonidos que facilitan la motivación del alumnado. También se pueden incluir acciones que "recompensen" la correcta realización de una tarea. El alumnado puede modificar de forma sencilla la posición y el tamaño de los objetos durante la realización de las actividades. Por otra parte, es de código libre, por lo que no supone gasto alguno y hay una comunidad de profesores que trabaja con él, y de cuyas aportaciones podemos también beneficiarnos.

Por otra parte, el uso de la PDI también cuenta con reconocidas ventajas en estos niveles, pues la proyección de imágenes siempre es un elemento que atrae la atención. Permite que el alumnado interactúe directamente con ellas, con lo que ese efecto motivador se multiplica. La posibilidad de realizar las actividades en la PDI convierte al alumno en actor principal de su propio aprendizaje. Además permite trabajar de forma colectiva ejercicios y actividades y facilita la tarea de la corrección conjunta de actividades y, por tanto, el aprendizaje entre iguales.

ISBN 978-84-945722-3-4

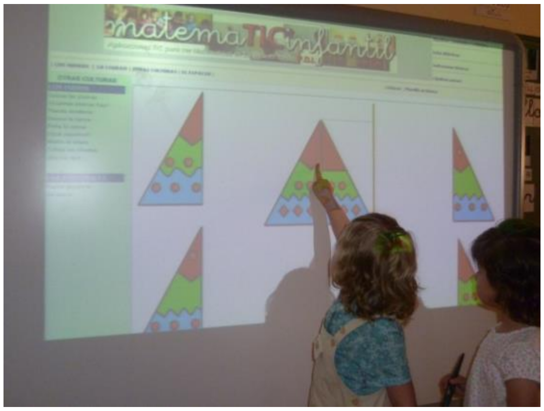


Ilustración 21 Niños trabajando en la PDI con los materiales

Combinar ambas herramientas supone iniciar una manera de trabajar en la que los niños manejan los objetos sobre la PDI según las indicaciones de su maestro y las orientaciones de sus compañeros.

Las actividades construidas con Geogebra para Ed. Infantil permiten abordar todo tipo de contenidos matemáticos de cualquier nivel. La página MatemaTICinfantil (https://matematicinfantil.wordpress.com) contiene más de 150 propuestas con diferentes formatos y tipos. El acceso a las mismas se puede realizar por unidades didácticas o por bloques temáticos, de forma sencilla a través de los menús. Así mismo se pueden seleccionar por edades (cursos desde 3 a 7 años), e incluso acceder a aquellas en las que, el exiguo contenido textual, es trilingüe. Cada actividad dispone de una ficha con información didáctica y algunas instrucciones para su utilización (si son necesarias). Además, la web ofrece secuencias didácticas elaboradas por profesores que han usado los materiales y también Geogebrabooks, formato propio de Geogebra en el que se ordenan las actividades enlazadas según un criterio como, por ejemplo, el nivel de dificultad.

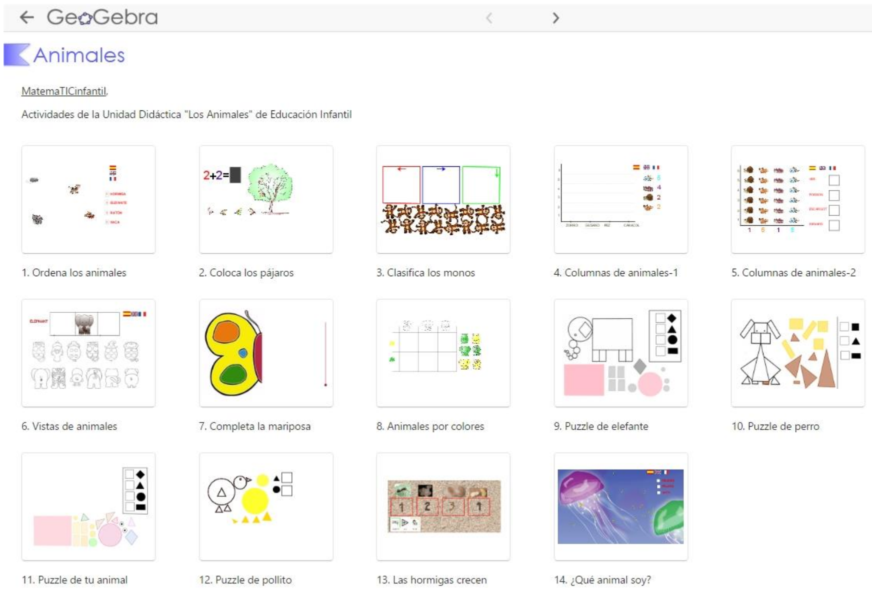


Ilustración 22 Libro de Geogebra sobre la UD: Los animales

Dentro de las actividades construidas, el formato de cuento destaca por su versatilidad. Nos permite trabajar con cualquier tipo de contenido y nivel curricular, aportando una motivación extra. Posibilita la realización de las actividades de forma escalonada por dificultad y facilita la integración de aspectos relativos a otras áreas.

En este taller se va a construir con Geogebra un cuento interactivo, haciendo uso de imágenes, audio, colores, aleatoriedad y botones. Esta selección de elementos queda justificada por la etapa a la que se dirige la actividad, así como por la relativa facilidad de implementación con el programa.

En las etapas infantiles toma especial importancia el uso de imágenes para crear elementos y escenarios atractivos que se puedan incorporar a las actividades. Geogebra permite incluir estos elementos de forma sencilla y colocarlos en posiciones concretas. De esta manera se

ISBN 978-84-945722-3-4

puede jugar con ellas para conseguir que aparezcan en posiciones distintas al reanudar la actividad, bien de forma aleatoria o de manera estudiada. Así mismo, la utilización de las capas permite que las imágenes aparezcan o desaparezcan como consecuencia de una acción concreta lo que facilita la creación de elementos que se ocultan parcialmente, jugar con conceptos como delante-detrás, etc.

La incorporación de audios en las actividades amplía el abanico de posibilidades para elaborar propuestas que resulten atractivas. Permite, entre otras cosas, introducir una historia, una narración que dé sentido al desarrollo del ejercicio, modular y regular el proceso de realización del mismo, focalizar la atención del niño, etc.

El audio ha de prepararse previamente en formato mp3. Se puede subir a la cuenta de Geogebratube como un archivo más, igual que si fuese un archivo propio de Geogebra, pero está limitado el tamaño a 0,2Mb. Una opción con mejores prestaciones, pues no se tiene limitación del tamaño del audio, consiste en ubicar los archivos en un alojamiento web en la nube, y copiar el enlace.

Combinando el uso de la reproducción del audio con botones se puede pautar el desarrollo de la actividad, facilitando así su uso a los niños.

Los botones o en su lugar, las imágenes con un programa de guión, resultan una herramienta versátil para la creación de actividades en estas etapas: son útiles para desencadenar una acción, también permiten cambiar o alterar el escenario de desarrollo de la actividad, elegir entre situaciones distintas, cambiar el color a los objetos, activar un audio...

El uso del color es necesario y casi obligatorio en actividades dirigidas a edades tempranas. Geogebra permite colorear los objetos que se crean con sus herramientas, pero para el niño no resulta sencillo. Sin embargo se pueden crear procedimientos que les faciliten esa tarea. Por ejemplo, elegir un color de una paleta y con ese color rellenar un objeto. Para generar estos procesos se requiere conocer cómo gestiona Geogebra el color y realizar asignaciones a través de sencillos programas de guión en los objetos a colorear.

ISBN 978-84-945722-3-4

Dotar de aleatoriedad a la actividad (aparición de elementos distintos, colocación de los mismos en posiciones diferentes al reiniciar la actividad, etc.) permite la generación de escenarios o propuestas iniciales variadas, no siempre las mismas con lo que los niños se enfrentan a una situación diferente cada vez.

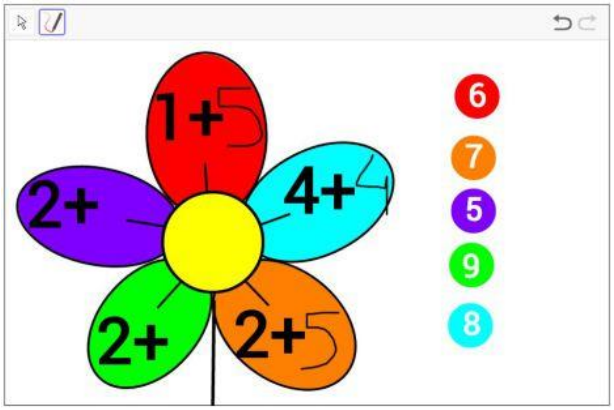


Ilustración 23 Ejemplo de uso del color y elementos aleatorios

Al finalizar el taller se habrá elaborado una actividad completa que incluya todos los elementos citados y lista para usar en el aula. Para su uso y difusión se incluirá entre las actividades de la web MatemaTICinfantil.

Referencias bibliográficas

Departamento de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de Aragón. (2008). Currículo de Educación Infantil. http://benasque.aragob.es:443/cgi-bin/BRSCGI?CMD=VEROBJ&MLKOB=261765895252. Consultado el 31/5/2017.

Blasco, A., Plaza, M., Alonso, R. y Soguero, C. (2013). *MatemaTICinfantil*. http://matematicinfantil.wordpress.com. Consultado el 31/05/2017

T-905

MATHAPP. APLICACIONES PARA LLEVAR A LAS MATEMÁTICAS AL AULA.

Alberto César Barbero[1] – José Carlos Gámez Pérez[2] – Juan Miguel Ribera Puchades[3]
alturu_4@hotmail.com[1] – jc.gamez.perez@gmail.com[2] – juanmisueca@gmail.com[3]
Colegio Internacional Torrequebrada (España)[1] – Colegio Compañía de María Sevilla (España)[2] – Universidad de La Rioja (España) [3]

Núcleo temático: Seleccionar uno de los núcleos propuestos
Modalidad: T
Nivel educativo: Secundaria
Palabras clave: Motivación, Mobile Learning, Competencia tecnológica, aprendizaje cooperativo.

Resumo
En "MATHAPP" pretendemos realizar un taller en el cual los profesores podrán conocer algunos conceptos matemáticos existentes en las diferentes aplicaciones y juegos de los dispositivos móviles que usan nuestros alumnos cada día, así como ejemplos de experiencias docentes en el aula de secundaria donde hemos usado las aplicaciones móviles para introducir dichos conceptos. En este taller, seleccionaremos algunos ejemplos concretos de conceptos matemáticos que se pueden encontrar en las aplicaciones móviles que usan frecuentemente nuestros alumnos. Además, presentaremos un esquema para la búsqueda de contenido matemático en aplicaciones móviles y realizaremos una puesta en común final en la que se completará dicho esquema propuesto. Todo esto permitirá a los asistentes crear sus propias experiencias docentes adaptadas a los conceptos que pretenden enseñar mediante el uso de aplicaciones siguiendo dicho esquema.

Introducción
En la actualidad, la gran mayoría de los alumnos de secundaria (aproximadamente el 72%) disponen de dispositivos móviles o de acceso a los mismos al cual le dedican, de media, unas tres horas al día (Rastreator.com, 2016). Muchos estudios destacan que, gran parte del tiempo, lo invierten en juegos móviles.

Paralelamente, la competencia digital se ha convertido en una de las 7 competencias básicas en la Educación Secundaria Obligatoria. Según la Teoría Cognitiva del Aprendizaje Multimedia (Mayer, 2009), los alumnos aprenden mejor a partir de palabras e imágenes que simplemente con palabras, dado que los seres humanos disponen dos canales de procesado de información: el canal verbal y el canal visual.

ISBN 978-84-945722-3-4

Es por ello que planteamos que podría ser interesante la realización de secuencias didácticas para el aprendizaje de conceptos matemáticos mediante el uso de aplicaciones y juegos móviles.

Factores a tener en cuenta

Según Gámez, César y Ribera (2016) la motivación de los alumnos por la asignatura de matemáticas es un factor muy importante para la predisposición en el aula. Es por ello que el conocimiento de los gustos de los alumnos es importante. Para ello podemos plantear un cuestionario de preguntas con el interés de conocer las inquietudes de los alumnos, así como las diferentes aplicaciones y juegos que utilizan frecuentemente.

No solo es importante conocer los gustos de los alumnos sino profundizar en el uso que hacen los alumnos de las aplicaciones/juegos. Para ello, recomendamos una pequeña labor de familiarización con dichas aplicaciones que pasa por conocer las funcionalidades principales que hacen nuestros alumnos de las mismas. Por ejemplo, existen aplicaciones como Instagram que permiten realizar historias que son eliminadas al cabo de 24 horas y que aportan confianza a los jóvenes dado que dicho contenido será eliminado de toda base de datos online.

En las aplicaciones móviles no solo aparecen conceptos lógicos-matemáticos, sino que también aparecen conceptos sociales, históricos o biológicos. Es un buen pretexto para coordinarse con los compañeros docentes y diseñar actividades transversales con otras materias. Dado que las aplicaciones pueden estar a su disposición en sus dispositivos móviles, las actividades no son de realización exclusiva en el aula de matemáticas, sino que pueden realizarse en otras asignaturas o fuera del centro.

Este tipo de actividades relacionadas con nuestros dispositivos móviles facilitan la mejora de la competencia tecnológica de los alumnos. El potencial del uso de internet en la resolución de los ejercicios planteados debe ser otro factor a tener en cuenta. La existencia de aplicaciones como Geogebra, WolframAlpha y otras calculadoras gráficas a disposición de nuestros alumnos son herramientas que podemos usar en la resolución de problemas y cuyo uso puede ser propiciado por el uso de otras aplicaciones móviles motivadoras para ellos.

Taller

ISBN 978-84-945722-3-4

La temporalización del taller se dividirá en las siguientes fases.

1. Introducción. En ella presentaremos las características principales que deben cumplir las secuencias didácticas para que permitan relacionar juegos del móvil y un aprendizaje significativo por parte de los alumnos. En esta parte incluiremos detalles sobre la motivación del alumnado y sobre la modificación de problemas adaptados a las aplicaciones/juegos usadas. Asimismo, aprovecharemos esta parte para presentar ejemplos prácticos que muestren la aplicación de esta estrategia docente en diferentes niveles educativos: Secundaria, Bachillerato y Universidad.
2. Profundización en una Aplicación. La mayoría de las aplicaciones/juegos incluyen conceptos matemáticos, muchas veces ocultos en la programación de los mismos, pero que se pueden visualizar cuando se estudian las aplicaciones detenidamente. Un buen ejercicio es jugar con dichas aplicaciones anotando los detalles matemáticos que van apareciendo. Principalmente los juegos incluyen conceptos como porcentajes, probabilidades, geometría, matrices, lógica que usualmente pasan desapercibidos pero que pueden servir para introducir a nuestros alumnos dichos conceptos en el aula. Durante esta fase del taller profundizaremos en un juego concreto de interés para nuestros alumnos.
3. Puesta en común de la profundización en una aplicación. Este ejercicio permitirá a los asistentes al taller observar los diferentes puntos de vista de sus compañeros docentes a la vez que permitirá completar una tabla que enumere los contenidos matemáticos que podemos trabajar sobre el juego estudiado en el punto anterior.
4. Creación de la secuencia didáctica. Aprovechando la lista de conceptos matemáticos encontrados en el punto anterior del taller mostraremos algunos ejemplos de secuencias didácticas que podemos realizar con los mismos. Posteriormente, los asistentes podrán crear sus propias secuencias didácticas asociadas a los conceptos que hayan observado en el punto anterior. Solicitaremos la puesta en común del algún ejemplo obtenido por los compañeros y realizaremos observaciones conjuntas sobre las características que creemos que deben cumplir dichas secuencias. Estas características se pueden completar con las aportaciones de los asistentes al taller.
5. Profundización en una aplicación/juego a su elección. Una vez obtenida la experiencia de la primera parte del taller puede ser interesante que los asistentes

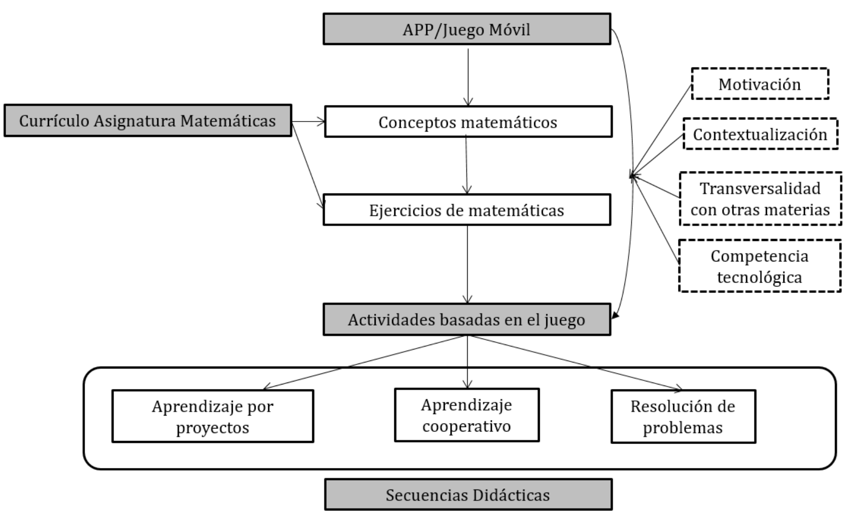
ISBN 978-84-945722-3-4

profundicen en los juegos a los que juegan cada día y que conocen con todo detalle. Dedicaremos una parte del taller para que, esta vez, profundicen en los contenidos matemáticos que aparecen en dichos juegos. Puede ser un ejercicio muy interesante dado que, en este caso, conocerán con detalle la aplicación a estudiar. Dependiendo de la duración de las anteriores partes del taller podemos incluir la creación de contenido docente durante esta fase.

6. Conclusiones grupales. Aprovecharemos los últimos minutos del taller para estudiar las características principales que deben cumplir las aplicaciones/juegos para poder realizar secuencias didácticas basadas en ellas. A su vez, completaremos las características que deben cumplir dichos juegos para que el aprendizaje de los conceptos sea significativo. Por otro lado, estudiaremos la posibilidad de incluir en el aula este tipo de actividades.

Reflexiones finales

Una vez terminadas las actividades planteadas a los asistentes al taller presentaremos el siguiente esquema que muestra los detalles a tener en cuenta en la creación de contenido basado en una aplicación:



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Uno de los objetivos del taller será enriquecer el esquema anterior por parte de los asistentes aportando nuevas ideas para secuencias didácticas, la cuales podrán versar sobre diferentes metodologías para la presentación del contenido relacionado con la aplicación. Otras modificaciones del esquema podrán venir al añadir nuevos factores a tener en cuenta en la creación de las actividades basadas en el juego.

En conclusión, disfrutaremos jugando y haciendo matemáticas, como suelen hacer nuestros alumnos, aunque no lo sepan.

Referencias bibliográficas

Gámez, J. C., César, A., Ribera, J. M., (2016). *Conocer sus gustos para enseñar a gusto*. XVI Congreso sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. "Matemáticas, ni más ni menos".

Rastreator.com, (2016). *III Estudio de Comparación Online hacia el Ahorro Inteligente*. Recuperado de: http://www.rastreator.com/doc/estudios/estudio-comparacion-online-y-ahorro-2016.pdf

ISBN 978-84-945722-3-4

ANEXO I. Ejemplo de aplicación

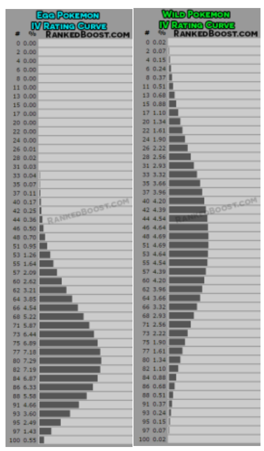
Uno de los juegos más famosos en la actualidad es el Pokémon GO (Niantic).

El juego Pokémon apareció en 1996 para la consola Game Boy por Nintendo y desde entonces se ha convertido en uno de los juegos más famosos de la historia. Fue en Julio de 2016 que apareció una versión del juego que se basaba en la búsqueda de Pokémon alrededor del mundo basado en la posición GPS de los jugadores.

Algunos de los numerosos conceptos matemáticos que intervienen son los siguientes:

- Porcentajes y Reglas de Tres: En las tiendas del juego se pueden comprar diferentes accesorios como “Pokeballs” o “Huevos Suerte” a diferentes precios. Podemos realizar preguntas relacionadas en el precio por Pokeball o en la relación entre las distintas ofertas que se presentan. Asimismo, se pueden comprar otros productos a precios diferentes, pudiendo así comparar los porcentajes de beneficio al aprovecharse de las ofertas.

- Probabilidad y Estadística: La probabilidad aparece en muchas situaciones en el juego, entre ellas, desde la probabilidad de capturar un Pokémon hasta la probabilidad de qué dicho Pokémon sea fuerte están relacionadas con fórmulas probabilísticas (ver aquí: https://pokeassistant.com/catchchance). Una buena forma de introducir la distribución normal con diferentes parámetros podría ser el siguiente ejemplo que relaciona los Pokémon que aparecen al abrir un huevo (imagen de la izquierda) o al atraparlo salvaje (imagen de la derecha).

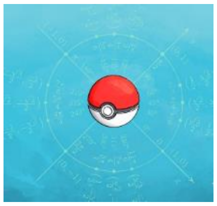


- Localización/Ubicación: Uno de los detalles más importantes del juego es el posicionamiento GPS del personaje, lo cual obliga al jugador a moverse a su alrededor para alcanzar sus objetivos. Para ello, la orientación, la cual está estrechamente relacionada con las matemáticas, es un factor determinante. Se pueden realizar varios problemas relacionado con caminos óptimos o con

ISBN 978-84-945722-3-4

distancias. Algunas de estas actividades se pueden relacionar con la educación física permitiendo contextualizar con otras asignaturas.

- Ángulos y Arcos: La geometría no solamente aparece en la localización del personaje, sino que también aparece cuando se quiere atrapar a un Pokémon. El arco en el cual se lanza la bola está relacionado con la probabilidad de atrapar al Pokémon. Por otro lado, los ángulos de ciertas circunferencias nos permitirán conocer el proceso de superación de ciertas metas que aparecen a lo largo del juego, pudiendo establecer una relación numérica a la vez que visual.



- Sucesiones: Aparecen sucesiones aritméticas y geométricas en diferentes fases del juego. Por ejemplo, encontramos sucesiones aritméticas cuando queremos dar más poder a un Pokémon. Conocer dichas sucesiones permite conocer el resultado final del Pokémon.
- Ecuaciones: Estrechamente relacionado con las sucesiones, encontramos numerosos ejemplos de ecuaciones que se pueden usar para conocer la distancia a la que estamos de obtener ciertas metas en el juego.

Como se puede ver, la mayoría de los temas anteriormente mencionados pertenecen al currículo de un curso de educación secundaria, permitiendo diseñar actividades relacionadas con el juego.

Algunos ejercicios que podemos diseñar podrían ser:

- En la tienda se pueden comprar 20 Pokeballs a un precio de 100 monedas, 100 Pokeballs a un precio de 460 monedas y 200 Pokeballs a un precio de 800 monedas. ¿Si disponemos de 2500 monedas, cuál sería la combinación de packs más ventajosa? ¿Cuánto más ventajosa sería?
- Al atrapar un Pokémon de nivel 100 con una Pokeball la probabilidad es 0.4. Si al usar una Superball la probabilidad aumenta un 25%, ¿Cuál será la probabilidad?
- Alrededor de un parque he caminado 0.8 Km con el juego. Si el parque es rectangular y tiene un área de 0.3 Km^2, ¿cuáles son las longitudes de los lados del parque?

ISBN 978-84-945722-3-4

- Para subir de nivel me quedan 314159 puntos de experiencia. Si he recorrido 270º de la meta, ¿cuánta experiencia era necesaria para subir de nivel?
- Después de darle 23 veces más poder a un Pokémon ha pasado de un nivel 2198 a un nivel 3141. ¿Cuánto poder aumentaba en cada una de las veces?

Por otro lado, se podría realizar actividades más elaboradas para que los alumnos buscaran las relaciones reales que aparecen en el juego, permitiendo trabajar proyectos con los alumnos sobre un tema que conocen. Para ello, es vital la preparación previa de las actividades a realizar en el proyecto.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

T-922

GEOMETRIA FRACTAL: ESTUDO E CONSTRUÇÕES DE MODELOS USANDO MATERIAL MANIPULÁVEL E SOFTWARES MATEMÁTICOS

Karla Aparecida Lovis – Ana Eliza Pescini – Eliane Suely Everling Paim – Andriceli Richit – Douglas Meneghatti
karla.lovis@ifc-concordia.edu.br – anaeliza97@hotmail.com – eliane.paim@ifc-concordia.edu.br – andriceli.richit@ifc- concordia.edu.br – douglas.meneghatti@ifc-concordia.edu.br
Instituto Federal Catarinense – Campus Concórdia – Brasil

Modalidade: T
Nível Educativo: Formação e atualização de ensino
Tópico: Recursos para o ensino e aprendizagem das matemáticas
Palavras-chave: Geometria Fractal, Softwares Matemáticos, Material Manipulável.

Resumo:
O objetivo deste trabalho é apresentar possibilidades para o uso da Geometria Fractal no Ensino de Matemática. A Geometria Fractal ainda é pouco abordada nas salas de aulas, tanto na escola básica, quanto no ensino superior, e como justificativa os professores apontam para a falta de conhecimento com relação a este conteúdo. No entanto, considera-se que esta Geometria tem sua importância e potencialidades, o que justifica seu ensino. Deste modo, nos propomos com esta apresentação explorar questões teóricas referentes aos Fractais bem como a construção de modelos tanto com softwares Matemáticos, como com material manipulável. Sendo assim esperamos que o presente trabalho ofereça subsídios para que os participantes conheçam um pouco mais sobre a Geometria Fractal e possam propor explorações para a sala de aula, tanto do ensino básico, quanto do ensino superior.

Introdução:

Ao analisar as dificuldades que os alunos apresentam na disciplina de matemática, D'Ambrósio (1996, p. 43) destaca que "a Matemática é a mais antiga das Ciências, por isso ela é difícil. Porque já caminhou muito, já sofreu muitas rupturas e reformas, possuindo um acabamento refinado e formal". Além disso, é recorrente a percepção de que a Matemática é limitada à sala de aula e que está desvinculada aos contextos do cotidiano, seguindo a ideia de que a Matemática está restrita a fórmulas, memorização e reprodução. Porém é uma área de conhecimento que possui diversas aplicabilidades no nosso dia a dia, sendo a Geometria Fractal um exemplo. Destaca-se que esta Geometria aparece vinculada fortemente a inúmeras áreas do conhecimento, auxiliando vigorosamente em resultados satisfatórios e precisos.

ISBN 978-84-945722-3-4

No que se refere à Geometria Fractal, observa-se que ela está inserida em poucos planos de cursos, tanto da educação básica, quanto do ensino superior. No entanto, ela tem sido desenvolvida e resultados eficazes estão aparecendo em prol de diversas áreas. Neste contexto, Santaló (2006), destaca que, nas últimas décadas, a Geometria Fractal tem,

> [...] despertado muito interesse pelo seu amplo espectro de aplicações, desde as artes plásticas até a física, a biologia e a astronomia, e que tem muitos vínculos com a computação e, também, com as teorias 'caóticas' que estão se desenvolvendo conjuntamente a partir da física e da filosofia (SANTALÓ, 2006, p. 22).

O precursor da Geometria Fractal, o matemático Benoit Mandelbrot criou a primeira definição de Fractais por volta da década de 80. Barbosa expõe que "a geometria fractal de Mandelbrot reflete uma natureza de irregularidades, de reentrâncias, saliências e depressões, de fragmentação" (Barbosa, 2002, p.12).

Considerando o exposto, o presente trabalho tem como intuito apresentar possibilidades de aplicações da Geometria Fractal na educação básica, principiando com um breve panorama da teoria fractal e caminhando para a construção de modelos com materiais manipuláveis e softwares matemáticos.

Características dos Fractais

As Geometrias, em geral, oferecem ao professor e ao educando diferentes formas de pensar, de compreender, descrever e interagir com o espaço no qual vivemos. Lorenzato (1993) expõe que não basta conhecer bem a Aritmética ou Álgebra para conseguirmos resolver problemas de Geometria Euclidiana, por exemplo, é preciso desenvolver diferentes maneirar de raciocinar, de explorar e descobrir.

A Geometria Fractal apresenta três características principais: a auto-semelhança, a dimensão fracionária e complexidade infinita.

No que se refere a auto-semelhança ou auto similaridade, Barbosa (2002) expõe que esta característica busca explicar o traçado de formas irregulares, fragmentadas, de saliências e depressões, além de apresentar o impacto de surpresa de ordem existente na desordem. Ela

ISBN 978-84-945722-3-4

traz consigo o ver ordem e padrões aonde antes era apenas visto irregularidades, o imprevisível, o caótico. Para Barbosa,

> Nessas quatro ou cinco décadas vimos o nascimento e o subsequente desenvolvimento de uma nova ciência, denominada CAOS. Biólogos, físicos, economistas, astrônomos, meteorologistas, ecologistas, fisiologistas e cientistas de várias outras especialidades se depararam com questões oriundas da natureza, procurando dar enfoque mais adequados à sua complexidade (BARBOSA, 2002, p. 10).

Na figura 1 temos o exemplo do Triângulo de Sierpinski. Partimos de uma triângulo equilátero, após encontrar o ponto médio de cada lado do triângulo, constrói-se quatro triângulos equiláteros e remove o triângulo central. Posteriormente faz o mesmo procedimentos formando novos triângulos equiláteros e assim sucessivamente.

Figura 1: Triângulo de Sierpinski
Fonte: Autores, 2017

A dimensão de um Fractal, ao contrário do que acontece na Geometria Euclidiana, não é necessariamente um número inteiro; ela pode ser um número fracionário. Para exemplificar a dimensão fractal vamos analisar a dimensão de um cubo, de um quadrado e de um segmento de reta que tem respectivamente dimensões 3, 2 e 1 e possuem propriedade de auto-similariedade. As três imagens a seguir podem ser repartidas em objetos auto-similares:

ISBN 978-84-945722-3-4

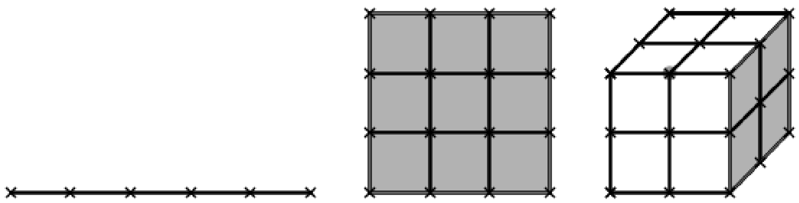


Figura 2 – Dimensões em inteiros
Fonte: Autores

Na figura 2 observamos as seguintes divisões: um segmento de reta dividido em 5 partes; um quadrado dividido em 9 quadrados congruentes, repartindo o lado em 3 partes; um cubo dividido em 8 cubos menores, dividindo cada aresta em 2 partes. Cada peça menor é auto-similar ao todo, portanto, para que cada peça fique igual ao todo devemos ampliá-la por um fator de aumento igual a respectivamente a 5, 9 e 8. Em geral, o número n de peças é dado por $n = m^D$, na qual m é o fator de aumento e D é a dimensão.

Com relação a complexidade infinita, temos que o processo gerador dos Fractais é recursivo, tendo um número infinito de iterações. Também podemos ampliar quantas vezes desejarmos sem nunca obtermos a imagem final. Essas três principais características dos Fractais serão exploradas com mais profundidade no decorrer do minicurso.

Construções da Geometria Fractal

O presente trabalho tem como objetivo central a inserção da Geometria Fractal a sala de aula, trazendo esta nova ciência próxima ao conhecimento dos alunos, uma vez que a mesma está sendo inserida cada vez mais as diversas áreas.

A construção de um Fractal pode ser realizada por meio de materiais manipuláveis, bem com softwares, explorando assim recursos distintos, desfrutando das demais afinidades e complexidade dos alunos.

A construção dos Fractais pode ser realizada com diversos softwares, tais como, GeoGebra, MATLAB, entre outros, os quais auxiliam na visualização do modelo Fractal, possibilitando o entendimento complexo e aguçando a curiosidade sobre novas alternativas de construção de modelos de fractais.

ISBN 978-84-945722-3-4

Destaca-se a construção do Floco de Neve de Koch, que foi desenvolvido pelo matemático Helge Von Koch. Na figura 3 apresetamos alguns níveis do Floco de Neve de Koch.

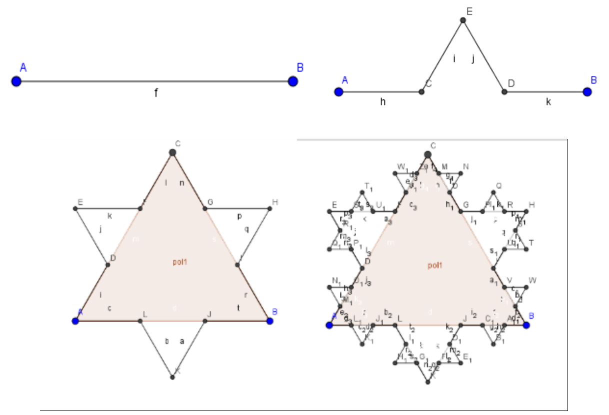
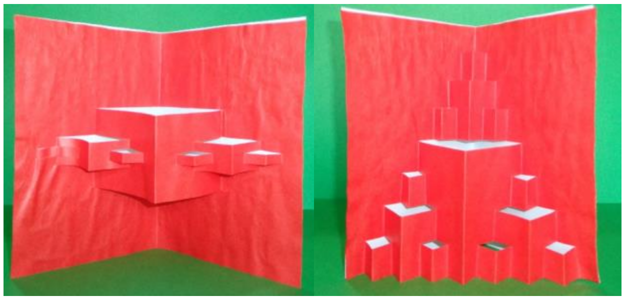


Figura 3: Floco de Neve
Fonte: Autores, 2017

O floco de neve de Koch é um Fractal obtido por meio de um triângulo equilátero. Cada lado do triângulo é dividido em três partes iguais e a do meio é substituída por um triângulo equilátero sem um dos lados. Ao estudar o Floco de Neve de Koch percebe-se que ele tem um perímetro infinito e uma área finita. Durante o Taller será construído este modelo usando o GeoGebra.

Outra possibilidade para construção de modelos de fractais é com o uso de material manipulável. No decorrer do Taller serão construídos dois cartões fractais, nos quais serão explorados padrões, conceitos de medidas, áreas, perímetro e auto-semelhança. Os exemplos de cartões estão na figura abaixo.



ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 4: Cartão Fractal
Fonte: Autores, 2017

Destaca-se que as construções por intermédio de materiais manipuláveis colaboram para a percepção a quem possui maior afinidade com métodos manuseáveis, explorando a visualização real e palpável das construções dos modelos fractais.

Procura-se indagar os alunos, afrontando seus saberes e provocando-os a pensar sobre as diversas áreas em que a mesma poderia ser aplicada, despertando o ser crítico de cada discente. Sobre isto, Picolli (2006, p. 07) comenta

> A realidade das salas de aula aponta para um ensino muitas vezes descontextualizado; os alunos não chegam, em geral, a fazer uma relação entre os assuntos estudados na escola e suas vivências extra-escolares, e, por isso, talvez, acabem por, simplesmente, memorizar conceitos prontos, regras, fórmulas que perdem o significado no cotidiano. Percebe-se, assim, a necessidade de aproximar escola e aluno.

Desta forma, a variabilidade de métodos utilizados para a abordagem da geometria fractal possibilita ao aluno melhor entendimento, assim também estimulando nos discentes a argumentação.

A articulação entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Fractal, possibilita compreender o porquê de os fractais estarem presentes em diversas disciplinas, bem como na biologia, em que há bactérias e plantas fractais, conhecidas por nós, brócolis e samambaia são exemplo a serem apontados. Além dos fractais estarem presentes também na fisiologia fractal, eles estão expostos na estética, já que possuem medidas numéricas ou estatísticas que são preservadas em diferentes escalas.

Considerações Finais

Diante dos argumentos expostos, considera-se que o estudo da Geometria Fractal, perpassa a compreensão de elementos da geometria euclidiana, possibilitando assim uma abrangência maior para o estudo e entendimento das diversas geometrias, as quais numerosamente são vistas como assuntos complexos e de árduo entendimento.

ISBN 978-84-945722-3-4

Buscaremos ao final do desenvolvimento do presente taller, discutir e construir modelos fractais por meio de materiais manipuláveis e softwares matemáticos de modo a contribuir com professores em serviço, futuros professores e estudantes no que diz respeito ao estudo de elementos relacionados com a Geometria Fractal.

Referências Bibliográficas

BARBOSA, R. M. *Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

D'AMBROSIO, U. *Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática*. Campinas: Unicamp, 1996.

LORENZATO, S. *Por que não ensinar Geometria?* A Educação Matemática em Revista, São Paulo, v. 4, n. 4, p. 3-13, 1995.

PICCOLI; L. A. P. *A construção de conceitos em matemática: uma proposta usando tecnologia de informação*. 2006. Disponível em: <http://meriva.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/2977/1/000383787-Texto%2BCompleto-0.pdf> Acesso em: 23/Mar/2017.

SANTALÓ, L. A. Matemática para não-matemáticos. In: SAIZ, Irma; PARRA, Cecilia (Org.). *Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas*. Tradução: Juan Acuna Llorens. Porto Alegre: Artes Médicas, 2006.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-994

TALLER CÁLCULO DEL ÁREA UTILIZANDO EL TANGRAMA CHINO.

Yohana Swears Pozo
yswears@uct.cl
Universidad Católica de Temuco. Chile

Modalidad: T
Nivel educativo: Medio o Secundario (12 a 15 años)
Núcleo temático: Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.
Palabras clave: *Área, Perímetro, Tangrama Chino.*

Resumen

Hoy en día la enseñanza de las matemáticas y en especial la enseñanza de la geometría se ha volcado hacia la mecanización y entrega de fórmulas más que propiciar una reflexión de contenidos y mucho menos en la construcción, la articulación y la apropiación de saberes matemáticos. La mayoría de las veces los estudiantes calculan área y perímetro con la utilización de fórmulas sin saber lo que realmente se está realizando, no existe una significación por parte de ellos e incluso por parte de los profesores, es por esta razón que este taller tiene por objetivo la comprensión de estos conceptos claves. El Taller propone la enseñanza de área y perímetro a través del diseño de distintas Situaciones Didácticas utilizando Tangrama Chino, con el fin que los estudiantes mediante distintas situaciones de descubrimiento, exploración, formulación y cálculos de estos conceptos básicos en geometría puedan construir e integrar estos en otros contenidos y situaciones de la vida diaria.

Las Situaciones didácticas son las siguientes N°1: Construcción del Tangrama. N°2: Trabajando con el Tangrama Construido (I parte).N°3: Trabajando con el Tangrama Construido (II parte).N°4: Cálculo de Superficie y Contorno de figuras del Tangrama.

Talleres de trabajo

Para los talleres que se presentan se trabajará con distintas guías, se parte con la construcción del Tangrama chino a partir de un cuadrado, luego se debe realizar el cálculo de área del cuadrado y de cada figura que nace de la descomposición del cuadrado original.

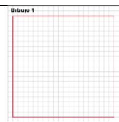
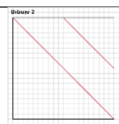
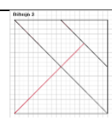
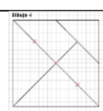
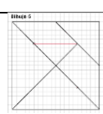
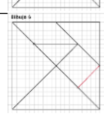
Luego se propone calcular área de dos figuras con el fin que comparen sus resultados y puedan concluir acerca de cómo es el área en distintas figuras como también en el cuadrado original.

ISBN 978-84-945722-3-4

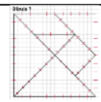
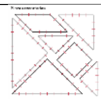
A continuación se muestra un extracto de los talleres a realizar:

<u>GUÍA N°1: Construcción del Tangrama.</u>

Objetivo: Construir un Tangrama a partir de un cuadrado.

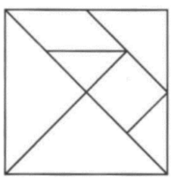
Dibujar un cuadrado(1)	
Dibujar una de las diagonales del cuadrado y el **trazo** que une los puntos medios de los lados consecutivos del cuadrado, este **trazo** debe ser paralelo a la diagonal dibujada.	
Dibujar la otra diagonal del cuadrado hasta el segundo **trazo**.	
La medida de la primera diagonal la debemos dividir en cuatro partes de igual medida.	
Dibuja el **trazo** que se muestra en el dibujo.	
Por último, dibuja el **trazo de color rojo que aparece en la figura.**	

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Ahora graduaremos el tangram haciendo marcas de 1 cm.	
Recorto las piezas.	

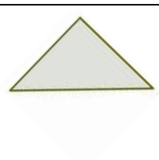
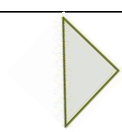
GUÍA N°2: Trabajando con el Tangrama construido.

Objetivo: Determinar una figura patrón con el fin de determinar las veces que cabe esa figura en cada figura y en todo el Tangrama.

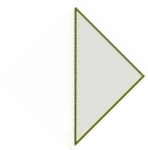
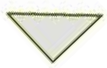
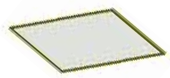
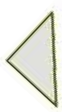
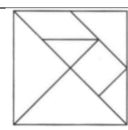


Si consideramos una de las figuras del Tangrama como unidad de medida de todas las otras figuras. Elige una de ellas de modo que al superponer sobre las otras figuras no falte ni sobre. Pinta la Figura patrón y explica por qué elegiste esa figura patrón.

¿Cuántas veces cabe la figura patrón en las otras figuras y en el Tangrama completo?

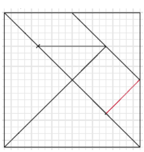
Figura	Número de Veces	Figura	Número de Veces
			

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

<u>GUÍA N°3: Trabajando con el Tangrama construido.</u>

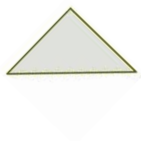
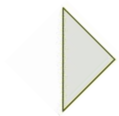
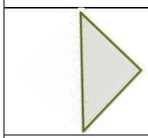
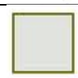
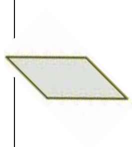
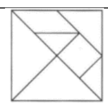
Objetivo: Determinar la cantidad de unidades cuadradas y el contorno del cuadrado, como también de cada una de las figuras del Tangrama.



- Si consideramos que cada cuadrito es una unidad cuadrada (u^2). Completa el siguiente cuadro y luego responde a las preguntas:

Figura	Número u^2	Figura	Número u^2

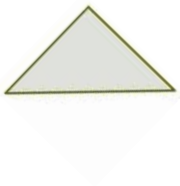
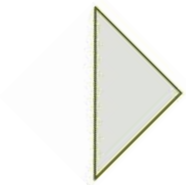
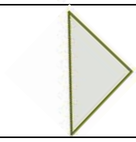
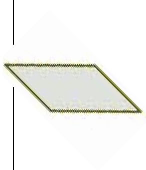
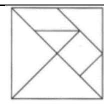
VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

- Si ahora contamos cada marca de 1 cm que hicimos al graduar el Tangrama. Ahora calcula el contorno del cuadrado original como de cada figura del Tangrama, Completando el siguiente cuadro y luego responde a las preguntas:

Figura	Número *u*	Figura	Número *u*

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

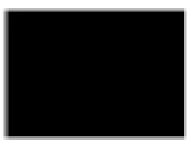
			
			
			
			

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

GUÍA N°4: Cálculo de superficie de figuras formadas con el Tangrama.

Objetivo: Determinar la superficie de figuras formadas con el Tangrama, para eso ocupa la a información obtenida anteriormente.

¿Qué podrías decir acerca de la superficie y contorno de las figuras propuestas? Responde en la guía.



Superficie y Contorno Figura 1

Superficie y Contorno Figura 2

Superficie y Contorno Figura 3

- Cómo conclusión general ¿Qué podrías decir acerca de la Superficie y del contorno de las Figuras que armaste?

ISBN 978-84-945722-3-4

Referencias bibliográficas

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. (1995). Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana.

Brousseau, G. (1997). Theory of Didactical Situations in Mathematics. EEUU: Kluwer Academics Publishers

Chevallard, Yves (1998). La Transposición Didáctica: Del Saber sabio al Saber enseñado. Argentina: AIQUE.

De Faria, E. (2006). Ingeniería Didáctica. Costa Rica: Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, año 1, número 2, vol. 2

Down-Moise (1990). "Geometría Moderna"

Godino, J. (2003). Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina Cientifica. Granada: Universidad de Granada.

Vidal, R. (2009). La transposición Didáctica: Un modelo teórico para investigar los estatus de los objetos matemáticos. Apuntes de didáctica Universidad Alberto Hurtado, Chile.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-1.038

PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN EL CONTEXTO ESCOLAR

Pedro Javier Rojas-Garzón – Rodolfo Vergel-Causado
pjrojasg@udistrital.edu.co – rodolfovergel@gmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos
Modalidad: T
Nivel educativo: Secundaria
Palabras clave: Pensamiento algebraico, símbolos literales, generalización, simbolización

Resumen

Se presenta una síntesis de resultados de investigación relacionada con el pensamiento algebraico, vinculada con procesos de generalización y simbolización. Se describen algunas dificultades que encuentran los jóvenes para abordar actividades asociadas a dichos procesos, y se plantean tareas para orientar el trabajo en el aula con niños y jóvenes, las cuales potencian el desarrollo el pensamiento algebraico y, en particular, los procesos de generalización. Adicionalmente se exponen algunas consideraciones que pueden alimentar reflexiones sobre una dialéctica entre formas de pensamiento algebraico y procesos de generalización, particularmente desde el trabajo con patrones.

Para el desarrollo de este taller posteriormente se abordarán de manera individual las tareas planteadas, se discutirán en pequeños grupos las propuestas de solución a dichas tareas, contrastándolas con respuestas esperadas por parte de estudiantes de diversos niveles de escolaridad, y finalmente se realizará una puesta en común de lo abordado en los diferentes grupos, resaltando elementos comunes y posibles diferencias. Las diversas producciones presentadas serán analizadas bajo las categorías o elementos teóricos propuestos.

Introducción

Diversas investigaciones han puesto en evidencia las dificultades que encuentran los niños y jóvenes en la transición aritmética–álgebra (Bednarz, Kieran & Lee, 1996; Rojas, Rodríguez, Romero, Castillo & Mora, 1999; Kieran, 2007; Rojas, 2015; Radford, 2011, 2012; Vergel, 2013, 2015), las cuales han aportado aproximaciones a caracterizaciones del pensamiento algebraico, además de poner en evidencia datos experimentales y justificaciones teóricas sobre la inclusión del álgebra desde la escuela primaria (6/7-10/11 años). El álgebra escolar, orientada al estudio de los polinomios y a la resolución de ecuaciones –asumida en forma

ISBN 978-84-945722-3-4

restrictiva como lenguaje simbólico–, suele abordase de manera abrupta en la educación secundaria (11/12-16/17 años). Un número significativo de estudiantes, que durante los años anteriores habían tenido un adecuado desempeño en aritmética, ahora manifiestan su extrañeza por tener que trabajar con *letras*:

> *"¿...por qué tengo que trabajar con letras?", o,*
> *"¿sí ve, de qué sirvió todo lo anterior? … ¡para que ahora no entienda nada!".*

La denominación usual de "letra", utilizada en las aulas, podría ser fuente de dificultades, en tanto posibilitaría interpretaciones no deseables sobre el sentido que se le asigna a estos símbolos literales en dichos contextos. En relación con la aritmética y el álgebra es importante reconocer la existencia de un "continuo" entre estos dos campos. Las relaciones aritméticas, de por sí, cuentan con un carácter algebraico (Rojas et al., 1999); desde la aritmética es posible trabajar con cantidades desconocidas y con procesos de variación, por ejemplo, desde la proporcionalidad (que además posibilita una relación con la geometría), desde el reconocimiento y uso de "unidades múltiples", que pocas veces es tematizado en el trabajo de aula. Al respecto, existen propuestas desde las cuales se plantea considerar "la multiplicación como cambio de unidad" como un objeto de la transición aritmética-álgebra (Mora & Romero, 2004; Grupo Mescud, 2006; Rojas, Romero, Mora, Bonilla, Rodríguez & Castillo, 2011), reconociendo que tal reconceptualización de la multiplicación permite entender que, cuando se multiplica:

> lo que esencialmente se hace es expresar una cantidad o magnitud –no necesariamente entera– de cierta cantidad o magnitud unidad, en términos de otra unidad, y que para llevar a cabo tal cambio de unidad, se realizan procesos de unitización o de normación (Rojas et al., 2011, p. 58)

Desde estas asunciones es posible proponer un camino de relaciones entre aritmética y álgebra, que posibilita el logro de mejores aprendizajes, utilizando ideas culturalmente sedimentadas involucradas en la *unitización* (proceso y efecto de construir nuevas unidades de referencia) y en la *normación* (proceso y efecto de reconceptualizar un sistema en relación con alguna unidad establecida).

Kieran (2007) destaca que las dificultades con que se encuentran los estudiantes en el "tránsito de la aritmética al álgebra" tienen que ver con el uso que se hace de las "letras" y con un cambio notable en las convenciones usadas inicialmente en aritmética: la concatenación de símbolos, el uso de paréntesis y los usos del signo igual; reconociendo además otras dificultades, relacionadas con diversas interpretaciones de las "letras", así como el reconocimiento y uso de estructuras (superficial y sistémica). Algunos estudios en el contexto colombiano, en relación con dificultades en el aprendizaje del álgebra y sobre el significado asignado por

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

estudiantes de grado 8° y 11° al uso de las "letras" en álgebra (Rojas et al., 1999; Agudelo, 2000; Agudelo & Vergel, 2009), sugieren la necesidad de profundizar en el estudio del currículo del área de matemáticas; necesidad que también se manifiesta en los resultados de estudios internacionales, como el TIMMS, que dan cuenta del escaso desarrollo del pensamiento matemático construido a través del aprendizaje del álgebra. Las dificultades reportadas podrían estar más relacionadas con la escasa tematización que se hace desde el contexto escolar en relación con la generalización, y con lo no determinado o lo desconocido; en este sentido, podríamos pensar que se trata más de dificultades de tipo curricular o didáctico, que de dificultades de tipo cognitivo. De hecho, los niños, desde temprana edad, reconocen y trabajan lo general (Carraher & Schliemann, 2007) e, incluso, pueden tematizar lo desconocido.[24]

Álgebra escolar y currículo. El Álgebra Temprana como una perspectiva de cambio curricular

En un trabajo anterior, Rojas & Vergel (2013) reconocen que si bien desde el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Norteamérica (NCTM, 2000) no se plantea explícitamente un trabajo en los primeros grados de primaria en relación con la integración del pensamiento algebraico en las matemáticas escolares, sí reconocen la importancia de trabajar desde estos cursos tareas y actividades orientadas a la búsqueda de patrones, así como realizar experiencias significativas con números y sus propiedades, como fundamento para un trabajo posterior, comprensivo, con símbolos y expresiones algebraicas. En el contexto canadiense, para plantear otro caso, el currículo ha sido algebrizado, y el álgebra aparece desde el primer año de escuela primaria; sin embargo tal *algebrización* no ha sido en el sentido propuesto por Kaput (2000) de integrar el pensamiento algebraico en las matemáticas escolares. Siguiendo ideas de Radford (2012), en el programa de estudios de matemáticas de Ontario (Canadá) la diferencia entre la aritmética y el álgebra no es clara, no se sabe si ciertos contenidos prescritos están todavía dentro de lo que debería considerarse aritmética o ya están dentro de lo que sería álgebra. Se plantea así la necesidad de prestar más atención a identificar y usar relaciones funcionales, desarrollar y usar tablas, gráficas y reglas para describir

[24] La posibilidad de potenciar el desarrollo de pensamiento algebraico en los primeros años de escolaridad es un aspecto que cada vez genera mayor interés para la investigación en educación matemática. En particular, la generalización de patrones es considerada como una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela. Sin embargo esto demanda el desarrollo de una perspectiva amplia sobre la naturaleza del álgebra escolar, orientada más a abordar aspectos estructurales del razonamiento algebraico que simbólicos y procedimentales (Godino, Castro, Aké & Wilhelmi, 2012), que considere, por ejemplo, una relación dialéctica entre las formas de pensamiento algebraico y las maneras de resolver los problemas sobre generalización de patrones (Vergel, 2015).

ISBN 978-84-945722-3-4

situaciones, realizar interpretaciones entre diferentes representaciones (verbales, gráficas, numéricas, tabulares, figurales, simbólicas), además de proponer problemas abiertos y tareas ampliadas, en diferentes contextos, que incorporen el uso de métodos informales en la resolución de problemas e investigar y formular preguntas a partir de situaciones problema.[25]

Precisamente la propuesta de cambio curricular Álgebra Temprana enfatiza la idea de Kaput (2000) sobre la *algebrización* del currículo de matemáticas. Diversos estudios e investigaciones han abordado el problema de la incorporación del Álgebra desde los primeros años escolares, no como una asignatura sino como una manera de pensar y actuar sobre objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas, como guía hacia una enseñanza con comprensión y significado de las matemáticas. En términos generales, la propuesta del Álgebra Temprana considera el Álgebra desde una concepción amplia, que abarca el estudio y generalización de patrones y relaciones numéricas, el estudio de relaciones funcionales, el desarrollo y la manipulación del simbolismo, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, y la modelización (Kaput, 2000; citado en Socas, 2011).[26] Esta perspectiva convoca a los docentes de todos los niveles a posibilitar en el trabajo de aula de matemáticas la observación y descripción de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y propiciar un ambiente escolar en el que se valore que los estudiantes exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan, argumenten, comprueben ideas y también, por supuesto, que practiquen y ejerciten habilidades de cálculo (Blanton & Kaput, 2005).

Una caracterización del pensamiento algebraico

El *pensamiento* es entendido aquí como un proceso de actividad humana, lo cual sugiere un proceso en constante movimiento y cambio. En tal sentido, aceptamos que el movimiento es una categoría ontológica fundamental. Según Davydov (1981, p. 279), el pensamiento de un hombre "es el movimiento de formas de actividad de la sociedad históricamente constituidas y apropiadas por aquél".

---

[25] En Lineamientos Curriculares del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 1998) se propone una restructuración conceptual y metodológica del álgebra escolar, enfatizada desde el pensamiento variacional, que ponga el acento en los procesos de generalización, la comunicación, la argumentación y la modelación de situaciones de cambio, como ejes fundamentales en la construcción del pensamiento algebraico; además de motivar el estudio de la variación y el cambio, de las regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente, como elementos asociados al pensamiento algebraico, se plantean sugerencias explícitas sobre actividades para desarrollar el pensamiento variacional desde los primeros niveles de la Educación Básica Primaria.

[26] En el contexto internacional se reconoce otra perspectiva, la *Pre-Álgebra*, desde la cual se plantea la necesidad de abordar un trabajo previo al estudio del álgebra formal; una transición desde la Aritmética al Álgebra, que toma como referencia las dificultades y los errores de los alumnos en Álgebra, las cuales dan cuenta de un tratamiento insuficiente de lo aritmético y lo numérico en la Educación Primaria. En este sentido, esta perspectiva curricular se diferencia de la propuesta del Álgebra Temprana o Early Algebra.

ISBN 978-84-945722-3-4

A partir de los trabajos de Viète (1591/1983) y Descartes (1637/1954), es posible afirmar que en el pensamiento algebraico no hay diferenciación entre números conocidos y desconocidos.[27] En este sentido, la diferencia entre la aritmética y el álgebra no puede darse en términos de notaciones, como a menudo se piensa, y es necesario tener en cuenta que el simbolismo algebraico alfanumérico, usado en la actualidad, es una invención reciente, es decir, el nacimiento del álgebra no puede asociarse con el nacimiento del simbolismo moderno (Radford, 2012). En otras palabras, para pensar algebraicamente no es una condición necesaria, ni suficiente, el uso de "letras". Siguiendo ideas de Radford (2013a), el pensamiento algebraico se entiende como un sistema de procesos corporizados de acción y de reflexión, constituidos histórica y culturalmente, y el *Saber algebraico* es una síntesis evolutiva (sintetiza acción humana, es dinámica, transformativa) y culturalmente codificada (como patrones de acción) de hacer y reflexionar en términos analíticos (i.e., la analiticidad en términos del carácter operatorio de lo desconocido) sobre números indeterminados y conocidos. Para este autor, el pensamiento algebraico se puede caracterizar desde tres componentes relacionadas: (a) *el sentido de indeterminancia* (objetos básicos como: incógnitas, variables y parámetro) como aquello opuesto a la determinancia numérica; (b) la *analiticidad*, como forma de trabajar los objetos indeterminados, es decir, el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos; y (c) la *designación simbólica o expresión semiótica* de sus objetos, esto es, la manera específica de nombrar o referir los objetos.

Tareas y actividades para orientar el trabajo en el aula

Las tareas y las actividades que puedan suscitarse a partir de ellas imponen dos retos; por una parte, contribuir al desarrollo del pensamiento algebraico, y, por otra, constituirse en unidades de análisis para interpretar la actividad matemática de los estudiantes. En este sentido, los elementos teóricos expuestos en este trabajo fungen como herramientas analíticas que permiten no solo orientar las tareas propuestas sino también interpretar las producciones matemáticas de los estudiantes en las actividades desarrolladas.

> *Dobleces de papel y proceso de generalización.* Tomemos una tira de papel, y realicemos la acción de unir los respectivos extremos (doblar por la mitad), realizando el doblez respectivo (una marca sobre la tira de papel); reiterando esta acción, siempre en el mismo sentido; por ejemplo, al realizar dos veces la acción de doblar por la mitad se obtienen 3 dobleces y a la tercera 5 dobleces. ¿Cuántos dobleces se obtendrían al realizar 5 veces la misma acción? ¿7 veces? ¿15 veces? ¿100 veces?

El trabajo a partir de material concreto motiva a los estudiantes a abordar el trabajo, pues manipular la tira de papel les posibilita responder adecuadamente a la primera pregunta e incluso cuando se realiza 6 veces la misma acción, pero poco a poco la dificultad para

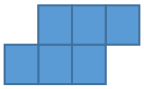
[27] Esta es la razón por la cual Viète y otros matemáticos en el siglo XVI se referían al álgebra como un arte analítico.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

manipular lo concreto hace que se abandone la tira de papel y centren su mirada en lo abstracto, en las relaciones posibles, ya sea entre las respuestas a las acciones anteriores, o entre las veces que se realiza la acción y el número de dobleces que se obtendrían. Si bien muchos estudiantes identifican un patrón y logran generalizar, no siempre logran "capturarlo" mediante una expresión algebraica. Godino et al. (2012, p. 490), citando a English y Warren (1998), reconocen que la parte más difícil es expresar algebraicamente las generalizaciones y resaltan que "hay un desfase entre la habilidad de los estudiantes para reconocer y expresar verbalmente un cierto grado de generalidad y la habilidad para emplear la notación algebraica con facilidad".

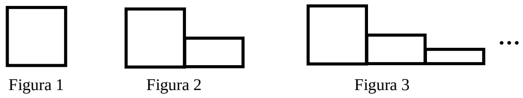
De las configuraciones con baldosas a las relaciones área-perímetro

Tomando como referencia la figura dada, en la cual cada par de baldosas debe estar unida al menos por uno de sus lados, ¿es posible añadir baldosas de manera tal que el perímetro de la nueva configuración de baldosas sea 18 unidades?, ¿cuál sería el número mínimo de baldosas requeridas?, ¿cuál sería el máximo?



Explorar esta situación, y encontrar las diversas configuraciones que cumplan la condición planteada, posibilita que los estudiantes reconozcan que añadir una baldosa no implica que el perímetro de la nueva configuración aumente, pues podría mantenerse e, incluso, disminuir; así como reconocer expresiones que le posibiliten resumir los diversos hallazgos, en particular, las relaciones entre área y perímetro.

Secuencia de figuras, áreas y búsqueda de patrones



Si cada figura se obtiene de la anterior adicionando un rectángulo a la derecha ésta, el cual mantiene un lado con longitud igual al lado del cuadrado de la Figura 1 y el otro lado corresponde a la mitad del rectángulo a su izquierda, ¿cuál sería el área de la Figura 5?, ¿de la figura 100?, ¿de la Figura *n*?

Esta tarea, en particular, posibilita, además de relacionar diversos sistemas de representación el figural, el numérico y el algebraico, proceder a una serie de determinaciones sensibles y notar similitudes y diferencias (Radford, 2013b). Es posible que los estudiantes fijen su atención en la forma de las figuras, la cantidad de rectángulos que constituyen cada una de estas figuras, etc. Desde algunos estudios (ver, por ejemplo, Radford, 2013b; Vergel, 2015),

ISBN 978-84-945722-3-4

esta escogencia de similitudes y diferencias la podrían hacer los estudiantes según la comprensión que se hacen del objeto de la actividad de generalización.

Consideraciones finales

La posibilidad de potenciar el desarrollo de pensamiento algebraico en estudiantes jóvenes es un aspecto que continúa generando interés en el campo de la investigación en Educación Matemática. En particular, la generalización de patrones puede verse como una actividad clave para introducir el álgebra en la escuela. El término *algebrización* del currículo introducido por Kaput (2000) parece necesario y pertinente, pues potenciar maneras de pensar y actuar sobre objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas, puede ser una ruta para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con comprensión y significado. Es necesario estar sensibles a la actividad matemática de los estudiantes y, en particular, al trabajo de expresar algebraicamente las generalizaciones, reconociendo y potenciando producciones que no contienen signos alfanuméricos. El sentido de la indeterminancia, la analiticidad y la expresión semiótica podrían estar presentes a través de una actividad multimodal, en la cual intervienen la percepción, los gestos, los símbolos matemáticos y el lenguaje natural (Radford, 2013b; Vergel, 2013, 2015), por lo que es necesario reconocer todas aquellas situaciones discursivas (orales y escritas), gestuales y procedimentales que evidencien en los estudiantes intentos de construir explicaciones y argumentos sobre estructuras generales y modos de pensar, así sus argumentaciones y explicaciones se apoyen en situaciones particulares, o en acciones concretas (Godino et al., 2012). En términos epistemológicos, los modos de conceptualizar, conocer y pensar, no pueden ser descritos adecuadamente sólo en términos de prácticas discursivas. Es importante considerar los recursos cognitivos, físicos y perceptuales que los estudiantes movilizan cuando trabajan con ideas matemáticas.

Referencias bibliográficas

Agudelo, C. (2000). Una innovación curricular que enfoca el proceso de transición entre el trabajo aritmético y el algebraico. Tunja: UPTC.

Agudelo, C. & Vergel, R. (2009). Proyecto PROMICE -*Promoción de un enfoque interdisciplinario y de resolución de problemas en el inicio del trabajo algebraico escolar: integrando contextos de ciencias y el uso de tecnología digital*. Informe final – Código 86 de 2007. Centro de documentación, IDEP, Bogotá.

ISBN 978-84-945722-3-4

Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra: Perpectives for Research and Teaching*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Carraher, D. & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En: F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, pp. 669-705). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Davydov, V. (1981). *Tipos de generalización en la enseñanza*. La Habana: Pueblo y Educación.

Descartes, R. (1954). *The geometry*. New York: Dover [Original published 1637].

English, L. & Warren, E. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The Mathematics Teacher*, *91*(2), 166 – 171.

Godino, D., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Bolema, 26*(42B), 483-511.

Grupo Mescud (2006). *Razonamiento multiplicativo: un camino posible*. Bogotá: Fondo de publicaciones Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. & Blanton, M. (2001). Algebrafying the Elementary Mathematics Experience. Part I: Transforming Tasks Structures. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (Proceedings of the 12th ICMI Study, Vol. 1, pp. 344-351). Melbourne: University of Melbourne.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En, F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, pp. 707-762). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

MEN (1998). *Lineamientos Curriculares. Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

Mora, L. & Romero, J. (2004). ¿Multiplicación y división "o" cambio de unidad? En Rojas, P. (Comp.). *Memorias del Sexto Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 13-20). Bogotá: Asociación Colombiana de Matemática Educativa.

Radford, L. (2012). Early algebraic thinking: Epistemological, semiotic, and developmental issues. *ICME-12 Regular Lecture*. Seoul, South Korea. July 8-15, 2012.

Radford, L. (2013a). Three key Concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, *2*(1), 7-44.

Radford, L. (2013b). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3-12). Granada, España: Comares.

Rojas, P. (2015). Objetos matemáticos, representaciones semióticas y sentidos. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(1), 151-165.

Rojas, P., Rodríguez, J., Romero, J. Castillo, E. & Mora, L. (1999). *La transición aritmética-álgebra*. Bogotá: Universidad Distrital–Gaia.

Rojas, P., Romero, J., Mora, L., Bonilla, M., Rodríguez, J. & Castillo, E. (2011). *La multiplicación como cambio de unidad: Estrategias para promover su aprendizaje*. Bogotá: Universidad Distrital.

Rojas, P. & Vergel, R. (2013). Procesos de generalización y pensamiento algebraico. *Revista Científica, Edición especial,* 760-766.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números*, *77*, 5-34.

ISBN 978-84-945722-3-4

Vergel, R. (2013). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años). *Revista Científica, Edición especial*, 234-240.
Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*, *9*(3), 193-215.
Viète, F. (1983). *The analytic art*. New York: Dover [Original publicado en 1591].

- **Anexo: Otras tareas para orientar actividades en el aula** *(Pensamiento algebraico)*

(1) Encuentre todas las parejas de números tal que: (a) Su suma sea 6, (b) Su producto sea 6.

(2) ¿Es posible encontrar una figura cuya área sea 1centímetro cuadrado y su perímetro sea superior a 4 centímetros?, ¿con área 1 cm² y su perímetro superior a 1000 cm?, ¿con área 1 cm² y su perímetro superior a un millón de centímetros?, ¿con área 1 cm² y su perímetro igual a 1000 cm?

(3) Halle una expresión que permita encontrar la suma de tres números consecutivos cualesquiera: (a) Proponga ejemplos, (b) ¿Existe otra expresión equivalente a la encontrada en cada caso?, (c) ¿Es posible garantizar dicha equivalencia en general?

(4) Encuentre la mayor cantidad de números mayores que 0 y menores que 1, ¿es posible encontrar una expresión general que permita representar dichos números?, ¿podría "mostrar" exactamente mil ejemplos de números entre 0 y 1? ¿existe una expresión mediante la cual puedan ser representados? Explique su respuesta.

(5) Llamaremos *hexarecto* a todo hexágono cuyos lados consecutivos, dos a dos, siempre forman ángulo recto.

- Construya dos hexarectos diferentes de perímetro 24cm; compare los resultados con lo propuesto por tres de sus compañeros.
- Calcule el área de todos hexarectos propuestos por el grupo, ¿cuál es el de menor área? ¿cuál el de mayor área?
- De todos los hexarectos con perímetro 24cm, posibles de construir, ¿cuál sería el de área máxima? Explique su respuesta.
- ¿Es posible representar el perímetro de muchos hexarectos usando una sóla expresión? Explique su respuesta

(6) Induzca una ley general para calcular el producto: $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

(7) Investigue sobre el proceso de construcción de la *curva de Köch*,

- ¿Cuál sería la longitud de la curva en cada paso (1°, 2°, 3°,…)?
- ¿Cuál sería su longitud en el paso *n*?

ISBN 978-84-945722-3-4

T-1.071

EL AJEDREZ EN LA CLASE DE MATEMATICAS

Martín Alejandro Almirón
martinalmiron@yandex.com
Instituto Superior del Profesorado N°6 "Dr. L. Chizzini Melo"- Argentina

Núcleo temático: V. Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
Modalidad: T
Nivel educativo: Primario Secundario, Superior.
Palabras clave: Ajedrez, Matemáticas, didáctica de la matemática, Enseñanza

Resumen

El objetivo de este taller es aprovechar el juego de ajedrez como herramienta pedagógica, y mostrar posibles propuestas de enseñanza de la matemática con ajedrez para el nivel primario, secundario o superior. El taller está enfocado en aprovechar el pensamiento lógico y la creatividad, teniendo en cuenta conceptos matemáticos, a partir del juego de ajedrez. Los temas que se pueden abordar son diversos, fracciones, geometría, probabilidad y estadística. El ajedrez se enseña en las escuelas Primarias de la Provincia de Santa Fe, por lo cual es un recurso que está presente en las escuelas primarias, también puede ser aprovechado en las escuelas secundarias y es necesario que el profesor de nivel superior conozca las posibilidades que ofrece el juego ciencia a la hora de pensar una clase de matemáticas.

Fundamentación

La práctica del ajedrez permite desarrollar el pensamiento lógico y la memoria, además del ejercicio de tomar decisiones, en este sentido, el ajedrez presenta diferentes situaciones a resolver, por lo que se podría decir que desarrolla la capacidad de resolver problemas. Sin entrar en la discusión si la resolución de problemas es una capacidad o una estrategia, sabemos que la misma es uno de los ejes de la enseñanza de la matemática la presentación de situaciones problemáticas para que resuelvan los estudiantes.

Algunas de las escuelas Primaria de la Provincia de Santa Fe República Argentina, tienen 40 minutos semanales de ajedrez en 4° y 5 grado de la Educación Básica, para lo cual ha formado docentes y desde el Plan Provincial de Ajedrez Educativo se impulsa el ajedrez y su fortaleza para introducirlo en la clase de matemática, partiendo del supuesto que:

- Los estudiantes conocen el juego, por lo tanto, es un conocimiento previo común para todos.
- La vinculación matemática es tan natural, que solo hay que hacerla formal.

Los tiempos institucionales hacen que muchas veces los docentes no puedan encontrarse entre ellos para pensar actividades conjuntas, vinculando áreas y saberes diferentes a través de diferentes propuestas de enseñanza, lo cual hace relevante que el docente de matemática pueda conocer que actividades se pueden realizar con el ajedrez, en particular si en la institución en la que desempeña se dicta este juego.

Relación del ajedrez con las fracciones

Si pidiéramos dividir un tablero por la mitad… ¿de cuantas maneras se puede hacer? O si quisiéramos representar las casillas a las que puede ir una pieza, nos serian útiles las fracciones.

Relaciones con la geometría

El ajedrez se juega en un plano cuadrado dividido en 64 escaques (casillas), las piezas son cuerpos tridimensionales, la simetría y las nociones de distancia están presentes. El concepto de segmento, vertical y diagonal están presentes. Incluso la ubicación espacial de las piezas en un sistema de coordenadas son conceptos matemáticos.

Relación del ajedrez con Probabilidad

La probabilidad está presente en todo momento, por ejemplo, la fuerza de una ajedrecista se mide por los puntos ELO, que es un sistema de puntuación basado en estadística, y fuertemente apoyado en probabilidad. Por ejemplo, la expectativa de ganar una partida a otro jugador está estandarizada y se asigna una probabilidad. También a la hora de mover piezas o de conocer las diferentes valoraciones de una posición se asignan probabilidades

Metodología

ISBN 978-84-945722-3-4

El taller implica, tal como su nombre lo indica, es un espacio donde se realizan actividades. Se aprende desde lo vivencial y no desde la transmisión. Predomina el aprendizaje sobre la enseñanza. Se trata entonces de un aprender haciendo, donde los conocimientos se adquieren a través de una práctica concreta, realizando algo relacionado con la formación que se pretende proporcionar a los participantes. Es una metodología participativa que propone diversas formas de trabajo conjunto entre los distintos actores participantes. La palabra tendrá un uso privilegiado, con el fin de problematizar, desandar y reconstruir concepciones, saberes e interpretaciones. Ello no supone 'leer' la práctica desde los rígidos marcos teóricos que enmarcan y limitan la comprensión del hecho educativo en su diversidad y complejidad. Se trata, de poner en tensión los enfoques teóricos y la práctica cotidiana docente de la clase de matemáticas, de modo tal que las situaciones experienciales puedan también interpelar a las construcciones teórico-conceptuales.

Desarrollo del Taller

Luego de una breve introducción al tema (30 min) se darán actividades para resolver en pequeños grupos (60 min) y finalmente si hará una puesta en común (30 min) para obtener conclusiones.

Evaluación

Se espera que los participantes puedan llevarse herramientas que permitan desarrollar actividades de matemática diferentes, ampliando las posibilidades de su enseñanza, para lo cual, los asistentes al taller deberán hacer una breve narrativa acerca de su experiencia en el taller, a modo de avaluación del mismo y de autoevaluación.

Referencias bibliográficas

Bergier J (2001). *Juguemos a las matemáticas con el ajedrez*. Buenos Aires

Bonsdorff E. (1974). *Ajedrez y Matemáticas*. España: Ediciones Martinez Roca.

Jaureguiberry J. (20012) *Jaque a las fracciones*. Rosario: Ed. Municipal de Rosario.

Landreani, N. (1996). *El taller, un espacio compartido de producción de saberes.* Cuadernos de Capacitación Docente. Año 1 N°1, 32-47. Paraná: Ed. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad Nacional de Entre Ríos.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-1.078

TALLER DE INICIACIÓN: FAMILIARÍZATE CON GEOGEBRA

Hendel Yaker Agudelo, Leonel Alcides Monroy Guzmán
hyaker@icesi.edu.co, leonel.monroy@correounivalle.edu.co
Universidad Icesi, Universidad del Valle, Instituto GeoGebra Cali; Colombia.

Núcleo Temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
Modalidad: T
Nivel educativo: Formalización y actualización docente.
Palabras claves**:** Pensamiento Matemático, Solución de problemas, Construcción dinámica, Buenas preguntas.

Resumen

El taller hace parte las actividades que adelanta el Instituto GeoGebra Cali en su proyecto macro de llevar GeoGebra a las aulas de Matemáticas en las escuelas y colegios de la ciudad de Cali, Colombia. Es un taller de iniciación para profesores de Matemáticas, con dos propósitos: i) dar a conocer el software en sus aspectos más generales y ii) vivenciar con los participantes la premisa fundamental del proyecto: con un mínimo requerimiento técnico y con buenas preguntas se puede promover el desarrollo de pensamiento matemático al trabajar con GeoGebra. En su desarrollo, el facilitador ilustra el uso de una herramienta con un ejemplo sencillo, luego invita a los participantes a reproducirlo y después les plantea un reto donde se pone en juego el recurso técnico visibilizado y alguna idea matemática subyacente. Los participantes deben explorar y discutir ideas con sus pares.

En muchas partes del mundo se está planteando la necesidad de transitar de la enseñanza de matemáticas basada en clases magistrales expositivas, hacia metodologías "activas". Nuestro taller pretende hacer un aporte en esta reflexión, invitando a la vez a aprovechar toda la potencialidad de GeoGebra.

Antecedentes

En Colombia el Ministerio de Educación Nacional (MEN 1999) puso en marcha un proyecto de Incorporación de Nuevas tecnologías al currículo de Matemáticas de la educación media, donde se destaca como uno de sus objetivos principales la formación permanente, intensiva y continuada de los docentes, centrada en la reflexión sobre su propia práctica en el salón de clase y en las posibilidades del recurso tecnológico. En los Estados Unidos el consejo nacional de profesores de matemáticas (NCTM, 2000) identifica el uso de la tecnología como un elemento esencial que debe sustentar las propuestas curriculares. En estas publicaciones se reconoce el poder que ofrece el empleo de distintas herramientas tecnológicas en la resolución de problemas y la comprensión de las ideas matemáticas, y se señalan así mismo

ISBN 978-84-945722-3-4

los procesos inherentes del quehacer de las matemáticas (pensamiento matemático): resolución de problemas, modelación, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representaciones.

Se señala entonces un horizonte de posibilidades que nos invita, a los interesados en la educación matemática, a trabajar e investigar en la dirección de generar propuestas curriculares que se articulen con el quehacer matemático e incorporen el apoyo de la tecnología computacional. Santos, L. M. (2011) documenta un ejemplo sobre empleo software dinámico, donde afirma que:

> De manera general, se observa que el uso del software dinámico puede resultar una herramienta poderosa para los estudiantes en términos de generar representaciones dinámicas del problema que les permitan identificar relaciones matemáticas. Se destaca que, durante la construcción y análisis de las representaciones dinámicas, los estudiantes deben pensar el problema en términos de preguntas que los conduce al planteamiento de conjeturas o relaciones (p. 51).

GeoGebra

El carácter dinámico de este software abre enormes posibilidades de exploración y experimentación. Con sólo conocer unas cuantas herramientas dentro de las ventanas disponibles, manejar algunos comandos básicos, y guiado por buenas preguntas, el usuario puede aproximarse a un manejo concreto de los objetos matemáticos y de sus relaciones, requisito fundamental para la reconstrucción y apropiación de los conceptos abstractos subyacentes. Al hacer la simbiosis de Geometría y Álgebra, GeoGebra permite involucrar el símbolo (representación del objeto) en el proceso de experimentación, de modo que también se va construyendo de manera natural el lenguaje con el que finalmente se formalizarán los resultados del aprendizaje.

Por otra parte, el fácil acceso al software y el apoyo incondicional de una gran comunidad académica internacional, se articulan con las características ya mencionadas para permitir otras alternativas, como el enfoque de metodologías activas [Hipólito, G. (1998), Mazur, E. (2009)], donde el alumno puede estudiar por su cuenta basado en sencillas directrices, y se

ISBN 978-84-945722-3-4

aprovecha el tiempo de clase para interactuar con los pares y con el profesor, responderse preguntas y formular nuevas inquietudes, generando así un ambiente propicio para el desarrollo del pensamiento matemático.

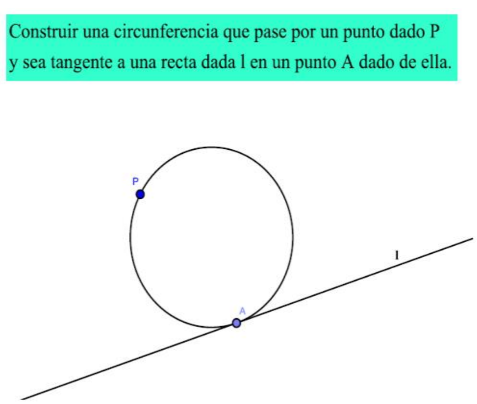
En el taller se pretende vivenciar con los participantes todas estas posibilidades, a la vez que se les invita a incorporarlas en las reflexiones sobre su práctica docente.

Un ejemplo

En la primera parte del taller, el facilitador desarrolla construcciones a través de las cuales paulatinamente se introducen aspectos técnicos del software y se reta a los participantes para que pongan en juego sus conocimientos matemáticos y su intuición, con el fin de explorar colectivamente las posibilidades de cada construcción.

Para la segunda parte, el participante enfrentará de forma individual retos (construcciones, problemas, etc.) que requieren la articulación de la matemática básica con las posibilidades que brinda el software.

Figura 1



Se busca que los asistentes, con el uso de algunas herramientas dadas en la primera parte del taller, exploraren las posibles soluciones del problema y conjeturen algunas soluciones por tanteo. El proceso pretende llevar al participante a las ideas o conceptos claves que deben involucrarse en la solución general del reto. Los facilitadores brindamos orientaciones hasta alcanzar una solución reconocida por GeoGebra como una construcción dinámica, es decir que al modificar los elementos dados se mantengan los resultados

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

requeridos. La etapa que sugerimos debe seguir sería la de formalización.

Comentario final

En las nuevas tendencias de investigación en educación matemática, la atención vuelve a centrarse en el quehacer del docente, que debe prepararse para ser un diseñador de ambientes de aprendizaje mediados por tecnología. Esto no significa que los docentes tengamos que convertirnos en expertos en el uso de nuevas tecnologías, como puede evidenciarse por ejemplo con el uso de GeoGebra; el verdadero reto aparece en las transformaciones curriculares y los nuevos enfoques de trabajo en el aula que demanda el empleo de las nuevas herramientas.

Referencias Bibliográficas

Mazur, E (2009). Confessions of a converted lecturer https://www.youtube.com/watch?v=rvw68sLlfF8 /Consultado 28/07/2016.

González, H. (1998). El proyecto Educativo de la Universidad Icesi y el aprendizaje activo. Cali: Universidad Icesi.

MEN. (1999). Nuevas Tecnologías: Apoyo a los Lineamientos Curriculares. Bogotá, Colombia: Punto EXE Editores.

ISBN 978-84-945722-3-4

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston VA: The Council.
Santos, L.M. (2011). La educación Matemática, resolución de problemas, y el empleo de herramientas computacionales. Cuadernos de i8nvestigación y formación en educación matemática. 2011. Año 6. Número 8. pp 35-54 Costa Rica.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-1.098

ORIGAMI MODULAR Y EL APRENDIZAJE DE GEOMETRÍA EN EDUCACIÓN SECUNDARIA

Borja Artamendi Aguirregomezcorta – Marta García Valldecabres
borjaart@ucm.es- martag36@ucm.es
Universidad Complutense Madrid, España

Modalidad: T
Nivel Educativo: Medio o Secundario
Núcleo temático: V. Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Palabras Clave: Aprendizaje de conceptos geométricos, origami modular, educación secundaria, experiencias lúdicas y significativas

Resumen

En este trabajo se presentan los resultados de un taller de origami modular en educación secundaria. El taller tiene como propósito que los alumnos interpreten el concepto geométrico de la manipulación del papel. Estos talleres se realizan en dos fases. En la primera, de geometría plana, los alumnos construyen los diferentes módulos de papel, consolidando conceptos como ángulos, líneas notables, teorema de Pitágoras, etc. En la segunda, de geometría tridimensional, de una manera lúdica y significativa, los alumnos construyen poliedros descubriendo la simetría rotacional, planos de simetría, ángulos diedros, defecto angular, la fórmula de Euler, la altura de un triángulo, cálculo de volúmenes, etc. Los resultados muestran que los alumnos han valorado muy positivamente la experiencia y podemos constatar que les ha servido para repasar el temario de cursos pasados e introducir nuevos conceptos, además de trabajar las capacidades de inducción y generalización.

Introducción

El aprendizaje de la geometría con recursos materiales manipulativos es frecuente en las etapa de infantil y primaria, relegando su uso posteriormente. Su utilización en secundaria, acompañada de la interpretación geométrica de lo que hacemos al doblar el papel, permite un aprendizaje significativo de los conceptos geométricos abstractos.

Motivación

La geometría es la parte de las matemáticas más intuitiva, habitualmente se trabaja analíticamente, sin incidir en la visualización. Debido a ello se ha creado este taller en el que hacemos uso del origami. El origami o papiroflexia surgió en Japón en el año 1680 como el arte de hacer figuras reconocibles utilizando papel. Su finalidad era artística y pertenecía a la alta clase japonesa debido al alto precio del papel. A pesar de su origen artístico, hoy en día se aplica, entre otros, como una herramienta para explicar las matemáticas (Royo Prieto, 2002).

El origami modular se basa en construir varios módulos mediante dobleces de papel para posteriormente ensamblarlos y obtener figuras geométricas. Tiene muchas ventajas para explicar conceptos geométricos. La primera es que nos permite ver la geometría de una forma vivida y efectiva, a través de material que se puede palpar y girar. Los alumnos trabajan las habilidades manipulativas y desarrollan la psicomotricidad fina gracias al uso de este recurso manipulativo (Blanco & Otero, 2005). Estos recursos facilitan la comprensión y el recuerdo de los conceptos. Otra ventaja es que se fomenta el trabajo colaborativo (Gulfo de Puente & Amaya de Armas, 2016; Cañadas y otros, 2003) ya que los alumnos se ayudan y dialogan durante el proceso de construcción y montado de las figuras. Por último, aporta importantes valores, como la constancia, la tenacidad o la paciencia, ya que, una imperfección en un doblez puede hacer que el módulo no quede bien construido. De igual modo, se trabaja el compañerismo.

Estado del arte

En la construcción de este taller, nos hemos nutrido de diversas fuentes. Royo Prieto (2002) hace un repaso del origami a través de su historia, proporciona un resumen de los conceptos geométricos que se trabajan con el origami modular, lo que nos permite situarlo en un contexto de aprendizaje de geometría. Este mismo autor comenta acerca de tres aspectos de la papiroflexia en los que afloran las matemáticas: la papiroflexia modular, los axiomas de constructibilidad y el diseño de figuras. Además, Blanco y Otero (2005) exponen los beneficios de la utilización del origami como herramienta educativa, nos presentan los módulos sonobe y de Tomoko como piezas clave para la construcción de cubos, tetraedros, icosaedros y dodecaedros, y hacen uso de distintos colores.

La amplia experiencia en el origami modular del grupo Alquerque de Sevilla (Alquerque, 2017) ha sido para nosotros una referencia fundamental. De ellos hemos tomado los diagramas de los módulos y los vídeos explicativos con las instrucción para construir primero los módulos y a continuación los poliedros. A nivel internacional, las experiencias en Argentina disponen de todo tipo de información sobre origami desde talleres, diagramas, artículos, tutoriales hasta libros (Azcoaga, 2015).

ISBN 978-84-945722-3-4

Villarroel y Sgreccia (2011) identifican y caracterizan los materiales didácticos concretos para la enseñanza de la geometría en secundaria. Sus investigación se basan en las ideas de la Educación Matemática Realista (EMR) y distinguen hasta siete grupos de materiales para trabajar geometría de forma manipulativa, desde el tangram hasta el origami.

Por último, el trabajo de Arnal-Bailera (2016), con alumnos de secundaria, se centra en la geometría en el plano, aunque lleguen a construir poliedros; y, usa el software Geogebra para trabajar contenidos de geometría. Hemos podido comprobar que a los alumnos les gustan estos talleres porque les permiten una rápida comprensión de la materia, así como la formalización de conceptos abstractos.

Objetivos

-Objetivo General. Diseñar un taller de origami modular e implementarlo con un grupo de alumnos de Secundaria.

-Objetivos Específicos. 1) Planificar de secuencia de actividades y tareas de evaluación; 2) Elegir o elaborar los recursos y materiales necesarios para su implementación: papel, videos, test, fichas; 3) Promover habilidades de razonamiento y de percepción espacial (Alquerque, 2017); 4) Analizar las respuestas de los documentos utilizados en la evaluación de aprendizajes (test inicial, fichas durante el desarrollo y encuesta final); 5) Valorar el impacto del uso del origami modular en el aprendizaje de la geometría durante la educación secundaria.

Estructura

Este documento lo hemos organizado de la siguiente manera, en primer lugar, explicamos cual es el diseño metodológico y cómo se implementó el taller, los resultados, y, finalmente, las conclusiones y líneas de trabajos futuros. En el apartado de diseño metodológico se recoge cómo se han agrupado los alumnos, cuál ha sido el contenido de las sesiones, las actividades o tareas desarrolladas, y cómo se han evaluado los aprendizajes.

Diseño metodológico e implementación del taller

Participantes

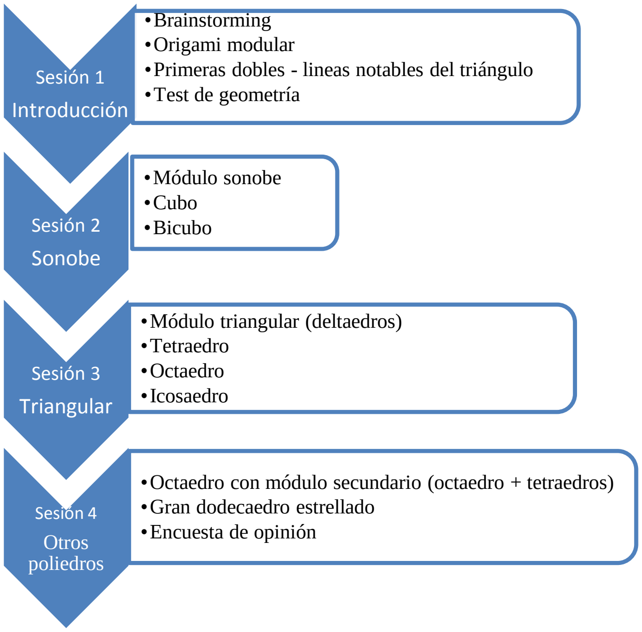
El taller con origami modular para la introducción a la geometría se ha llevado acabo con alumnos de 3º ESO (grupo A) del colegio IES Cardenal Cisneros de Madrid. Han participado 29 alumnos, algo inquietos durante las clases y que tienden a confiarlo todo al examen.

ISBN 978-84-945722-3-4

Secuencia de actividades y/o tareas durante las sesiones

El taller se estructuró en cuatro sesiones y constituyó el inicio del estudio de los temas geometría en 3º de la ESO (Real Decreto, 2014). A continuación mostramos un diagrama con las sesiones y los puntos tratados en cada una de ellas:

Diagrama 1. Secuencia de actividades realizadas en las sesiones.



La **primera sesión** fue de introducción sobre origami. Dialogamos sobre la historia de este material (origen, etc.), sobre su uso por alumnos de diferentes edades, y sobre aplicaciones de interés, como por ejemplo la construcción de *drones* livianos de peso. También, recordamos conceptos básicos de geometría y la conveniencia de utilizar recursos materiales para su comprensión. A continuación, los alumnos manipularon el papel y realizaron sus

ISBN 978-84-945722-3-4

primeras dobleces para hallar las líneas notables de un triángulo, interesándose sobre los aprendizajes posibles a través de este recurso. Por último, los alumnos realizaron un test cuyo objetivo era obtener un diagnóstico sobre los conocimientos previos de geometría. Las preguntas del test eran de diferente tipo (Corberan y otros, 1994): de selección, de verdadero/falso, de razonamiento, de representaciones gráficas (Fouz, 2006) y preguntas abiertas.

La estructura de trabajo durante las siguientes sesiones fue la misma. Los alumnos organizados en grupos de seis integrantes, trabajaron diversas tareas cuyo resultado final requería de la colaboración de todos. Cada uno construía un módulo (con papel) y mediante el acoplamiento de los módulos, entre todos construían un poliedro. La estructura didáctica del taller puede verse en el ANEXO 1.

Durante la **segunda y tercer sesión,** se desarrollaron las tareas centrales del taller. En la segunda, cada alumno realizó el *módulo sonobe* (Alquerque, 2010), y entre los miembros de cada equipo construyeron un cubo y un bicubo. Y, en la tercera, cada alumno construyó los *módulos triangulares* (izquierdo y derecho), que ensamblaron formando tetraedros, octaedros e icosaedros.

La **última sesión** se dedicó a que los alumnos conocieran y manipularan *otros poliedros* construidos con origami modular. El octaedro construido mediante el módulo sonobe facilitó la realización de actividades para desarrollar la capacidad de abstracción, como fueron reconocer las figuras de 2D y de 3D que lo conforman, obtener su volumen a partir de la descomposición en otros cuerpos geométricos. Igualmente sucedió con el dodecaedro estrellado, que permitió descubrir los pentágonos de cada vértice. Al final, rellenaron la *encuesta* de satisfacción y sugerencias sobre el taller para mejorarlo.

Fases de la evaluación del aprendizaje

La evaluación se realizó de manera secuencial:

-***Test inicial*** para obtener un diagnóstico sobre los conocimientos previos de geometría, y cuyas preguntas eran de diferente tipo (Corberan y otros, 1994), unas de selección, de verdadero/falso, de razonamiento, de representaciones gráficas y otras abiertas. Además, las respuestas nos han permitido analizar los conocimientos que los alumnos recuerdan. Las preguntas del test se tomaron del Test de Van Hiele (Fouz, 2006) y se introdujeron preguntas abiertas, etc. El test consta de 10 preguntas con nivel de dificultad creciente (ANEXO 2).

-Durante la fase de desarrollo, las tareas de evaluación consistieron en, por una parte, la propia *construcción de los módulos y poliedros*, y, por otra parte, contestar ***fichas*** para comprobar los conceptos de geometría que iban aprendiendo, tanto los de geometría plana como los de geometría en el espacio. Las preguntas de las fichas pueden encontrarse en ANEXO 3.

Resultados

Los resultados del análisis del test, las fichas y la encuesta final. En líneas generales, el alumno identifica el problema y emplea la mayoría de las veces la información que es significativa. Se ha logrado que los alumnos interactúan más entre ellos, y no sólo con el profesor, a la hora de resolver los problemas. En las Imágenes 3 y 4 se pueden apreciar dos tetraedros y cubos, con diferentes resultados. Detallamos los resultados, aprendizajes en matemáticas vs dificultades y errores, obtenidos por cada instrumento de evaluación:

Tabla 1: Resumen de los resultados del test inicial

Resultados recogidos del test inicial	
Aprendizajes	Errores o dificultades
➢ Identificar cuadrados, rectángulos ➢ Comprensión de conceptos de mediatriz, bisectriz, altura ➢ Rombo por la longitud de sus diagonales ➢ Capacidad de abstracción ➢ Identificar pirámide triangular ➢ Relaciones Teorema de Pitágoras	➢ Confundir rombos con trapecios ➢ Definir cuadriláteros con una sola propiedad ➢ Falta de comprensión del concepto de mediana de un segmento ➢ Falta de comprensión en procedimientos de obtención de puntos notables ➢ Significado de la Fórmula de Euler ➢ Visualizar la pirámide cuadrangular y los prismas

Las fichas nos muestran que la mayoría de los alumnos han adquirido los conceptos sobre geometría en el plano y gracias a la referencia de los módulos han conseguido una correcta comprensión de los movimientos en el plano así como la inducción. Sin embargo, tienen problemas con los cuerpos geométricos y sobre todo en tareas como dibujar o identificar patrones. Lo que nos hace pensar en la necesidad de trabajar este tipo de tareas. Este sería el resumen:

Tabla 2: Resumen de los resultados de la fichas

ISBN 978-84-945722-3-4

Resultados recogidos de las fichas	
Geometría en el plano	
Aprendizajes	Errores o dificultades
➢ Polígonos ➢ Tipos de ángulos ➢ Teorema de Pitágoras triángulo recto ➢ Simetría rotacional y orden ➢ Identificar pirámide triangular ➢ Capacidad de inducción (nº sonobes para cubo)	➢ Cálculo áreas de polígonos, uso de Teorema de Pitágoras ➢ Preguntas selección (ambas, ninguna) ➢ Dibujar mediatriz, bisectriz y mediana ➢ Dibujar todos los ejes de simetría del cuadrado
Geometría 3D , cuerpos geométricos	
Aprendizajes	Errores o dificultades
➢ Comprender los conceptos de ángulo diedro y perpendicularidad de caras ➢ Identificar caras secantes y caras paralelas ➢ Identificar aristas, vértices y caras ➢ Reconocer cuerpos geométricos en construcciones arquitectónicas, etc	➢ Definir pirámide ➢ Encontrar patrones en los poliedros regulares, relaciones numéricas en la Fórmula de Euler ➢ Encontrar regularidades en los deltaedros ➢ Dibujar cuerpos geométricos y simetrías especulares ➢ Capacidad de abstracción de las mínimas caras que concurren en los vértices

Algunos resultados destacables de la encuesta final (cf. ANEXO 3). Curiosamente, seis alumnos que se califican como malos/muy malas en matemáticas, han puntuado el taller con valores entre 3,8 y 4 sobre 5. Esto muestra que este taller ha servido para recuperar el interés por las matemáticas en estos alumnos.

Los docentes percibieron en los alumnos reacciones o comentarios como: caras de felicidad o sonriendo, alumnos trabajando en las tareas, etc. (Más ejemplos: ANEXO 3 o ANEXO 4). Además, otra muestra del interés de los alumnos fue que algunos visionaban, antes de las sesiones, los videos sobre cómo construir los módulos y sus correspondientes poliedros; así como fue sorprendente que fuera del horario de clase, construyeron un icosaedro, un dodecaedro, una bipirámide pentagonal y un policubo con forma de "L" de tetris.

Imagen 1. Cuerpos geométricos construidos por los alumnos

Icosaedro,	Dodecaedro	Policubo con forma de "L" tetris
		

ISBN 978-84-945722-3-4

Conclusiones

El origami se usa cada vez más en la enseñanza de las matemáticas especialmente en la educación primaria, no así en las etapas de educación secundaria. El diseño y la implementación de un taller de origami modular como herramienta de enseñanza de la geometría en 3º ESO ha resultado de interés.

Los resultados arrojan una gran acogida de los alumnos de la papiroflexia lo que nos hace pensar en la necesidad de que los profesores utilicen metodologías alternativas, para aumentar la significación y satisfacción del aprendizaje de las matemáticas. El adecuado comportamiento y la alegría de los alumnos en comparación con las clases rutinarias, muestra que es un método motivador para la enseñanza de la geometría. Además, permite una mejor comprensión de los conceptos geométricos abstractos, nos sirve como introducción a los temas de geometría o como instrumento para el desarrollo de esos temas, se puede combinar con software de geometría dinámica (por ejemplo: Geogebra) para consolidar conocimientos.

Se han cumplido las expectativas y podemos afirmar que esta innovación nos da la oportunidad de, además de trabajar las habilidades manipulativas, promover valores esenciales del trabajo como la colaboración, creatividad o trabajo en equipo.

A lo largo de las sesiones se mostraban ejemplos fenomenológicos de construcciones reales (Extremiana y otros, 2002) para aumentar la significatividad de las tareas del taller, por la relación de conceptos abstractos con entes físicos: pirámides, prismas (Torres Kio), cubos, simetría axial mostrando el cuerpo humano, etc.

Los alumnos han aprendido a afrontar los problemas y resolverlos por ellos mismos o con la ayuda de algún compañero, aumentando así la autoestima. Algunos alumnos que les da igual hacer mal su tarea han reaccionado positivamente porque el resultado de su trabajo afectaba al del grupo.

Referencias bibliográficas

Alquerque, Grupo (2010). Geometría Modular con Papiroflexia. En línea: http://www.grupoalquerque.es/ferias/2010/archivos/webquest_2/origami.html

Arnail-Bailera, A (2016). Investigando la construcción de polígonos regulares mediante doblado de papel. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 45*, 269-284.

Azcoaga, L. (2015). Origami Modular Argentina. En línea: http://origamimodular.com.ar

ISBN 978-84-945722-3-4

Blanco, C. y Otero, T (2005) *Geometría con papel (papiroflexia matemática). Sctm05*, 1-18. En línea: https://imarrero.webs.ull.es/sctm05/modulo3tf/1/cblanco.pdf

Cañadas, M., y otros (2003). Geometría con papel. Canarias: JAEM

Corberan, R., y otros (1994). Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento Van Hiele. CIDE.

Extremiana, J., y otros (2002). Poliedros. Logroño: Universidad de la Rioja

Fouz, F. (2006) Test geométrico aplicando el modelo Van Hiele. *SIGMA, Nº28(5), 33-58.*

Gulfo de Puente, J.D., y Amaya de Armas, T. (2008). El origami, una estrategia para la enseñanza de la geometría. Actas del Congreso RELME 22, Mexico D.F., 895-901.

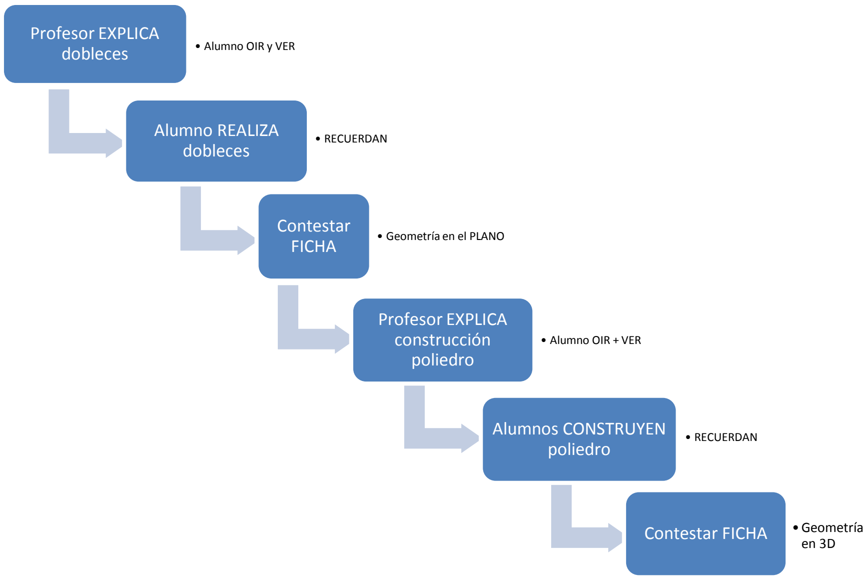
Real Decreto 1105/2014, 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

Royo Prieto, J. (2002) Matemáticas y Papiroflexia. *SIGMA, Nº21*, 175-192.

Villaroel, S. Y Sgreccia, N. (2011). Materiales didácticos concretos en Geometría en primer año de Secundaria. *Números, Nº78*, 73-94.

ANEXO 1. Estructura didáctica taller

ISBN 978-84-945722-3-4



Para cada módulo el profesor explicaba a los alumnos los pasos a seguir para obtener el módulo en cuestión mientras se iba repasando conceptos sobre la geometría en el plano. De esta manera los alumnos oían y veían para recordarlo. Posteriormente los alumnos hacían cada uno un módulo para comprenderlo. Durante esta fase se debían de ayudar unos a los otros, el profesor era un mero guía. A continuación debían de rellenar una ficha con preguntas sobre geometría en el plano (clasificación de polígonos, Pitágoras, áreas, lugares geométricos, simetrías, inducción), el módulo les serviría para tener una referencia gráfica.

Tras un tiempo, el profesor proseguía dando las pautas para acoplar los módulos de manera correcta y obtener el poliedro deseado. Algunos de los alumnos construían el poliedro mientras otros ayudaban o aconsejaban durante el proceso. La última fase correspondía a rellenar la ficha con preguntas sobre geometría en tres dimensiones (ángulos diedros/triedros, poliedros, fórmula de Euler, áreas y volúmenes, simetrías). El poliedro construido les serviría de guía para así poder visualizar mejor las preguntas. En la ficha los alumnos podían encontrar puntualmente pequeñas explicaciones de algún concepto matemático.

ISBN 978-84-945722-3-4

ANEXO 2. Test inicial

Se agregan sólo las preguntas del test, no las imágenes y las opciones de las respuestas por problema de espacio:

1. Si trazamos la diagonal de un **rectángulo** cualquiera… ¿qué afirmación NO ES CIERTA?
2. En las siguientes figuras, pon dentro de la figura (C: cuadrado, O: rombo, E: rectángulo)
3. Nombra en la derecha las rectas y puntos notables del triángulo que se te ocurran, ten en cuenta los números que hay dentro del recuadro.
4. ¿Es la diagonal siguiente un eje de simetría del rectángulo (**1)**? En caso negativo, usa la diagonal como eje de simetría y dibuja el simétrico del triángulo ABC (**2**) en el otro lado del eje.
5. Fíjate en el cubo (derecha abajo), supongamos que se corta el cubo en dos trozos siguiendo las líneas marcadas sobre el cubo. ¿Cuál de las figuras A, B, C, D, E muestran los dos pedazos que se obtienen?
6. ¿VERDADERO O FALSO?
7. Nombra los poliedros regulares que se pueden hacer con el módulo triangular teniendo en cuenta que este módulo aporta dos triángulos (o de Verrill). ¿Cuántos módulos se necesita para cada uno?
8. ¿Cumple el siguiente poliedro la fórmula de Euler? Cuenta sus caras, vértices y aristas. ¿Qué tipo de poliedros NO cumplen la fórmula de Euler?
9. Señala en la figura todos los polígonos y poliedros que identifiques, utiliza las letras para hacerlos referencia, por ejemplo CBGH: cuadrado.
10. ¿Cuál es el perímetro del triángulo “ABC”? Pista: tratar de utilizar Pitágoras.

ISBN 978-84-945722-3-4

ANEXO 3. Preguntas de las fichas

PREGUNTAS GEOMETRÍA EN EL PLANO
La nueva figura (módulo sonobe) está formado por un cuadrilátero porque tiene 4 lados, pero ¿qué tipo de cuadrilátero?
Si los catetos del triángulo que forma la pestaña miden 1 cm, ¿Cuánto vale la hipotenusa o diagonal?
En nuestro caso para el módulo sonobe primario, tenemos una simetría rotacional de orden (pon sobre la mesa con una de las puntas de la pestaña mirando para un lado, gira y observa).
Se ve sobre la solapa o pestaña un doblez. El doblez corresponde a: mediana, altura, ambas cosas, ninguna de las dos.
Imaginémonos ahora el cuadrado del centro del módulo sonobe. ¿Cuántas rectas se te ocurren que divida el cuadrad en dos partes iguales? Cada una de ellas forman un eje de simetría. Dibújalas y di cuantas tiene.
(Inducción) Teniendo en cuenta el número de caras que aporta cada módulo sonobe, ¿cuántos módulos de sonobe necesitamos para montar un cubo? ¿Y un bicubo? Razona la respuesta.

PREGUNTAS GEOMETRÍA 3D
¿Cuánto mide el ángulo diedro formado por dos caras del cubo?
Cuantas maneras diferentes te imaginas de cortar el cubo de tal manera que el cubo quede dividido en dos partes iguales? Estos serán los planos de simetría del cubo, dibújalos
Nombra 3 objetos o presencia de cuerpos en la vida real con forma de: cubo, pirámide, prisma
Completa la tabla contando las caras, vértices y aristas de los poliedros regulares. Existe una relación entre el número de caras, vértices y aristas común a todos los poliedros regulares. ¿Cuál es? ¿Es exclusiva de los poliedros regulares? Investiga.
Deduce patrones en los deltaedros. Completa la tabla y enumera las regularidades o patrones que veas.
Asigna a cada imagen (del mundo que nos rodea), el nombre del poliedro adecuado de la lista de abajo.

Estas son algunas de las preguntas y su puntuación media de la **encuesta** final.

PREGUNTA	**PUNTUACIÓN MEDIA**
¿Te ha parecido interesante el material?	4.24
¿Crees que la geometría tiene más aplicaciones?	4.04
Media todas las preguntas	3.7

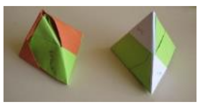
PREGUNTA ABIERTA	**RESPUESTA (más repetidas)**
¿Qué es lo que más te ha gustado del taller?	Construir y montar figuras
¿Qué es lo que menos te ha gustado del taller?	Rellenar las fichas
¿El taller te ha parecido interesante, por qué?	Ver la geometría de otra manera, físicamente Divertido y otra manera de estudiar mates Método innovador, más interesante que las clases normales
¿Has aprendido muchas cosas que no conocías? ¿Cuáles?	Cosas que antes no sabía Módulos y construir poliedros Recordar cosas de geometría
Danos tu opinión acerca del taller	Muy interesante, chulo

ISBN 978-84-945722-3-4

	Interesante para la percepción visual Se entiende mejor la geometría, más práctico Preguntas excesivas en las fichas Visualizar mejor la teoría

ISBN 978-84-945722-3-4

Imagen 1-2. Imágenes de poliedros y módulos construido por los alumnos.
Imagen 3-4 Tetraedros y cubos construidos por los alumnos, con distintos resultados.

 Imagen 1. Cubos y Tetraedros	 Imagen 2. Módulos triangulares y Tetraedros
 Imagen 3. Tetraedros con distinto resultado.	 Imagen 4. Cubos

ANEXO 4. Observaciones del profesor durante la actividad en el aula

- Niña excelente en música con tremendas habilidades manipulativas y capacidad espacial. Estrecha relación entre la música y las matemáticas manipulativas.
- Alumna con problemas para expresarse y se aburre en clase, pregunta y se la ve activa montando y rellenando las preguntas de las fichas.
- Alumno con gran habilidad para dibujar que encuentra en los polígonos, poliedros, simetrías una oportunidad para aprender las matemáticas mientras realiza una de sus pasiones, dibujar.
- Alumnos con altas capacidades espaciales y de abstracción pero que sin embargo tienen nula capacidad manipulativa y serios problemas de lateralidad (no saber si doblar para atrás o para adelante, que punta se lleva a que segmento, etc).
- Aumento de la autoestima gracias a que los alumnos afrontan los problemas por ellos mismos y si no pueden se apoyan unos a los otros.

ISBN 978-84-945722-3-4

- Importancia de aplicarse en el trabajo individual (construcción de módulos) para no afectar negativamente en las tareas grupales (acoplamiento y construcción de poliedros).

ISBN 978-84-945722-3-4

T-1.102

APP MOVILES EN CL@SE DE M@TES

Elisa Benítez Jiménez
elisa.benitez@colegiorafaelaybarra.com
Colegio Rafaela Ybarra. España

Núcleo temático: V. Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
Modalidad: T
Nivel educativo: Medio o Secundario (12 a 15 años) y Terciario o Bachillerato (16 a 18 años)
Palabras clave: App, TIC, Recursos, Formación

Resumen

Este taller tiene como objetivo motivar a los docentes presentando actividades atractivas usando una metodología participativa y activa mediante el uso del móvil como recurso necesario e imprescindible para nuestro quehacer matemático y el aprendizaje de los conceptos matemáticos por parte de nuestros alumnos dentro y fuera del aula.
Muchos profesores utilizan el móvil como mero instrumento de búsqueda de información, pero desde nuestra posición como docentes de Matemáticas podemos ir más allá, aprovechando que nuestros alumnos usan su móvil ó tablet a todas horas y en todas partes.
Es necesario investigar e incluir el móvil en el aula como herramienta para motivar y aumentar su rendimiento académico. Hay que tener en cuenta que las nuevas generaciones son digitales y se sienten muchos más cómodos con este tipo de aplicaciones que les pueden ayudar a repasar, reforzar, ampliar y profundizar aquellos conceptos dados en clase y aprender mucho más.
Por ello se explicaran a los asistentes aplicaciones relacionadas con las Matemáticas entre ellas Desmos y PhotoMath, cómo usarlas con el fin de preparar actividades para llevar al aula o simplemente enseñar App móviles a nuestros alumnos para que sean autónomos y se sientan protagonistas de su propio aprendizaje.

JUSTIFICACION DEL TALLER

Según datos del INE, en España el 40% de los alumnos con 11 años posee un teléfono móvil, y cuando cumplen 12 años es del 70%, porcentaje que se va incrementado a medida que aumenta la edad del estudiante. Es decir, **tenemos en nuestras aulas alumnos que poseen un dispositivo móvil con conexión a Internet.** ¡No debemos obviar esto!. Por ello debemos

ISBN 978-84-945722-3-4

adaptarnos y usar el móvil para aprender matemáticas, hacer que nuestros alumnos sean más autónomos y tengan iniciativa personal.

Existen muchas aplicaciones, herramientas y recursos digitales gratuitos y de difusión pública para el móvil, que pueden adaptarse a etapas y niveles educativos muy diferentes para poder aprender matemáticas y hacer actividades con los alumnos. Muchos docentes (Reverte, 2015) comprometidos con este tema han investigado y llegado a conclusiones de que este tipo de recursos permiten realizar manipulación simbólica de ejercicios matemáticos y presentan, no solo el resultado, sino en alguna de ellas los pasos seguidos para llegar a la solución, de manera que los alumnos pueden aprender a partir de los errores cometidos, esto reduce la dependencia del profesor permitiendo al alumno ser más autónomo.

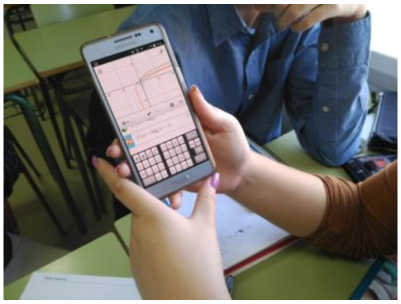


Figura 1: Taller App Móviles con alumnos de 1ºBachillerato

Después investigar sobre las App para móviles llevadas al aula he llegado a la conclusión de que hacer un Taller con DESMOS, PhotoMath o cualquier otra, mejorara la autoestima, rendimiento y motivación de los alumnos hacia las Matemáticas. Como decía Miguel de Guzmán *"Lo afectivo es lo efectivo. Enseñar consiste en conseguir que los estudiantes quieran aprender y de hecho aprendan"*.

ORGANIZACION DEL TALLER

El taller con una duración de dos horas se va a desarrollar en varias partes

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 2: Estructura del taller

En la primera parte se hará una visión general de las aplicaciones que existen, como es imposible ver todas se han elegido 4 de ellas, después se propondrán una serie de actividades usando alguna de las aplicaciones descriptas para hacer en grupos que se han llevado al aula con éxito (figuras 7 y 8) para abrir boca y motivar a los asistentes a usar estos recurso y generar nuevas ideas.

En la segunda parte del taller las personas que asistan tendrán un espacio colaborativo para intentar elaborar una actividad sencilla de aula y entre todos podamos compartirlas en una carpeta Drive, la que previamente tendrá información complementaria y fichas para poder usarlas en las clases cuando consideremos oportuno. Para finalizar entre todos intentaremos hacer una puesta en común de las dificultades y ventajas encontradas al manipular dichas aplicaciones.

NECESIDADES TÉCNICAS PARA EL DESARROLLO DEL TALLER

Para el correcto desarrollo de este taller, se necesitará una disposición de aula específica y los siguientes recursos que se exponen a continuación:

- ✓ Mesas y sillas móviles individuales (sin brazos), para facilitar que los asistentes trabajen de forma individual y colaborativa.
- ✓ Equipo de proyección con pizarra blanca sobre la que proyectar y poder hacer anotaciones mientras se desarrolle el taller, con conexión a Internet.
- ✓ Cable VGA para conectar portátil del responsable del taller al proyector

- ✓ Altavoces disponibles para reproducir sonido, así como el cable necesario para su conexión con un ordenador portátil.
- ✓ Wifi para los asistentes
- ✓ Es **obligatorio** que los asistentes posean un **teléfono móvil** con acceso a datos, por si la Wifi no funcionara correctamente (convendría avisar).
- ✓ Proporcionar a los asistentes un breve dossier en papel con cosas básicas. Todo el material también estará en formato digital.
- ✓ Recomendable que se hayan descargado las aplicaciones (DESMOS y PhotoMath y lleven portátil o tablet (si lo tienen))

PROFESORADO AL QUE VA DESTINADO

El taller está recomendado para profesores de ESO y Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales de Bachillerato (20-30 personas máximo) que tengan interés por explorar la utilidad del móvil tanto a nivel personal como profesional para enseñar matemáticas, usar estas herramientas en su día a día o en momentos puntuales y enriquecer su labor como docentes. Podrían asistir profesores de otros niveles educativos, teniendo en cuenta que las actividades que se van a desarrollar son de los niveles recomendados. No es necesario conocimientos previos es un taller de iniciación a dichas aplicaciones.

DESCRIPCIÓN APP (gratis y de uso público)

Todas ellas proporcionan a los estudiantes herramientas que necesitan para entender, practicar y resolver sus problemas de matemáticas.

1. **PhotoMath** iOS|Android calculadora con cámara inteligente que al apuntar a una operación matemática, muestra el resultado y puede verse la solución paso a paso, pulsando el botón 'pasos'. Un inconveniente es que sólo reconoce problemas matemáticos simples (aritmética básica, fracciones, números decimales, ecuaciones lineales y algunas funciones). No reconoce derivadas, integrales ni límites. No es compatible para tablet (versión parecida que se llama AutoMath). Admite texto escrito a mano, seguramente en próximas actualizaciones se podrán realizar más operaciones.

ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 3: Pasos resumen FhotoMath (https://photomath.net/es/)

2. **Desmos** iOS|Android sin lugar a dudas una potente calculadora gráfica, fácil de uso para alumnos de ESO y bachillerato. Permite hacer varios gráficos a la vez, traslaciones verticales y horizontales (desplazamientos de una función) en el sistema de coordenadas (x, y), de forma fácil y rápida, crear tablas, animar gráficos con controles deslizantes que hacen que sea muy sencillo ajustar valores de forma interactiva o animar cualquier parámetro para visualizar su efecto sobre la gráfica· Las representaciones creadas se pueden guardar y compartir, disponiendo de recursos ya elaborados por otros usuarios. No es necesario tener acceso a internet y tiene una versión para PC (https://www.desmos.com/calculator), además se puede usar en todo tipo de móviles y tabletas. Se pueden encontrar muchos vídeos en Internet de como se usa y tutoriales.

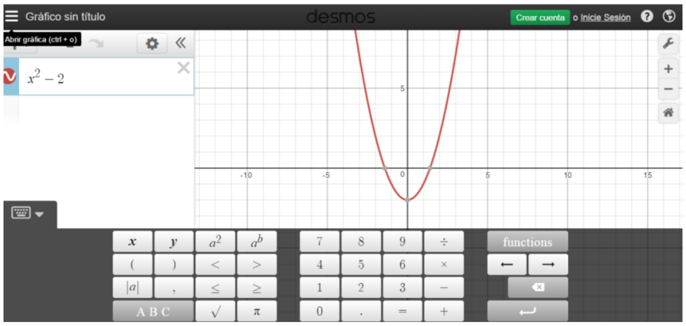


Figura 4: Pantalla Calculadora gráfica DESMOS (www.desmos.com)

ISBN 978-84-945722-3-4

3. **Mathpix** iOS–Android. **Alternativa a Photomath** interesante y más potente, permite exportar en PDF, archivos de LaTeX. Resolver fracciones, ecuaciones, logaritmos, derivadas, etc. soporte de gráficos en 2D y 3D. Comprender el texto escrito a mano**.** Además de dar respuesta paso a paso tras apuntarle a la ecuación con la cámara, en los casos posibles, presentará una gráfica interactiva en la que se pueden cambiar los parámetros que intervienen.

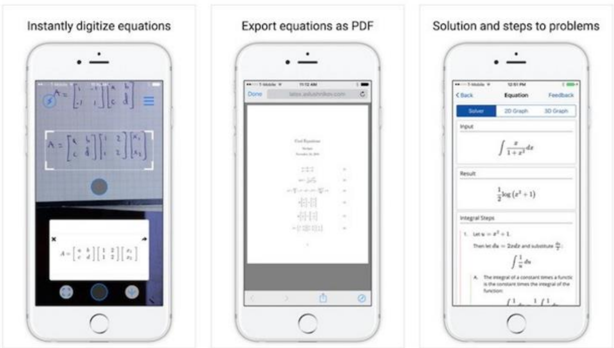


Figura 5: Pasos resumen Mathpix (http://mathpix.com/)

4. Mathway iOS|Android Muchos usuarios y problemas resueltos. El objetivo a largo plazo es hacer accesible a todos los estudiantes la asistencia matemática bajo demanda. Permite uso libre o registrarse permitiendo almacenar las distintas operaciones realizadas y tenerlas disponibles en todos los dispositivos con acceso a Internet. Se trata de una aplicación de pago si se desea disponer de todas las funcionalidades de la herramienta. Desde un aspecto pedagógico y de contenidos, este recurso ofrece más contenidos que las aplicaciones anteriores, incluyendo matemáticas básicas, pre-álgebra, álgebra, geometría, trigonometría, aritmética, cálculo, funciones, estadística, álgebra lineal, geometría e incluso conceptos de química. Permite realizar cualquier gráfico, guardarlo, imprimirlo, enviarlo a través de un link o incluso compartirlo por email o Redes Sociales. Ofrece generación de hojas de ejercicios, donde seleccionando el contenido a trabajar (ecuaciones, ecuaciones con denominadores,…) e indicando la cantidad de ejercicios genera una hoja con el número de

ISBN 978-84-945722-3-4

ejercicios solicitados. Tiene un glosario de términos donde poder buscar. Desde el PC se puede usar directamente o instalar en cualquier dispositivo y hacer foto de los problemas.

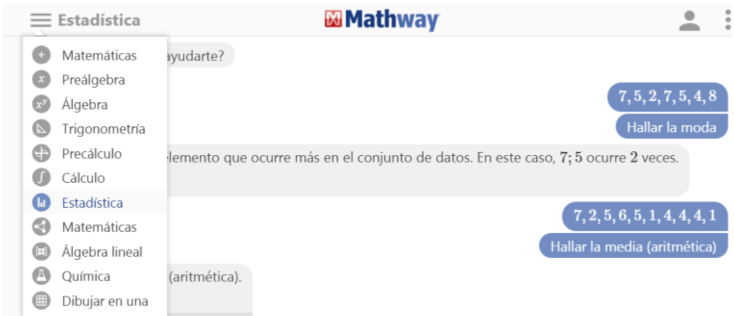


Figura 6: Ejemplo moda y media https://www.mathway.com/es/Statistics

EJEMPLO ACTIVIDAD GUIA DEL PROFESOR (FhotoMath y DESMOS)

Nivel educativo 3º y 4º ESO en varias sesiones que se detallan en el cuadro.

Figura 7: Taller App Móviles con alumnos de 3º ESO

SESION	OBJETIVOS	ACTIVIDADES Y TAREAS	DIFICULTADES Y CONCLUSIONES

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

1º	1. Presentar App que se van a utilizar en clase. 2. Motivar a los alumnos del buen uso de las App.	1. Ver entrada Blog https://matesnoaburridas.wordpress.com/2016/02/19/app-mtes-para-moviles_iii/ 2. Pedir a los alumnos que se descarguen FhotoMath y DESMOS en casa con WIFI en el móvil.	1. Comentan que no tienen suficiente espacio en el móvil 2. Preguntan si pueden usar la Wifi del colegio para no gastar datos
2º	1. Enseñar a usar la aplicación mediante ejercicios del libro y vídeos del Blog. 2. Realizar ejercicios cercanos a ellos.	1. Ver entrada Blog videos de como se usa. 2. Enviar manual por email 3. Contestar las preguntas: ¿Cual os ha gustado más? ¿Para qué se usa cada una?	1. No tienen dificultades. Le ha gustado más PhotoMath 2. Les parece muy interesante para reforzar y corregir los ejercicios (poder hacer mas en casa).
3º	1. Encontrar errores en las ecuaciones y sistemas 2.Correguir control ecuaciones y sistemas (grafica y analíticamente)	1.Hacer ejercicios de forma individual en el cuaderno 2.Comprobar resultados, buscar posibles fallos, solucionarlos entre todos los componentes del grupo. 3. Poner resultados en común en la fotocopia	1. Ninguna dificultad en la resolución. 2. Preguntan dudas encuentran la solución usando las aplicaciones

NOMBRES DEL GRUPO:

RESOLUCION ECUACIONES Y SISTEMAS (FhotoMath)

EJERCICIO	SOLUCION	CALSIFICACIÓN
a) $\frac{2}{5}x^2+2x+\frac{5}{2}=0$		
$2x\left(1+\frac{1}{2}x\right)=x\left(\frac{1}{2}x+1\right)$		
$2(2x^2-5)=3(2-3x^2)$		
$3x^2-27=0$		
ANALITICAMENTE $\begin{cases}\frac{x+1}{3}-\frac{y-1}{2}=1\\ 7x-4(x+y)=4\end{cases}$		
ANALITICAMENTE $\begin{cases}x^2-y^2=16\\ 3x-5y=0\end{cases}$		

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 8: Guión alumnos actividad

RERERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Asenjo, S.(2017, Abril 13). *3 aplicaciones para resolver problemas de matemáticas con la cámara de tu móvil*. http://wwwhatsnew.com/2017/04/13/3-aplicaciones-para-resolver-problemas-de-matematicas-con-la-camara-de-tu-movil/ Consultado el 17/4/2017
- Asenjo, S.(2015, Ene 27). *PhotoMath, la app para resolver operaciones matemáticas con la cámara de nuestro smartphone ya está disponible en Android*. http://wwwhatsnew.com/2015/02/27/photomath-la-app-para-resolver-operaciones-matematicas-con-la-camara-de-nuestro-smartphone-ya-esta-disponible-en-android/ Consultado el 6/11/2015
- Benítez, E. (2016, Feb 19). *App M@tes para Móviles_III* https://matesnoaburridas.wordpress.com/2016/02/19/app-mtes-para-moviles_iii/ Consultado el 6/02/2016
- Desmos. (Sin fecha). Guía del usuario (B. Parra, trad.) https://desmos.s3.amazonaws.com/Desmos_User_Guide_ES-ES.pdf. Consultado el 4/02/2016
- Desmos (Sin fecha). Staff picks: Maths Examples. https://www.desmos.com/math.. Consultado el 10/04/17
- Educación 3.0 (2017). *Claves para que los estudiantes usen el móvil en el aula*. http://www.educaciontrespuntocero.com/recursos/claves-los-estudiantes-usen-movil-aula/43324.html/ Consultado el 14/2/2017
- Fernández, J. (2015, Mar 18). *18 Aplicaciones Android para Aprender Matemáticas*. http://soymatematicas.com/aplicaciones-android/ Consultado el 7/1/2016
- Gracia, A. (2016, Ene 13*). Las mejores apps para ayudarte con las matemáticas* http://wwwhatsnew.com/2016/01/13/las-mejores-apps-para-ayudarte-con-las-matematicas/ Consultado el 14/3/2016
- Tebar, F. (2016*). Metodologías didácticas en clases de Matemáticas. SUMA*, 82, 59-66
- Reverte, J.M (2015).*¿Usamos el móvil en clase de matemáticas?. 17 Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Actas JAEM 2015*. Federación Española

de Sociedades de Profesores de Matemáticas, FESPM. Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia, SEMRM.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-1.107

REALIDAD AUMENTADA, GEOLOCALIZACIÓN Y MATEMÁTICAS

María José Rey Fedriani – Berta Iborra Gracia
mrey@colegiobase.com – bertaiborra90@gmail.com
Colegio Base – España

Núcleo temático: VI. Matemáticas y su integración con otras áreas.
Modalidad: Taller (T)
Nivel educativo: Cuarto curso de Secundaria
Palabras clave: Problemas, geolocalización, realidad aumentada, proyecto colaborativo

Resumen

Los alumnos del cuarto curso de Secundaria realizan para la asignatura de matemáticas un proyecto de realidad aumentada y geolocalización con ESPIRA, que consiste en crear rutas por el Parque de Atracciones de Madrid, formadas por puntos de interés en los que ellos mismos inventan y resuelven problemas de matemáticas relacionados con distintas unidades temáticas del currículo, distribuyéndolas en las diferentes zonas del parque. Los alumnos trabajan en grupo, desarrollando no solo las competencias relacionadas con matemáticas o geografía sino también el trabajo colaborativo y la competencia digital utilizando ordenadores y móviles.
El propósito de esta actividad y del taller que se presenta, es acercar el temario de matemáticas a los alumnos de una manera diferente y entretenida para ellos, hacer que repasen todos los contenidos del curso de una manera distinta y favorecer el ingenio y la reflexión de los alumnos.

El currículo de las matemáticas en el último curso de Educación Secundaria permite a los docentes tratar una gran variedad de temas y poder relacionar esta materia con la realidad facilitando así el aprendizaje de los estudiantes. Esta relación con la vida cotidiana logra que

ISBN 978-84-945722-3-4

los alumnos muestren mayor interés y que descubran que lo que estudian tiene utilidad en el día a día.

Por tanto, la finalidad de la actividad que se propone a continuación y que se presenta en el taller es relacionar los contenidos de matemáticas del curso con la realidad de los estudiantes, que ellos sean capaces de ver los conceptos trabajados en el aula en diferentes aspectos de la vida aprovechando también el uso de las nuevas tecnologías, en este caso, el ordenador y los teléfonos móviles.

Actividad

Aprovechando que los alumnos del curso realizan una salida del centro al Parque de Atracciones de Madrid con los profesores del ámbito científico, en la asignatura de matemáticas se les propone con antelación crear dos problemas relacionados con algunas de las zonas del parque elegidas por ellos, con el fin de que encuentren la relación entre las matemáticas y los elementos presentes en un sitio de ocio como el parque de atracciones. Se pretende favorecer el interés y el ingenio de los alumnos.

Las zonas han quedado distribuidas de la siguiente manera:

1- Montañas rusas $\longrightarrow$ Parábolas y funciones.
2- Barco y sillas $\longrightarrow$ Grados y radianes.
3- Recreativos y Dianas $\longrightarrow$ Probabilidad y Estadística.
4- Taquillas $\longrightarrow$ Porcentajes, moda.
5- Lanzadera $\longrightarrow$ Trigonometría (Problema asociado a física para medir la altura de la lanzadera usando un teodolito).

ISBN 978-84-945722-3-4

Este trabajo de creación de problemas se realizará por grupos favoreciendo también el trabajo colaborativo.

Cuando los alumnos hayan creado los problemas y estos hayan sido revisados por los profesores, cada grupo procederá a introducirlos en la página web de EspiRA (http://geo.aumentaty.com/), para que los demás compañeros puedan resolverlos durante la visita al parque de atracciones.

Aplicación EspiRA

En el taller que se plantea en este congreso utilizamos la app EspiRA, una aplicación de geolocalización y realidad aumentada generada a partir de un proyecto del Grupo de Trabajo Aumenta.me del Observatorio de Innovación Tecnológica y Educativa (ODITE) de la Asociación Espiral, Educación y Tecnología con el apoyo tecnológico de la empresa Aumentaty.

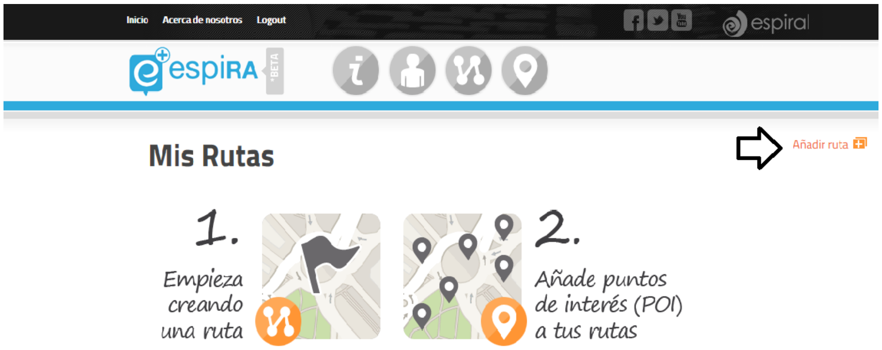
La realidad aumentada geolocalizada permite, utilizando las coordenadas físicas y la brújula de los dispositivos móviles, mostrar sobreimpresionados sobre el mapa de situación los elementos virtuales introducidos desde la web y ubicarlos correctamente en su posición real.

La aplicación EspiRA proporciona, de forma gratuita, una app descargable desde los portales habituales para poder consultar y utilizar la información asociada a las rutas o a los puntos de interés en cualquier teléfono móvil.

Funcionamiento de la aplicación/web EspiRA

Primero se crea una ruta a través de la página web accediendo a través del botón para crear y administrar tus rutas.

ISBN 978-84-945722-3-4



Una vez que seleccionamos “añadir ruta”, se abrirá una página web donde se deben rellenar unos datos para poder crearla.

En el apartado “Imagen destacada”, se tiene que añadir una imagen para la ruta, en este caso, se ha escogido el logo del Colegio Base y el del Parque de Atracciones, ya que los alumnos que realizan la actividad pertenecen a este colegio.

A continuación, en “Info”, se aportan datos generales de la ruta. El título que se pide va a ser el nombre con el que los alumnos o cualquier persona puede encontrar la ruta a través de la aplicación, en nuestro caso se ha llamado Matemáticas en el Parque de Atracciones.

La descripción de la ruta, consiste en hacer un resumen del evento, en este caso, la realización de problemas asociados al currículo de 4º de ESO de matemáticas.

En el ámbito geográfico se puede elegir: local, nacional y provincial.

ISBN 978-84-945722-3-4

Es interesante introducir en las palabras clave de la ruta algunos conceptos que ayuden a identificarla fácilmente. En nuestro caso: matemáticas y Colegio Base.

Por último, en el tipo de ruta, las opciones son: beber, comprar, disfrutar, dormir y educar. Un modo más de diferenciar el objetivo de la ruta. Para nuestro proyecto elegimos obviamente: educar.

La opción de yinkana que se muestra en la página web sirve para que los puntos de interés (POI), los lugares donde se encuentra la información o los problemas en nuestro caso, se muestren solo al localizarnos físicamente en el lugar elegido, salvo el primer POI que puede verse desde el principio.

Una vez creada la ruta, los alumnos deben añadir sus POI  con los problemas que han creado en las diferentes zonas del parque de atracciones. En nuestro proyecto creamos un único usuario para realizar todo el trabajo de introducción de información por parte de los alumnos.

En el apartado “Marcador” se debe introducir la localización exacta. Esta se puede obtener a través del Google Maps ya que la aplicación EspiRA funciona con estos mapas.

Existen tres opciones:

→ Si se trabaja sobre una calle en concreto se puede poner directamente la dirección en la página que se ha mostrado anteriormente.

→ Si se trabaja sobre un lugar concreto se pueden obtener las coordenadas directamente desde el Google Maps.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

→ También se puede buscar directamente desde el mapa de Google Maps que aparece en la página de creación de los POI.

En el apartado “Info” los alumnos completan los campos con el título del problema y la descripción, que aprovechan para incluir su enunciado. También deben indicar un número de orden en el campo de posición en la ruta para poder utilizar la opción de yinkana posteriormente.

Los apartados “Imagen Principal”, “Imágenes”, “Vídeos”, “Ficheros” y “Dirección URL” que aparecen en la segunda captura de imagen pueden servir para añadir más información a ese punto de interés. En nuestra actividad pedimos a los alumnos que insertaran una imagen de la atracción a la que se refiere su problema.

Una vez descargada la aplicación en los teléfonos móviles, los alumnos pueden buscar la ruta para realizar la actividad en el parque de atracciones.

Al acceder a la aplicación aparece la “imagen 1” donde los alumnos deben introducir el título de la ruta, y a continuación, como vemos en la “imagen 2” se muestra el enlace a la ruta que se ha creado y con la que van a realizar la actividad.

Imagen 1

Imagen 2

ISBN 978-84-945722-3-4

Si se ha seleccionado el método yinkana, sólo aparece, como se muestra a continuación, el primer punto de interés, ya que los siguientes solo son accesibles al llegar al lugar real.

Si no se ha seleccionado el método yinkana, al acceder a la ruta aparece un listado con todos los POI. En nuestro caso, con todos los problemas creados por los alumnos.

ISBN 978-84-945722-3-4

Usando este modo se puede elegir ver los puntos de interés situados en el mapa. Al marcar sobre cada uno de ellos se despliega el problema asociado a ese POI.

La actividad termina con los alumnos disfrutando de la experiencia en el Parque de Atracciones de Madrid mientras resuelven los problemas que han creado por grupos.
Nuestra valoración sobre este proyecto ha sido muy positiva. La implicación de los alumnos cuando les plantemos realizar una ruta usando sus propios móviles ha facilitado el repaso que pretendíamos hacer de los temas del currículo de matemáticas del curso. El trabajo colaborativo, la utilización de las nuevas tecnologías y el aprendizaje a través del juego también añaden valor a la elaboración de un proyecto como este.

Agradecimientos

Colegio Base

Ángel Pérez (Profesor de física de Colegio Base)

Referencias bibliográficas

http://odite.ciberespiral.org/comunidad/ODITE/recurso/nueva-app-de-espira-la-realidad-aumentada/3de8ead5-a83d-4f74-ab09-d52d2393c040

http://blogs.ciberespiral.org/espira/

http://geo.aumentaty.com/

https://www.bocm.es/boletin/CM_Orden_BOCM/2015/05/20/BOCM-20150520-1.PDF (Página 104)

ISBN 978-84-945722-3-4

T-1.113

INTRODUCIENDO LAS FUNCIONES EN PRIMARIA

Antonio Moreno, Eder Pinto, Marta Molina
amverdejo@ugr.es, epinto@correo.ugr.es, martamg@ugr.es
Universidad de Granada, España

Núcleo temático: Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en las diferentes modalidades y niveles educativos.
Modalidad: Taller (T)
Nivel Educativo: Educación Primaria
Palabras claves: Pensamiento Funcional, Diseño de tareas, funciones.

Resumen

Existen varias aproximaciones a la definición de pensamiento funcional (e.g., Blanton y Kaput, 2011; Cañadas y Molina, 2016; Cañadas, Brizuela y Blanton, 2016). Estas definiciones, que adquieren sentido en los estudiantes de edades tempranas, son empleadas en este taller para analizar las respuestas de los estudiantes y caracterizar tareas que promuevan este tipo de pensamiento.

El objetivo de este taller es suministrar ideas y estrategias docentes para que el maestro seleccione y analice las respuestas de sus estudiantes y evalué el pensamiento funcional que evidencian. Este trabajo será utilizado para informar el diseño de tareas que favorezcan el desarrollo de este tipo de pensamiento en los estudiantes de Primaria.

El taller se organiza en tres momentos: (a) discusión grupal, la cual busca que los docentes reflexionen sobre sus ideas iniciales alusivas al pensamiento funcional y el uso de las funciones en Educación Primaria; (b) síntesis teórica, en la cual presentamos una síntesis de los principales aportes provenientes de la investigación en edades tempranas sobre pensamiento funcional; (c) analizar en pequeños grupos, respuestas de estudiantes a tareas que involucran pensamiento funcional.

Introducción

Diferentes autores destacan la importancia de incluir y promover pensamiento algebraico en el currículo escolar de primaria (Kaput, 2000; Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011). El pensamiento funcional es un tipo de pensamiento algebraico en el cual la función es el contenido matemático fundamental (Blanton y Kaput, 2011). Este tipo de pensamiento está centrado en las relaciones entre cantidades que covarían de forma conjunta, el modo de expresar esas relaciones en diferentes sistemas de representación (verbal, pictórico, tabular, gráfico y simbólico) y la generalización a partir de las relaciones entre las cantidades involucradas (Cañadas, Brizuela, Blanton, 2016; Cañadas y Molina, 2016). Se considera

ISBN 978-84-945722-3-4

propicio para introducir el álgebra. El pensamiento funcional contribuye a sentar una base sólida para futuros aprendizajes del concepto de función, ayudando a solventar las dificultades que presentan los alumnos cuando se enfrentan por primera vez a este concepto en la educación secundaria (Ellis, 2011).

Confrey y Smith (1991) proponen dos relaciones entre variables para construir las funciones con los estudiantes: correspondencia y covariación. La relación de correspondencia es aquella regla que se establece entre pares correspondientes de cantidades de ambas variables. Describe cómo se obtienen valores de la variable dependiente a partir de valores de la variable independiente. Por ejemplo: en el caso de la función $f(x)=x+5$ la relación de correspondencia es sumar cinco a la cantidad de la variable independiente para obtener el valor asociado de la variable dependiente. La relación de covariación refiere al modo en que los cambios en una de las variables producen cambios en la otra variable. Por ejemplo, en el caso de la función $f(x)=2x$, implica reconocer que si sumas una cantidad a la variable independiente se le suma el doble a la variable dependiente.

Una de las formas por las cuales los investigadores estudian el pensamiento funcional de los estudiantes es mediante el uso de tareas. Éstas constituyen oportunidades para que los estudiantes puedan establecer relaciones entre cantidades que covarían, representar, justificar o generalizar esa relación (Soares, Blanton y Kaput, 2006). Este tipo de tareas se caracterizan por: (a) incluir la notación algebraica gradualmente, (b) presentar una relación entrelazada entre diferentes contenidos matemáticos, y (c) emplear problemas contextualizados, pues son considerados una herramienta importante para indagar en este tipo de pensamiento al favorecer que los estudiantes comprendan la relación entre cantidades que covarían a partir de un contexto determinado (Smith, 2008).

Existen diferentes aproximaciones teóricas a la noción de pensamiento funcional (e.g., Blanton y Kaput, 2011; Cañadas, Brizuela y Blanton, 2016; Cañadas y Molina, 2016), que son utilizadas para poner en evidencia la presencia de pensamiento funcional en las producciones de estudiantes de edades tempranas o describir sus diferentes facetas. De las investigaciones, deducimos la dificultad de discriminar aspectos muy específicos del pensamiento funcional en las respuestas de los estudiantes.

Los documentos curriculares de diferentes países incluyen el pensamiento funcional en Educación Primaria (e.g., Merino, Cañadas y Molina, 2013; Cai, Lew, Morris, Moyer, Ng y

ISBN 978-84-945722-3-4

Schmittau, 2005). En particular, la actual ley educativa menciona este tipo de pensamiento al señalar como objetivo “Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones (Anexo I, BOE 1 marzo 2014, núm. 52, sec. I, p. 19388). Este hecho revela la importancia de trabajar el pensamiento funcional con profesores de este nivel educativo.

El objetivo de este taller es suministrar ideas y estrategias docentes para que el maestro seleccione y analice las respuestas de sus estudiantes y evalué el pensamiento funcional que evidencian. Este trabajo será utilizado para informar el diseño de tareas que favorezcan el desarrollo de este tipo de pensamiento en los estudiantes de Primaria.

Metodología del taller

El taller se inicia con una puesta en común inicial para reflexionar en grupo acerca de las concepciones de los asistentes referentes al pensamiento funcional y el uso de las funciones en Educación Primaria. Posteriormente sintetizamos los principales aportes de las investigaciones sobre pensamiento funcional y mostramos los elementos esenciales que caracterizan las definiciones de pensamiento funcional que encontramos en la literatura.

Una vez expuestas las definiciones y elementos característicos del pensamiento funcional, nos centramos en los focos que pueden resultar operativos para analizar respuestas de estudiantes a tareas que ponen en juego este tipo de pensamiento: (a) las relaciones entre variables, las cuales pueden ser expresadas para casos particulares (cercanos y lejanos) o de manera general (generalización), (b) los sistemas de representación, por los cuales expresan relaciones funcionales, y (c) las variables y elementos de la función. Estos focos se centran en los elementos del pensamiento funcional definidos por Cañadas y Molina (2016). En la figura 1 presentamos los focos del trabajo, los cuales permitirán analizar las respuestas que entreguen estudiantes a problemas en el contexto funcional del álgebra escolar.

ISBN 978-84-945722-3-4

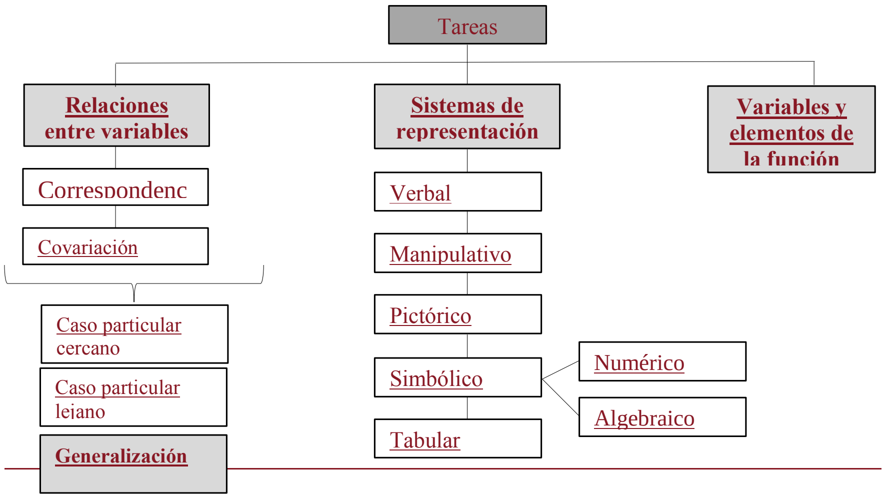


Figura 1. *Focos de atención para el análisis de respuestas*

Tal como lo presentamos en la figura 1, cada uno de estos focos (relación entre variables, generalización, sistema de representación y variables y elementos de la función) permiten describir aspectos del pensamiento funcional que pueden ser manifestados por estudiantes de Educación Primaria.

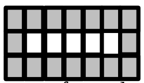
En este taller analizaremos ejemplos de respuestas de estudiantes, procedentes de nuestras propias investigaciones dentro del proyecto "Pensamiento funcional en Educación Primaria: relación funcional, representaciones y generalización" del Plan Nacional I+D con referencia EDU2016-75771-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España. Así mismo discutiremos sobre las posibilidades de las tareas para hacer explícitas las características del pensamiento funcional.

A modo de ejemplo presentamos aquí algunas de las respuestas dadas por los estudiantes en dos de las tareas.

El problema de las baldosas: relaciones entre variables, generalización y sistemas de representación

Presentamos este problema a dos grupos diferentes de estudiantes: un grupo de tercero y otro de quinto de Educación Primaria, España. En la figura 2 presentamos un extracto de la tarea trabajada con los estudiantes la cual involucra la función lineal f(x)=2x+6. Se incluyen preguntas para casos particulares cercanos (C1, C2 y C3), caso particular lejano (C4) y caso general (C5).

Un colegio quiere reformar el suelo de todos sus pasillos porque está ya muy estropeado. El equipo directivo decide enlosar los pasillos con baldosas blancas y con baldosas grises. Todas las baldosas son cuadradas y tienen el mismo tamaño. Las baldosas se van a colocar en cada pasillo de la manera que ves en la siguiente imagen.



El colegio contrata a una empresa para que reforme los pasillos de las tres plantas del colegio. Te pedimos que ayudes a los albañiles a contestar algunas preguntas que necesitan responder para hacer este trabajo.

C1. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 5 baldosas blancas?

C2. Unos pasillos son más largos que otros. Por eso, los albañiles necesitan diferente número de baldosas para cada pasillo. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 8 baldosas blancas?

C3. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 10 baldosas blancas?

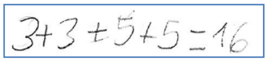
C4. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 100 baldosas blancas?

C5. Los albañiles de una empresa siempre colocan primero las baldosas blancas y después las baldosas grises. ¿Cómo puedes saber cuántas baldosas grises si ya han colocado las baldosas blancas?

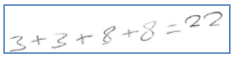
Figura 2. *El problema de las baldosas*

Dento de los principales resultados, en la mayoría de las respuestas de los estudiantes de ambos cursos, identificamos las relaciones de correspondencia y covariación, predominando la primera. En la figura 3 presentamos las respuestas de Nicolás, un estudiante de tercero, a las primeras cuatro cuestiones.

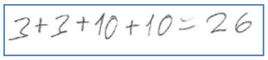
C1



C2



C3



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

C4

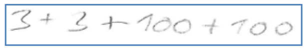


Figura 3. *Respuestas de Nicolás a C1, C2, C3 y C4*

En las respuestas de Nicolás, que consideramos un ejemplo representativo de la predominancia de la relación funcional de correspondencia, observamos cómo el estudiante logra identificar una regla entre los pares correspondientes de cantidades de ambas variables. Por ejemplo, en la segunda cuestión, el estudiante suma la cantidad de baldosas blancas laterales (3+3) y las cantidad de baldosas superiores (8+8), lo que le permite determinar el valor de la variable dependiente (22) a partir de la variable independiente (8). En esta respuesta observamos que el estudiante expresa la relación funcional mediante el sistema de representación simbólico-numérico, lo cual es predominante en las respuestas de los estudiantes de quinto de primaria.

Es en las respuestas de los estudiantes de quinto de primaria, a diferencia de tercero, donde emerge de manera natural el simbolismo algebraico para expresar la relación entre variables. En la figura 4 presentamos la respuesta de María, estudiante de quinto, a la primera cuestión.

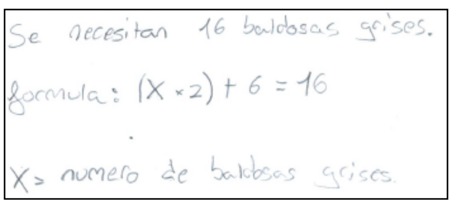


Figura 4. *Respuestas de María a C1*

En esta respuesta es posible observar como María logra encontrar la relación general entre las variables. Este es un ejemplo de generalización.

El problema del trato de la abuela: Variables y elementos de la función identificados.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Juan tiene ahorrado algo de dinero (tiene sólo euros, no céntimos). Su abuela, como recompensa por un trabajo que le ha hecho, le ofrece dos tratos:

Trato 1. “Te doblo el dinero que tienes”.
Trato 2. “Te doy el triple de tu dinero y tu me das 7 euros”.

Juan quiere elegir el mejor trato.
¿Qué debería hacer? ¿Podrías ayudarle a elegir el mejor trato?
¿Hay algún trato que sea siempre el mejor? ¿Por qué?
Resume con tus compañeros de equipo vuestras conclusiones en la cartulina.

Figura 5. *El trato de la abuela*

“El problema del trato de la abuela” pretende que los estudiantes comparen dos funciones, $f(x) = 2x$ y $f(x) = 3x-7$. Para ello, los alumnos identifican las variables implicadas y otros elementos de la función (Moreno, Cañadas, Jaldo, Bautista, 2016).
Así por ejemplo, varios de ellos consideraron que el dominio de la variable independiente es el conjunto de los números enteros positivos. Otros incluso, tratan de establecer los dominios para nuestras dos funciones de forma que, aunque sean distintos para cada una de ellas, se cumpla la condición de que, en ambos casos, las imágenes de las mismas sean siempre números enteros positivos. La figura 6 ejemplifica esta respuesta.

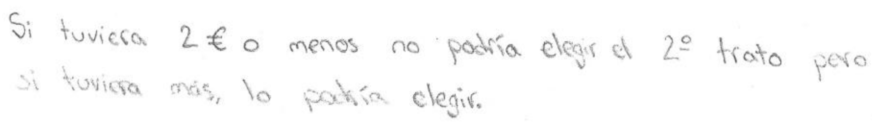


Figura 6. *Respuesta de Juan*

Algunos estudiantes, al resolver la tarea, identifican correctamente el punto de corte de las funciones y su significado y construyen a partir de este conocimiento una respuesta coherente sobre las condiciones en las que es mejor uno u otro trato. Es decir, concluyen correctamente cuáles son las condiciones que hay que tener en cuenta para hacer una correcta elección de trato. En la figura 7 se muestra un ejemplo de respuesta del alumno E1.

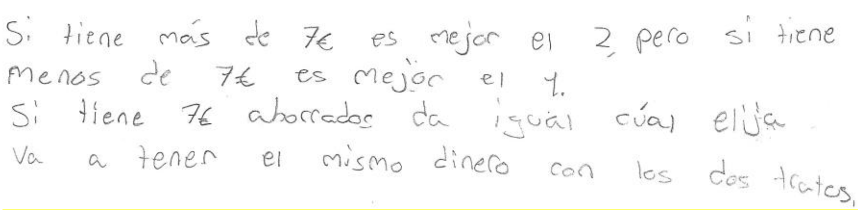


Figura 1. *Respuesta de Javier*

Agradecimientos

ISBN 978-84-945722-3-4

Este trabajo ha sido realizado dentro de los proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU2013-41632-P y EDU2016-75771-P, financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Referencias bibliográficas

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 5-23). Berlín, Alemania: Springer

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3–5*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Cai, J., Lew, H., Morris, A., Moyer, J., Ng, S. y Schmittau, J. (2005). The development of students' algebraic thinking in earlier grades: A cross-cultural comparative perspective. *ZDM*, *37*(1), 5-15.

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M., y Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior*, 41, 87-103.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Confrey, J. y Smith, E. (1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations and transformations. En R. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of The International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 57-63). Blacksburg, VA: Conference Committee.

Ellis, A. (2011). Algebra in the middle school: Developing functional relationships through quantitative reasoning. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 215-238). Berlín, Alemania: Springer.

Kaput, J. J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum.* Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning y Achievement in Mathematics and Science.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de Educación Primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *2*(1), 24-40.

Ministerio de Educación y Ciencia (2014). Real Decreto 126/2014 de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. BOE, 52, 19349-19420. Madrid, España: Autor.

Moreno, A., Cañadas, M.C., Jaldo, P. y Bautista, A. (2016). Functional topics in grade 5 students' comparisons of two linear functions. Presentado en el *13th International Congress on Mathematical Education*, Hamburgo, Alemania.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-163). Nueva York, NY: LEA.

Soares, J., Blanton, M. L. y Kaput, J. (2006). Thinking algebraically across the elementary school curriculum. *Teaching children mathematics*, *2*(5), 228-235.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-1.136

INICIACIÓN ENTORNO AL INFINITO

Juan Antonio Prieto Sánchez - Antonio Ángel Guerrero Bey - Francisco Manuel Moreno Pino
juanantonio.prieto@uca.es - antonio.bey@uca.es - franciscomanuel.moreno@uca.es
Universidad de Cádiz (UCA), España

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Modalidad: Taller (T)
Nivel educativo: Nivel Medio o Secundario (12 a 15 años)
Palabras clave: Infinito potencial, Infinito actual, Espejos, Material didáctico

Resumen

La intención general de un taller es formalizar conocimientos a través de la construcción, manipulación y estudio de objetos. Por todo ello, nuestro propósito es mostrar la relación entre una experiencia física con el infinito matemático en el ámbito educativo. Se piensa implementar cuatro sesiones experimentales: Finito -Infinito mediante las concepciones de Russell, Infinito Potencial- Infinito Actual: intuitivo- contraintuitivo, Infinito actual siguiendo el modelo de inclusión de Bolzano y, por último, Infinito actual siguiendo esta vez el modelo de exclusión de Cantor.

Tras la finalización de las sesiones programadas se pretende terminar con una puesta en común donde se recogerán resultados y conclusiones de los participantes, enfatizando no sólo la naturaleza propia del infinito sino además su enfoque didáctico.

Introducción

La intención general en un auténtico taller, es acentuar los aspectos de trabajo activo que necesita todo aprendizaje y de trabajo útil, en el que se construyen, esclarecen o ratifican conocimientos a través de la construcción, manipulación y estudio de objetos.

Se refuerzan la capacidad de trabajar en equipo, el gusto por el trabajo bien hecho, el diseño y realización reflexiva de modelos materiales, el fomento de la imaginación y de la creatividad.

El tema tratado es el concepto matemático del infinito, es un aspecto que revierte gran dificultad. Para Hilbert citada en D'Amore (1996): *"¡el infinito! Ningún otro problema ha turbado tan profundamente el espíritu humano: ninguna idea ha estimulado tan profundamente su intelecto; y sin embargo ningún otro concepto tiene mayor necesidad de clarificación que el del infinito"* (p.345), y que llega a ser de gran importancia para la

ISBN 978-84-945722-3-4

construcción matemática y didáctica de otros conceptos. Mencionemos una frase dada por Dalessert citada también en D'Amore (1996): "*La enseñanza de la matemática debe perseguir dos objetivos que son propios de ella: el sentido de rigor lógico y la noción del infinito*" (p.345).

Para amenizar, entre sesiones se proyectaran cortos de videos de las experiencias realizadas con alumnos de secundaria, universitarios y profesores de matemáticas.

Al finalizar, reflexionaremos en grupo todo el proceso seguido. Se trata de establecer un diálogo[28] entre todos los miembros del taller para intentar conseguir una serie de conclusiones generales.

Material

Con el aparataje de los espejos paralelos (expuesto, también, en la Feria Matemática de este Congreso) y los fenómenos de reflexión:

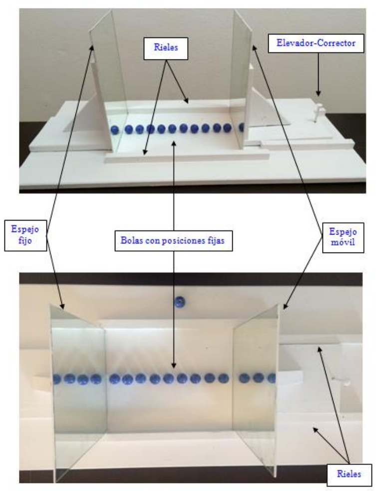


Figura 1. Aparataje

SESIÓN 1: *Finito -Infinito mediante las concepciones de Russell*

Nos basaremos para ello en la definición de Finito e Infinito de Bertrand Russell (1903). Parte de la teoría de los números cardinales, definiendo los números finitos para alcanzar la

[28] El diálogo como investigación trata de clarificar, indagar y profundizar en nuestras ideas y pensamientos, provocando un avance colectivo. (Quesada, 2017)

ISBN 978-84-945722-3-4

definición del concepto matemático que queremos tratar bajo una comparación entre finito e infinito.

Inicia el estudio comparando clases finitas con clases infinitas:

> Sea u cualquier clase y u' una clase formada quitando un término x de u. Entonces puede suceder o no suceder que u sea semejante a u'. Por ejemplo, si u es la clase de todos los números finitos y u' la clase de todos los números finitos excepto el 0, los términos de u' se obtienen sumando 1 a cada uno de los términos de u; esto pone en correspondencia un término de u con uno de u' y viceversa, no omitiéndose ningún número de ninguna de las dos clases ni tomándolo dos veces. De modo que u' es semejante a u. Pero si u está formada por todos los números finitos hasta n, donde n es algún número finito, y u' está formado por todos ellos excepto 0, entonces u' no es semejante a u... (Russell, 1903/1995, p.223)

Para ello, sean: u = 0, 1, 2, 3, 4,... y u'= u - $\{0\}$= 1, 2, 3, 4, 5, ... dónde se observan que u y u' son semejantes.

Ahora: u = 0, 1, 2, 3, 4,..., n y u'= u - $\{0\}$= 1, 2, 3, 4, 5, ...n+1 ; u y u' no son semejantes.

"Cuando es posible quitar un término de u y dejar una clase u' semejante a u, decimos que es una clase infinita. Cuando no es posible decimos que u es una clase finita" (Russell, 1903/1995, pp. 223-224).

De acuerdo con esto último, se llega a que si u es una clase finita, la clase formada agregando un término a u es finita, y recíprocamente. Con respecto a clases y sus partes diferencia las clases finitas de las infinitas, Rusell (1903/1995) puntualiza:

"En las clases finitas, si una es parte propia de otra, la una tiene un número menor de términos que la otra. (Parte propia es una parte y no el todo). Pero en las clases infinitas esto deja de ser válido" (p. 224).

Esta última diferencia hace que sea esencial para diferenciar finitud de infinitud.

ISBN 978-84-945722-3-4

Procedimiento 1

Con un solo espejo, se le coloca un número determinado de bolas que se le pedirá que cuenten, éstas y las reflejadas en el único espejo.

Figura 2. Cardinal finito

Se le pedirá que quite una bola y que las vuelva a contar. Finalmente se le hace la pregunta si tienen la misma cantidad de bolas antes y después de quitar esa bola.

A continuación, con los dos espejos ya enfrentados y paralelos, se le coloca un número determinado de bolas que se le pedirá que las cuenten, éstas y las reflejadas en los dos espejos.

Figura 3. Cardinal Infinito

De la misma forma, se le pedirá que quite una bola y que las vuelva a contar. Finalmente se le hace la pregunta si tienen la misma cantidad de bolas antes y después de quitar esa bola.

Momento 1

Se proyectaran entrevistas de alumnos de secundaria realizando y aclarando sus respuestas.

Figura 4. Entrevistas alumnos 1º Ciclo Secundaria

ISBN 978-84-945722-3-4

SESIÓN 2: *Infinito Potencial- Infinito Actual: intuitivo- contraintuitivo*

Entendemos como *infinito potencial* lo que no tiene fin, lo que siempre, en término temporal; continúa, en término espacial. Asociada a la ausencia total de frontera o de límites, falta total de conclusión, como proceso que se repite, o progresa, indefinidamente. En cambio, el *infinito actual* lo asociamos a la idea de totalidad, a la idea de completez, el de unidad. Mientras que la primera connotación lo asociamos como un proceso la segunda, la consideramos como alcanzado y con los límites adquiridos. Consideramos el infinito actual como identidad cardinal cuando se trate de un conjunto de infinitos elementos numéricos, (Prieto, 2015).

Del mismo marco teórico de Prieto (2015), la aceptación del infinito potencial se podría concretar con los siguientes puntos:

- El concepto potencial del infinito responde a una interpretación natural intuitiva del infinito (Fischbein, 1982 citado en Garbin & Azcárate, 2001).
- La aceptación o no del infinito potencial puede presentar un obstáculo para la aceptación del actual (Turégano, 1996).

Y la aceptación del infinito actual, en los siguientes:

- El concepto del infinito actual responde a una interpretación contraintuitiva (Garbin & Azcárate, 2001).
- El infinito actual se acepta de menor grado y con una cierta indeterminación, Turégano (1996).
- El infinito actual no tiene un significado conductual, por tanto no es congruente con una interpretación intuitiva, Fischbein (1982, citado en Garbin & Azcárate, 2001).

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

- El estudiante crea sus propios argumentos, acertadas o no, para poder dar respuestas en la aceptación del infinito actual, Sierpinska (1994, citado en Penalva, 2001).
- “El desarrollo conceptual del infinito actual es bastante diferente, se manifiesta muy tardíamente y aparece siempre inmerso en situaciones de en conflictos” (Waldegg, 1996, p.108).
- Se podría pensar “en una especia de anterioridad lógica del infinito actual sobre el potencial, lo que tiene como consecuencia que su aparición sea inevitable en los procesos de creación y re-creación de las matemáticas en donde se presenta el infinito potencial” (Waldegg, 1996, p.108).

Procedimiento 2

Se trata de reflexionar sobre estos dos tipos de infinito con el aparataje y en la disposición de la figura 3.

Momento 2

Se proyectaran entrevistas realizadas a alumnos de secundaria.

Figura 4. Entrevistas alumnos 4º ESO

SESIÓN 3: *Infinito actual siguiendo el modelo de inclusión de Bolzano (1991)*

Se trata de establecer como criterio la comparación parte/todo, comparación elegida por Bolzano basadas en la relación de inclusión.

Procedimiento 3

En la disposición de la figura 3, dispondremos un número de bolas de forma lineal facilitando la tarea las muecas de la plataforma. Les pediremos que nos diga y reflexiones cuántas bolas

ISBN 978-84-945722-3-4

hay entre los espejos. A continuación, les indicaremos que quite una bola (les recomendaremos la primera más cercana a ellos, y que acerquen posteriormente los espejos para que no se reflejen huecos). Se trata de reflexionar a la pregunta que tienen la misma cantidad antes que después una vez substraído esa bola y por qué.

Momento 3

Se proyectaran entrevistas realizadas a alumnos de secundaria.

Figura 5. Entrevistas alumnos 4º ESO-1ºBach

SESIÓN 4: *Infinito actual siguiendo esta vez el modelo de exclusión de Cantor (1983)*

En este caso, establecer como criterio de comparación uno-a-uno, comparación elegida por Cantor basada en la biyección entre conjuntos.

Figura 6. Montaje y disposición Cantor

Procedimiento 4

En una disposición no lineal pondremos dos conjuntos de cantidades diferentes de bolas. De nuevo se trata de reflexionar si tienen las mimas cantidades teniendo en cuenta las reflejadas.

Momento 4

Se proyectaran entrevistas realizadas a alumnos universitarios y profesores de matemáticas.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

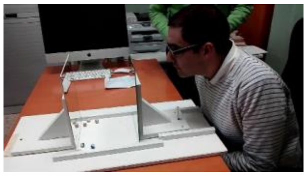
 

Figura 7. Entrevista Universitarios

SESIÓN 5: Conclusiones

En pequeños grupos reflexionaremos todo el proceso seguido. Relacionaremos la epistemología del infinito actual con la cognición.

Por otro lado, la progresión conceptual del infinito actual lo intentamos ajustar a las etapas establecidas por Piaget y García en *Psicogénesis e historia de la ciencia* (1982). De esa forma justifica la validez de una comparación entre la psicogénesis de un concepto y el de su historia. Para ello relacionaremos el proceso establecido en el taller con el trabajo realizado por Moreno & Waldegg (1991), donde analizaron las diferentes etapas en la evolución conceptual del término. Ellos evidenciaron cómo el trabajo de Bolzano en *Las paradojas del infinito* se ajustaba a la etapa intra-objetal y los de Cantor a la etapa inter-objetal, además de mostrar las dificultades encontradas por los estudiantes para lograr estas etapas dadas en la estructura curricular.

Referencias bibliográficas

Bolzano, B. (1851). *Paradoxien Des Unendlichen,* Leipzig (publicación póstuma). Las paradojas del infinito (trad. L.F. Segura), 1991, México: Mathema.

Cantor, G. (1983). *Fundamentos de una teoría general de las multiplicidades: una investigación matemático filosófica en la teoría del infinito* (J. Bares y J.Climent, trad.). (1895).Recuperado de internet http://www.uv.es/jkliment/Documentos/Cantor83.pc.pdf.

D'Amore, B. (1996). El infinito: una historia de conflictos, de sorpresas, de dudas. Un capo fértil para la investigación en didáctica de la matemática. *Epsilon, 36*, 341-359.

Garbin, S. & Azcárate, C. (2001). El concepto de infinito actual. Una investigación acerca de las incoherencias que se evidencian en alumnos de bachillerato. *SUMA, 38,* 53-67.

ISBN 978-84-945722-3-4

Moreno, A., & Waldegg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 211–231.

Penalva, M. C. (2001). Implicaciones didácticas de las dificultades en el aprendizaje de conjuntos infinitos: representaciones de conjuntos numéricos en textos matemáticos escolares. En Ortiz, M. (Ed.), *V Reunión Científica Nacional de PNA (SEIEM)*. Palencia: Universidad de Valladolid.

Piaget, J., & R. García (1982), *Psicogénesis e historia de la ciencia,* México: Siglo XXI Editores.

Prieto, J.A. (2015). *Estudio del infinito actual como identidad cardinal en estudiantes de educación secundaria de 13 a 16* años. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales. Universidad de Málaga. España.

Quesada, M. A. (2017). *¿Qué es un diálogo socrático?* Recuperado de internet http://equanima.org/equanima/dialogo-socratico.

Turégano, P. (1996). Intuición del infinito en estudiantes de primero de BUP, *Epsilon*, *34*, 11-46.

Waldegg, G. (1996). Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. *1*(1)

ISBN 978-84-945722-3-4

T-1.179

ÁRBOLES DE GENTZEN COMO ALTERNATIVA A LAS TABLAS DE VERDAD PARA EL ANÁLISIS DE ARGUMENTOS

Edwin Insuasty Portilla
edwin@udenar.edu.co
Universidad de Nariño. Colombia

Núcleo temático: Comunicación y divulgación matemática. Profesorado
Modalidad: T (20 participantes)
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: Lógica, Argumentos, Análisis, Gentzen

Resumen
Los árboles de Gentzen constituyen un método que es más corto que el de las tablas de verdad en el análisis de argumentos y que tiene una ventaja adicional, de ser puramente sintáctico ya que no es necesario trabajar con la verdad o falsedad de las proposiciones porque sencillamente se hacen operatorias algebraicas con los símbolos que las representan. Mediante los árboles de Gentzen es posible determinar si un argumento es correcto o incorrecto y también si un conjunto de proposiciones es consistente o inconsistente. En los currículos de matemáticas para la educación media solamente se considera el análisis de argumentos usando las tablas de verdad, las cuales se vuelven inmanejables cuando el número de proposiciones simples es alto. Se pretende que los docentes analicen la viabilidad de este método como una alternativa sintáctica frente a la operatoria mecánica de las tablas de verdad.

Inicialmente se formalizarán algunos conceptos básicos, muy conocidos de la lógica clásica, que permiten abordar los Árboles de Gentzen. En este caso no se hará diferencia entre oración y proposición.

Definición 1. Una oración o proposición lógica es una expresión de la cual podemos afirmar en una situación dada si ésta es verdadera o falsa. Puede ser representada por una letra. Ejemplo p: Está lloviendo.

Definición 2. El lenguaje L de la lógica está formado por los siguientes elementos:

1. Letras proposicionales: $p, q, r, \dots$ También letras con subíndice $p_1, p_2, p_3 \dots$ si necesitáramos muchas más.
2. Conectivos lógicos: $\wedge$ $\vee$ $\rightarrow$ $\leftrightarrow$ y la negación $\neg$

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

3. Paréntesis: ( )

Definición 3. Reglas para escribir oraciones o fórmulas de L

1. Una letra proposicional es una oración (p, q, p_1, etc.).
2. Si p es una oración, $\neg p$ también lo es.
3. Si p y q son dos oraciones, entonces $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \rightarrow q)$, $(p \leftrightarrow q)$ también lo son.
4. Sólo las expresiones construidas con las reglas 1, 2 y 3 son oraciones o fórmulas de L.

Definición 4. Las tablas de verdad de los operadores lógicos son las siguientes:

p	q	$(p \wedge q)$	$(p \vee q)$	$(p \rightarrow q)$	$(p \leftrightarrow q)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

p	$\neg p$
V	F
F	V

Definición 5. Un *argumento* es un conjunto de una o más oraciones o proposiciones lógicas. La última de ellas se denomina conclusión, las anteriores se llaman premisas.

$$\left.\begin{array}{c}\text{Oración 1}\\ \text{Oración 2}\\ \vdots\end{array}\right\}\text{Premisas}$$
$$\overline{\text{Oración N}}\;\}\;\text{Conclusión}$$

Definición 6. Un *argumento* es *correcto* si en toda situación en la que sus premisas son verdaderas, su conclusión también es verdadera.

Definición 7. No se puede producir una conclusión falsa a partir de premisas verdaderas.

Ejemplos de argumentos:

1. Todos los humanos son mortales.
   Carlos es humano.
   ____
   Carlos es mortal.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

2. Hace frío y no hay sol.
Estoy caminando en la playa.
Uso lentes oscuros porque el sol está muy fuerte

Ese perro es verde.

3. Todos los Gluglú son Glogló
Glifó es Gluglú

Glifó es Glogló

En los argumentos estudiados por la Lógica, no se tiene en cuenta el sentido retórico, sino la estructura en sí del argumento. Significa esto que si se acepta como correcto el argumento 1, se debe también aceptar como correcto el argumento 3 porque ambos tienen la misma estructura, aunque éste último diga cosas incomprensibles.

La lógica proposicional estudia los argumentos que incluyen oraciones o proposiciones y conectivos lógicos.

Ejemplo. Analizar el siguiente argumento mediante tablas de verdad.

$$\begin{array}{c} (p \rightarrow q) \\ (p \vee q) \\ \hline q \end{array}$$

Solución: En el argumento hay dos premisas y la conclusión.

p	q	$(p \rightarrow q)$	$(p \vee q)$	q
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F

Primero obtenemos las tablas de verdad de las tres proposiciones. Interesa aquellas valuaciones en que las premisas son simultáneamente verdaderas (que en la tabla están marcadas con rectángulos rojos). Como para esas valuaciones, la conclusión q es siempre verdadera (valores resaltados en verde), de acuerdo con la *Definición 6* podemos afirmar que el argumento es *correcto*.

Ejercicios propuestos. Mediante tablas de verdad, analizar los siguientes argumentos.

$$\begin{array}{c} (p \wedge q) \\ (\neg p \vee q) \\ \hline (q \rightarrow \neg p) \end{array} \qquad \begin{array}{c} (p \leftrightarrow q) \\ (\neg p \vee q) \\ \hline (q \rightarrow p) \end{array}$$

Definición 8. Un conjunto de proposiciones $\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n\}$ se llama *consistente* (*satisfactible*) si existe al menos una posibilidad en que todas sus proposiciones sean simultáneamente verdaderas. En caso contrario se llamará *inconsistente* (*insatisfactible*)

ISBN 978-84-945722-3-4

Ejemplo. Analizar mediante tablas de verdad, si el conjunto:

p	q	$(p \wedge q)$	$(\neg p \vee q)$	$(q \rightarrow \neg p)$
V	V	V	V	F
V	F	F	F	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

$\{(p \wedge q), (\neg p \vee q), (q \rightarrow \neg p)\}$ es consistente o no.

Solución. Construimos las tablas de verdad de las tres proposiciones del conjunto.

Se puede observar que no existe al menos una sola valuación donde las tres proposiciones son simultáneamente verdaderas, por tanto se concluye de acuerdo con la *Definición 8* que el conjunto es inconsistente (insatisfactible).

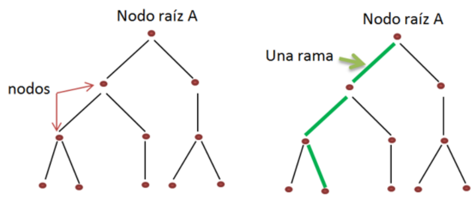
Ejercicio propuesto. Analizar mediante tablas de verdad, si el conjunto:
$\{(p \leftrightarrow q), (\neg p \vee q), (q \rightarrow p)\}$ es consistente o no.

Gerhard Gentzen (1909 – 1945) Matemático y lógico alemán. Trabajó en fundamentos de la matemática y teoría de la demostración. Introdujo la idea de sistema de deducción natural para lógica clásica y lógica intuicionista.

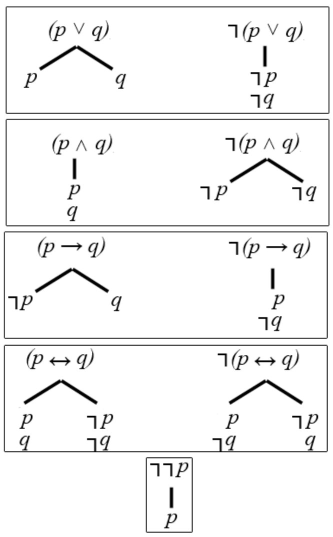
Los Árboles de Gentzen es un método más corto para el análisis de argumentos y conjuntos de proposiciones que el de las tablas de verdad, y es puramente sintáctico lo que significa que no se trabaja con los valores de verdad de las proposiciones sino que se hacen manipulaciones algebraicas con ellas.

Definición 9. Dado un conjunto *A* de oraciones, un Árbol de Gentzen se construye mediante las siguientes reglas:

1. Los árboles estarán constituidos por *nodos* unidos por *líneas*. En cada *nodo* escribiremos una o más oraciones. Una *rama* del árbol es una sucesión lineal de *nodos* de éste.

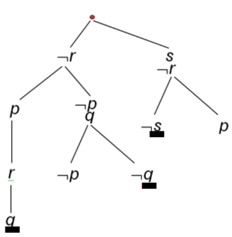


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



2. El primer nodo del árbol se llama *nodo raíz* y contiene todas las proposiciones del conjunto *A*.

3. Cada nodo del árbol se puede extender aplicando a alguna proposición del nodo una de las reglas mostradas en la figura de la izquierda.



4. Una rama se dirá *cerrada* si en ella aparece una oración *p* y su negación ┐*p*. Las ramas *cerradas* se marcarán con un pequeño rectángulo negro como se muestra en la siguiente figura. Una rama que no está *cerrada* se llamará *abierta*.

5. Una oración que aparece en algún nodo del árbol se llamará *acabada* si todas las ramas abiertas que le pertenecen han sido extendidas aplicándole una de las reglas. Las oraciones acabadas serán marcadas con un visto √.

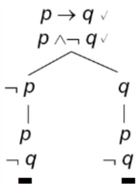
6. Un árbol está *completo* si todas las oraciones que aparecen en alguna rama abierta han sido acabadas.

Definición 10. Un conjunto de proposiciones es *sintácticamente consistente* si tiene un árbol de Gentzen *completo* con al menos una rama abierta. En caso contrario se llamará *inconsistente*.

Ejemplo 1. Es consistente este conjunto? *{(p → q), (p ∧ ┐q)}*

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Solución. Desarrollamos un Árbol de Gentzen, aplicando reglas a la primera oración y luego

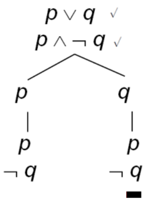


a la segunda como se muestra en la figura.

Como se puede observar, el árbol está completo y todas las ramas se cierran. Como no quedó ni una rama *abierta*, de acuerdo con la Definición 10 el conjunto es *inconsistente*.

Ejemplo 2. Es consistente este conjunto? $\{(p \vee q), (p \wedge \neg q)\}$

Solución. Desarrollamos un Árbol de Gentzen, aplicando reglas a la primera oración y luego



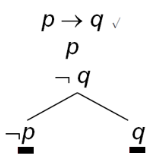
a la segunda como se muestra en la figura.

Como se puede observar, el árbol está completo y una de sus ramas quedó *abierta*, de acuerdo con la Definición 10 el conjunto es *consistente*.

Definición 11. Dado un argumento $\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n\} \vdash p_{n+1}$, su *conjunto contraejemplo* está formado por todas las premisas más la negación de la conclusión, es decir por:
$\{ p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \neg p_{n+1} \}$.

Teorema 1. Un argumento $\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n\} \vdash p_{n+1}$ es *correcto* si y solamente si su *conjunto contraejemplo* $\{p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \neg p_{n+1}\}$ es *inconsistente*.

Ejemplo 1. Es correcto el siguiente argumento? $\{(p \rightarrow q), p\} \vdash q$

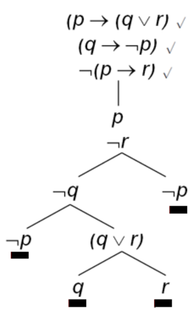


Solución. Su conjunto contraejemplo es: $\{(p \rightarrow q), p, \neg q\}$. Construimos a partir de este conjunto un árbol de Gentzen. Al aplicar regla a la primera proposición, las dos ramas se cierran. De acuerdo con la Definición 10, el conjunto contraejemplo es *inconsistente* y por el Teorema 1, el argumento es *correcto*.

Ejemplo 2. Es correcto el siguiente argumento? $\{(p \rightarrow (q \vee r)), (q \rightarrow \neg p)\} \vdash (p \rightarrow r)$

Solución. Su conjunto contraejemplo es: $\{(p \rightarrow (q \vee r)), (q \rightarrow \neg p), \neg (p \rightarrow r)\}$

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

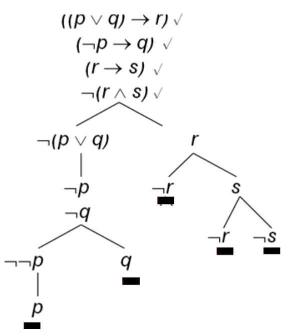


Construimos un Árbol de Gentzen aplicando reglas a las proposiciones en el siguiente orden: proposición 3, luego la 2 y por último la 1. El árbol obtenido se muestra en la figura adyacente.

En este caso, todas las ramas del árbol se cierran. De acuerdo con la Definición 10, el conjunto contraejemplo es *inconsistente* y por el Teorema 1, el argumento es *correcto*.

Ejemplo 3. Analizar el argumento: $\{((p \vee q) \rightarrow r)), (\neg p \rightarrow q), (r \rightarrow s)\} \vdash (r \wedge s)$

Solución. Desarrollando un Árbol de Gentzen mediante la aplicación de las reglas a las proposiciones del conjunto contraejemplo siguiendo el mismo orden en que aparecen, se genera un árbol mostrado en la figura adyacente.



Al igual que en los ejemplos anteriores, todas las ramas del árbol se cierran. De acuerdo con la Definición 10, el conjunto contraejemplo es *inconsistente* y por el Teorema 1, el argumento es *correcto*.

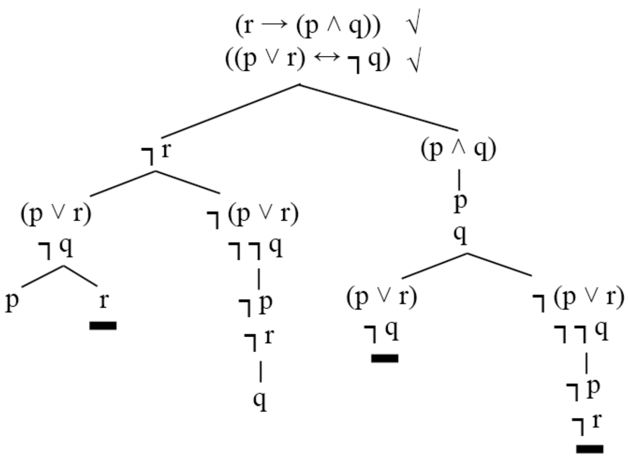
Ejemplo 4. Analizar el argumento: $\{(r \rightarrow (p \wedge q))\} \vdash \neg((p \vee r) \leftrightarrow \neg q)$

Solución. El Conjunto contraejemplo queda conformado de la siguiente manera:

$\{(r \rightarrow (p \wedge q)), \neg\neg((p \vee r) \leftrightarrow \neg q)\}$. Al ubicar las dos proposiciones de este conjunto en el primer nodo del árbol, eliminamos la doble negación de la segunda proposición.

Se procede a generar el árbol aplicando reglas a la primera y segunda proposición en ese orden y como se puede observar en la siguiente figura, aparecen dos ramas abiertas. Esto indica según la Definición 10, que el conjunto contraejemplo es *consistente* y por el Teorema 1, el argumento es *incorrecto*.

ISBN 978-84-945722-3-4



Ejercicios propuestos. Analizar mediante Árboles de Gentzen los siguientes argumentos:

1. $\{\ (p \wedge q)\ \} \vdash \neg\,(\neg p \vee \neg q)$
2. $\{\ (p \leftrightarrow \neg q)\ ,\ (p \vee \neg q)\ \} \vdash (p \to q)$
3. $\{\ (p \to q)\ ,\ (q \to (r \wedge \neg s))\ \} \vdash (p \to (r \vee s))$
4. $\{\ ((p \vee q) \to\ \neg r),\ (p \wedge q)\ \} \vdash \neg r$

Referencias bibliográficas.

Fernández, J. et. al (2007). *Lógica Computacional*. Madrid. UNED.

Labra, J. y Fernández, A (1998). *Lógica Proposicional para Informática*. Oviedo. Universidad de Oviedo.

Lewin, R. (2003). *Introducción a la Lógica*. Santiago de Chile. Pontificia Universidad Católica de Chile.

Beneyto, R. (1973). Árboles, lógica y mecanismos de decisión. Teorema: Revista internacional de filosofía, Vol. 3, Nº. 2-3, 289-314.

Marraud, H. y Navarro, P. (1988). *Sistemas deductivos tipo Gentzen: problemas de lógica de primer orden*. Madrid. Universidad Autónoma de Madrid.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-1.231

RECONSTRUCIÓN DE LA ARGUMENTACIÓN EN TAREAS MATEMÁTICAS

Guadalupe Cabañas-Sánchez – Jonathan Cervantes-Barraza – Romario Jose Palacio Palmera –Karina Patricia Núñez Gutiérrez
gcabanas.sanchez@gmail.com –jacbmath@hotmail.com – romario_08@live.com – karina_n93@hotmail.com
Universidad Autónoma de Guerrero-México

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.
Modalidad: T
Nivel educativo: Primaria
Palabras clave: Argumentación, refutación, modelo de Toulmin, colectivo

Resumen
El taller tiene como propósito examinar desde la estructura básica del modelo de Toulmin (1958/2003), tres formas en las cuales un argumento puede involucrar a la refutación en un proceso argumentativo. Desde la investigación se sugieren tres maneras: 1) que los datos del argumento pueden ser refutados, dejando la conclusión en duda; 2) La garantía del argumento puede ser refutada, dejando de nuevo a la conclusión en duda o bien, 3) que la conclusión en sí puede ser refutada, lo que implica o que el dato o la garantía es no válida.

1. Introducción

El análisis y reconstrucción de la argumentación en el salón de clases ha sido un tema recurrente en la Educación Matemática, por su contribución en que los estudiantes aprendan y participen en matemáticas, explorando, conjeturando y justificando sus ideas (Rumsey & Langrall, 2014). En matemáticas, uno argumenta cuando tiene una afirmación (o aserción o conjetura) o quiere convencer a alguien (uno mismo, un compañero de clase, al profesor de la verdad de una declaración (Pedemonte & Balacheff, 2016). Los argumentos no tienen una forma específica; deben también organizarse en una secuencia de acuerdo con reglas y procedimientos generales (Toulmin, 1958/2003, p.43). Macagno, Mayweg-Paus y Kuhn (2014) sostienen, que los argumentos y su estructura pueden revelar aspectos distintos e interdependientes de la argumentación, esto es, si refieren a una conclusión, garantía, apoyo a puntos de vista, refutación, entre otros.

ISBN 978-84-945722-3-4

Schwarz (2009) destaca el papel de la escuela para fomentar las habilidades argumentativas, a través de escenarios adecuados para la argumentación, por lo que los esfuerzos del profesor deben orientarse hacia el diseño de situaciones que favorezcan el que los estudiantes se involucren desde el reconocimiento no sólo de sus objetivos personales, sino también a partir de la identificación de los objetivos y metas de todos los participantes en las interacciones. En este marco institucional, la argumentación es una habilidad básica que se desarrolla de manera progresiva a lo largo de las etapas de la educación obligatoria (Goizueta & Planas, 2013). De ahí que los profesores deben dar oportunidades a los estudiantes, de aprender a plantear aserciones, respaldarlas con evidencias, responder a críticas y revisarlas basados en una nueva evidencia, de refutarlas o bien contra argumentarlas. Pues como sostienen Conner, Singletary, Smith, Wagner y Francisco (2014, p. 403), comprender, reconocer y construir argumentos matemáticos son partes importantes de las prácticas disciplinarias de matemáticas. Lo anterior se plantea como uno de los objetivos de la educación matemática; ayudar a los estudiantes a aprender a participar en la producción de argumentos matemáticos. Estas oportunidades de aprendizaje deben estar disponibles desde el inicio de la escolarización, que no estén reservados para los estudios "avanzados" (NCTM, 2000, p.1).

Es en el ámbito de la argumentación y la construcción de conocimiento matemático a nivel primaria, que se ubica el presente trabajo. Está enfocado en el estudio de los argumentos de refutación de aserciones, en el marco de las propiedades de los triángulos con base en sus ángulos y sus lados. El objetivo consiste en: examinar desde la estructura básica del modelo de Toulmin (1958/2003), tres formas en las cuales un argumento puede involucrar la refutación en un proceso argumentativo: 1) que los datos del argumento pueden ser refutados, 2) La garantía del argumento puede ser refutada, o bien, 3) que la conclusión en sí puede ser refutada.

2. Marco Teórico

2.1. Argumentación y razonamiento

La argumentación es una actividad racional que cualquiera puede hacer mediante el uso de razones para la construcción de un resultado final llamado *argumentación* (Corcoran, 1989). Para Toulmin (1958/2003) la argumentación es considerada como toda la actividad de hacer

ISBN 978-84-945722-3-4

aserciones, desafiándolos, respaldándolos, produciendo razones, hacer críticas de esas razones, refutar las críticas y así sucesivamente. Por argumento, este mismo autor lo concibe como cadenas de razonamientos, siendo la secuencia de afirmaciones vinculadas entre sí y razones que entre ellas establecen el contenido y la fuerza de la posición de un hablante en particular del argumentador.

En el trabajo que se presenta, los argumentos son fuente de análisis para reconstruir la argumentación y se estudian con base en los razonamientos que emergen al discutir desde lo colectivo, características invariantes de los triángulos basadas en los ángulos y lados de esta clase de polígonos. En ese contexto, el razonamiento se comprende como el uso de argumentos en la interacción (Schnell, 2014), en el que el núcleo: dato, garantía y aserción del modelo de Toulmin es útil en la reconstrucción de la argumentación desde lo colectivo (Krummheuer, 1995). Se analizan con base en aquellos argumentos que refieren a una serie de proposiciones en las cuales una aserción se infiere de los datos y la garantía (Toulmin, Rieke & Janik, 1984). La reconstrucción de la argumentación se establece desde las interacciones (lo colectivo). Para ello, se usa el modelo extendido de Toulmin, que es una adaptación propuesta en Conner (2008); quien considera la participación del profesor agregado en la estructura básica del argumento, ya que es quien apoya de forma activa la producción de argumentos; contribuyendo de forma directa partes (datos o garantías), tal como se muestra en la figura 1.

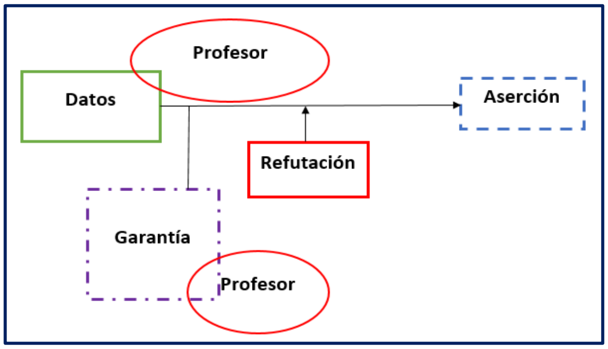


Figura 4. Adaptación del modelo del Toulmin (1958/2003) en Conner (2008).

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

2.2. Argumentación colectiva

La reconstrucción de la argumentación se plantea desde las interacciones colectivas, en el taller, entre los profesores y el grupo de investigadores que tiene a cargo su desarrollo. La argumentación colectiva se entiende desde la postura de Yackel (2002), como un concepto útil para analizar la naturaleza de la actividad dentro de las aulas de matemáticas que se caracterizan por la resolución colaborativa de problemas y discusiones en toda la clase. Además, la argumentación ha sido estudiada en su mayoría mediante la implementación del modelo de Toulmin (e. g., Whitenack & Knipping, 2002; Krummheuer, 2015; Reid, Knipping & Crosby, 2011), dado que se usa como método para facilitar la reconstrucción-análisis de la naturaleza de la actividad y discusión en clase de matemáticas. A partir de la reconstrucción de la argumentación, se identifican los respaldos y/o garantías de una aserción particular que están inicialmente presentes, a fin de valorar su validez y con ello, si la aserción es objeto de debate (o se refuta). De ser refutada la aserción, entonces el respaldo o las garantías se ponen bajo escrutinio y con ello, se modifica dicha aserción, consecuentemente garantía y/o respaldo.

2.3. Refutación de argumentos

El concepto de refutación se toma de Toulmin (1958/2003); quien la explica en término de las excepciones que presenta la aserción/conclusión. En otras palabras, significa que la refutación muestra los casos donde la garantía no conecta los datos con la aserción. Reid, Knipping & Crosby, (2011) afirman que la refutación niega totalmente una parte del argumento, que puede ser la aserción, la garantía o el dato. Asimismo, estos investigadores reconocen tres formas en que un argumento puede implicar una refutación; 1) los datos del argumento pueden ser refutados, y se deja la conclusión en duda, 2) la garantía del argumento puede ser refutada, dejando otra vez la conclusión en duda o 3) la conclusión misma puede ser refutada, lo que implica que los datos o la garantía son inválidos, pero sin decir cual.

2.4. Propiedades y definiciones relativas a la clasificación de triángulos

El estudio se desarrolla en torno a los conceptos de triángulo equilátero, isósceles y escalenos, objeto de estudio en las tareas planteadas en el marco de la refutación de aserciones. También

ISBN 978-84-945722-3-4

se discuten propiedades, que refieren a características invariantes de los triángulos cuando se estudian en el contexto de la clasificación según sus lados y ángulos.

Propiedades:

- *Centrada en los ángulos interiores del triángulo*: refiere al uso de la propiedad: la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es igual a 180°. Esta propiedad puede presentarse de forma implícita, en forma de contra ejemplo donde se evidencie que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es diferente de 180°.
- *Centrada en la clasificación de polígonos*: Esta clasificación viene dada en términos de características de un polígono, por ejemplo, el caso: es un cuadrado si los cuatro ángulos miden 90° cada uno y los lados del cuadrado tienen la misma medida.

3. Aspectos Metodológicos

3.1. Participantes y contexto

El taller se diseñó para realizarse con profesores de primaria, en un tiempo promedio de dos horas. El contexto son tareas, planteadas a través de preguntas con respuestas cerradas a fin de favorecer la refutación de asersiones y con base en ello poner bajo escrutinio las garantías o los datos o bien, la aserción, establecidas por los profesores. El tiempo promedio para el análisis de cada tarea es de 30 minutos, desde la participación colectiva. Al finalizar, se realiza un cierre por parte del equipo de investigación acerca de los argumentos de refutación y las garantías puestas en juego a partir de definiciones y propiedades de los triángulos en cuestión.

3.2. Principios epistemológicos del diseño de las tareas.

El diseño de las tareas se fundamenta en tres principios, de modo que en el proceso de solución: 1) Se discutan características invariantes de los triángulos: equilátero, isósceles y escaleno con base en sus lados y sus ángulos, 2) se confronten y refuten aserciones y a partir de ello, revisar la garantía de los argumentos, y; 3) se reconozcan contradicciones en las garantías a fin de identificar la naturaleza de los argumentos.

ISBN 978-84-945722-3-4

Tabla 1: Tareas

Triángulo Equilátero	Triángulo Isósceles	Triángulo Escaleno
Bloque I	**Bloque II**	**Bloque III**
T1: ¿Existen triángulos equiláteros con un ángulo de 90°? Justifica tu respuesta.	**T4:** ¿Existen triángulos isósceles con un ángulo de 90°? Justifica tu respuesta.	**T7:** ¿Existen triángulos escaleno con un ángulo de 90°? Justifica tu respuesta.
T2: Existen triángulos equiláteros con un ángulo menor a 90°? Justifica tu respuesta.	**T5:** ¿Existen triángulos isósceles con un ángulo menor a 90°? Justifica tu respuesta.	**T8:** ¿Existen triángulos escaleno con un ángulo menor a 90°? Justifica tu respuesta.
T3: ¿Existen triángulos equiláteros con un ángulo mayor a 90°? Justifica tu respuesta.	**T6:** ¿Existen triángulos isósceles con un ángulo mayor a 90°? Justifica tu respuesta.	**T9:** ¿Existen triángulos escaleno con un ángulo mayor a 90°? Justifica tu respuesta.

En el taller, el análisis se enfoca en las tareas del bloque I, que refieren al triángulo equilátero.

4. Reflexiones

Los tres principios en que se sustentan las tareas a desarrollar desde las argumentaciones colectivas, son básicas en la producción de argumentos y refutación de aserciones. Basados en el segundo principio, las tareas favorecen la refutación de aserciones del tipo "si" o "no", las que pueden dejar en duda la (s) garantía (s) y/o respaldo (s) presentado (s) por un argumentador, y con ello, ponerlos bajo escrutinio, consecuentemente, las características y propiedades invariantes de triángulos.

Se espera además, que los profesores, reconozcan la importancia de la refutación en el desarrollo de habilidades argumentativas e identifiquen la estructura básica de los argumentos según el modelo de Toulmin. Así también, que comprendan un modo de reconstruir la argumentación desde lo colectivo.

Referencias bibliográficas

Corcoran, J. (1989). *Argumentation and logic*. Kluwer Academic Publishers, New York. *3*(1), 17-43.

ISBN 978-84-945722-3-4

Conner, A., Singletary, L., Smith, R., Wagner, P. & Francisco, R. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities, *Educational Studies in Mathematics*, *86* (2), 401–429.

Conner, M. (2008). Expanded Toulmin diagrams: a tool for investigating complex activity in classrooms. En O. Figueras, J.Cortina, S. Alatorre, T Rojano, & A. Sepúlveda (Eds.). *Proceedings of International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol 2, 361-368*, México, Morelia.

Goizueta, M., Planas, N. (2013). Temas emergentes del análisis de interpretaciones del profesorado sobre la argumentación en clase de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias 31*(1), 61-78.

Krummheuer, G. (1995). The ethnology of argumentation. In: P. Cobb and H. Bauersfeld (eds.). *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures.* Hillsdale: Erlbaum, pp. 229–269.

Macagno, F., Mayweg-Paus, E., & Kuhn, H. (2015). Argumentation Theory in Education Studies: Coding and Improving Students' Argumentative Strategies, *Educational Studies in Mathematics*, *34*:523–537, DOI 10.1007/s11245-014-9271-6

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Pedemonte, B., Balacheff, N. (2016). Establishing links between conceptions, argumentation and proof through the ck¢-enriched Toulmin model. *The Journal of Mathematical Behavior 41*(1), 104–122.

Reid, D., Knipping, C., & Crosby, M. (2011). Refutations and the logic of practice. *PNA*, *6*(1), 1-10

Rumsey, C., & Langrall, C. W. (2016). Promoting mathematical argumentation. *Teaching children mathematics*, *22*(7), 413-419.

Schnell (2014). Types of arguments when dealing with chance experiments. In C. Nicole, S. Oesterle, P. Lijedahl & D. Allan, (Eds.*) Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36, Vol. 5*, pp. 113-120. Vancouver, Canada: PME 38.

Schwarz, B. (2009). Argumentation and Learning. In Nathalie, M. & Anne-Nelly, P-C. (Eds). *Argumentation and Education. Theoretical Foundations and Practices* (pp. 91-126). New York: Springer.

Toulmin, S. E., Rieke, R. D., & Janik, A. (1984). *An introduction to reasoning* (2nd ed.). New York London: Macmillan.

Toulmin, S. (1958/2003). *The uses of argument*. New York: Cambridge University Press.

Whitenack, J., & Knipping, N. (2002). Argumentation, instructional design theory and student's mathematical learning: a case for coordinating interpretive lenses. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*(4), 441-457.

Yackel. E., (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. *The Journal of Mathematical Behavior 21*(4), 423–440.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-1.271

TRANSFORMANDO EN LA MATEMÁTICA

Mariana Gabriela Torres

marianagalois@yahoo,com.ar

Universidad Nacional de la Patagonia Austral – Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco. Argentina.

Modalidad: Taller.

Nivel Educativo: Medio.

Núcleo temático: V. Recursos Para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Palabras clave: GeoGebra, Análisis Matemático, Grafos, Fractales.

Resumen:

El interés por el estudio del impacto de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en los procesos educativos ha aumentado progresivamente en los últimos años, en paralelo a la creciente incorporación de estas tecnologías en todos los niveles de enseñanza, y la matemática no es ajena a ello. El presente Taller pretende dar una mirada de la matemática abordada desde las TIC, en diferentes áreas como el álgebra, el análisis matemático en una y varias variable, la teoría de grafos, los fractales, la geometría. Para ello se contarán experiencias, problemas abordados desde las TIC, para que los participantes desarrollen habilidades y competencias para innovar mediante el uso de las tecnologías de la información y la comunicación en su práctica, en su quehacer diario para desenvolverse en la sociedad actual del conocimiento. Promoviendo la producción de nuevos saberes para la enseñanza y el aprendizaje de éstas áreas, estimulando así a la reflexión sobre las prácticas docentes actuales, en los distintos niveles.

OBJETIVOS/ PROPÓSITO

El presente Taller pretende dar una mirada de la matemática abordada desde las TIC, en el álgebra, y análisis matemático en una variables. Como objetivos generales se plantean:

*El uso y la integración de las TIC's en las diferentes áreas planteadas.

*La actualización docente.

Como objetivos específicos:

Dar a conocer las principales propiedades y herramientas de GeoGebra en el planteo de construcciones en las áreas tratadas,

ISBN 978-84-945722-3-4

JUSTIFICACIÓN

Los fenómenos entendidos como globalización, los avances en el ámbito científico y tecnológico, la accesibilidad del uso de la información y comunicación nos impulsan a la búsqueda de respuestas específicamente en el ámbito educativo, de donde emerge la sociedad del conocimiento la cual atribuye al saber la fuente principal para la constitución del valor agregado en todos los procesos de producción de bienes y servicios de un país (Briss). Tal como afirma Manuel Castells, las tecnologías de la información, junto con las habilidades para usarlas y adaptarlas, son un factor crítico para generar el acceso a riqueza, poder y conocimiento en nuestros tiempos. La comunicación y el acceso a la información no es un lujo sino un derecho fundamental de los pueblos para conseguir un desarrollo humano integral, dicho desarrollo lo entendemos como el fortalecimiento de la democracia con justicia social, la prosperidad económica con equidad y la realización del potencial humano en sus múltiples dimensiones. En la innegable impronta de la inclusión de las tecnologías en los ambientes de aprendizaje, se vislumbran cambios emergentes en las formas de aprender y, por ende, en el modo de enseñar. Actualmente estamos asistiendo a un crecimiento importante de la oferta de educación a través de las nuevas tecnologías. Las herramientas cognitivas son instrumentos abiertos y modificables que los estudiantes operan y manipulan para ayudarse a sí mismos a involucrarse en pensamiento constructivo, permitiéndoles pensar más allá de sus propias limitaciones cognitivas.

El interés por el estudio del impacto de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en los procesos educativos ha aumentado progresivamente en los últimos años, en paralelo a la creciente incorporación de estas tecnologías en todos los niveles de enseñanza, y la matemática no es ajena a ello, pues ha sufrido una transformación en el abordaje de la misma.

Este Taller se centrara en la difusión del uso del *GeoGebra* en la enseñanza y el aprendizaje de las diferentes áreas de la matemática que se plantean aquí. Su creador Markus Hohenwarter, comenzó el proyecto en el año 2001. GeoGebra está escrito en Java y es básicamente un "procesador geométrico" y un "procesador algebraico", es decir, un

ISBN 978-84-945722-3-4

compendio de matemática con software interactivo que reúne geometría, álgebra y cálculo y por eso puede ser usado también en física, proyecciones comerciales, estimaciones de decisión estratégica y otras disciplinas. Su categoría más cercana es "software de geometría dinámica".

El presente Taller pretende dar una mirada de la matemática abordada desde las TIC, en diferentes áreas como el álgebra y el análisis matemático en una variable. Para ello se contarán experiencias, problemas abordados desde las TIC, para que los participantes desarrollen habilidades y competencias para innovar mediante el uso de las tecnologías de la información y la comunicación en su práctica, en su quehacer diario para desenvolverse en la sociedad actual del conocimiento. Promoviendo la producción de nuevos saberes para la enseñanza y el aprendizaje de éstas áreas, estimulando así a la reflexión sobre las prácticas docentes actuales, en los distintos niveles.
Se propone una metodología de enseñanza que combine diversas técnicas como: la instrucción directa, discusión y trabajo en equipo, reflexión personal y trabajo individual y grupal en ejercicios y actividades mediante el uso de software GeoGebra en las diferentes áreas. Como recursos los participantes deberán contar con Computador con acceso a internet.

Objetivos específicos

Identificaremos, y observaremos cómo se articulan los métodos algebraicos, gráficos en el proceso de resolución de problemas, en lapiz y papel y con GeoGebra.
Analizaremos las ventajas y desventajas de la aplicación de uno de los enfoques planteados y como se podrían integrar y articular al proceso de enseñanza y aprendizaje de los problemas planteados.
Identificar como ésta herramienta tecnológica favorece el trabajo colaborativo de los alumnos, como un ambiente más que favorable en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las diferentes áreas de la matemática.

Marco de Referencia.

Marco Teórico.

¿Qué es el software GeoGebra?

GeoGebra es un software libre que se utiliza para la educación en todos sus niveles desde su creación, se encuentra disponible en múltiples plataformas. Dicho software reúne dinámicamente, aritmética, geometría, álgebra y cálculo en un único conjunto tan sencillo a nivel operativo como potente. Ofrece representaciones diversas de los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas: vistas gráficas, algebraicas, estadísticas, etc.

El programa contiene una página principal, que se encuentra compuesta por:

Una Zona Gráfica, la Barra de Herramientas, un Campo de Entrada y la Ventana de Álgebra.

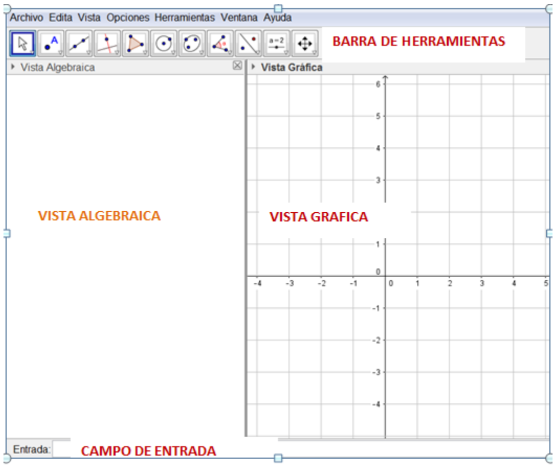


Figura 1

En las últimas versiones con **GeoGebra 5** podemos trabajar en ·3D; es así que podemos graficar con rectas y planos en el espacio, como así también con cualquier tipo de superficies.

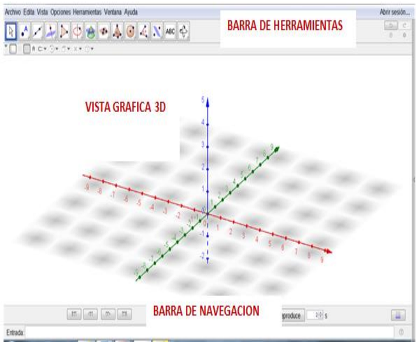


Figura 2

ISBN 978-84-945722-3-4

Estas dos perspectivas caracterizan a *GeoGebra*: una expresión en la ventana algebraica se corresponde con un objeto en la ventana geométrica y viceversa.

Las TICs en la enseñanza de la matemática.

No debemos olvidar que la mayoría de los docentes fuimos formados en una época cuando la tecnología estaba prácticamente ausente o recién comenzando a surgir. Se trata de un conocimiento profesional que se adquiere experimentando, llevando al aula distinta situaciones, analizando qué sucedió, ajustando y volviendo a probar. No requiere saberlo todo con anterioridad, sino que se aprende al mismo tiempo que se enseña. Como profesores, conocemos el "vértigo" que esto produce, pero también sabemos que es el único modo en que se construyen los conocimientos docentes. Se trata, entonces, de tomar toda la potencialidad que ofrece GeoGebra, para mejorar las condiciones de enseñanza y del aprendizaje de la Matemática.

Enfoque didáctico.

La enseñanza de la Matemática se ha configurado esencialmente desde un enfoque basado en la mecanización y repetición, que supone la transmisión directa del saber: el profesor enseña y los alumnos, supuestamente, aprenden, como una consecuencia directa. Desde esa perspectiva, resultan en general alumnos que son capaces de reproducir estrategias señaladas por el profesor, pero que encuentran grandes dificultades a la hora de decidir cómo resolver situaciones nuevas para ellos. El aprendizaje de una práctica que permita resolver verdaderos problemas queda en manos de los alumnos, y no todos lo hacen con éxito. Desde la perspectiva que adoptamos, entendemos que el objetivo es que los alumnos aprendan a hacer Matemática.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Encontrar el valor de una expresión algebraica simplemente consiste en reemplazar los valores de las variables en la expresión; en GeoGebra se utiliza la vista CAS y el comando

"Sustituye{expresión,a reemplazar, reemplazo}"

Ejemplo: Dada la expresión b^2-1, encontrar su valor para b=1.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

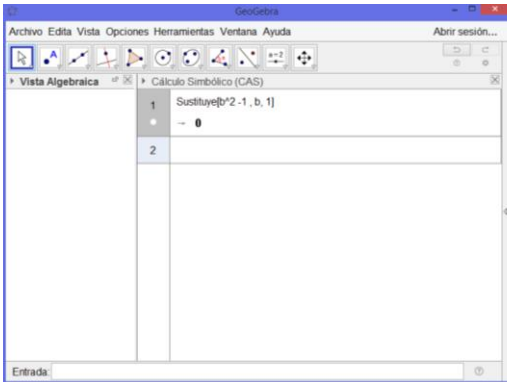


Figura 3

<u>Ejemplo</u>: Encontrar el valor numérico de la expresión a^3-b^3 para a=1 y b=3

En este caso, como hay que sustituir varias variables por valores numéricos, usamos el comando “Sustituir [Expresion, lista de reemplazos]”

Sustituye[a^3 – b^3 ,a=1,b=3]

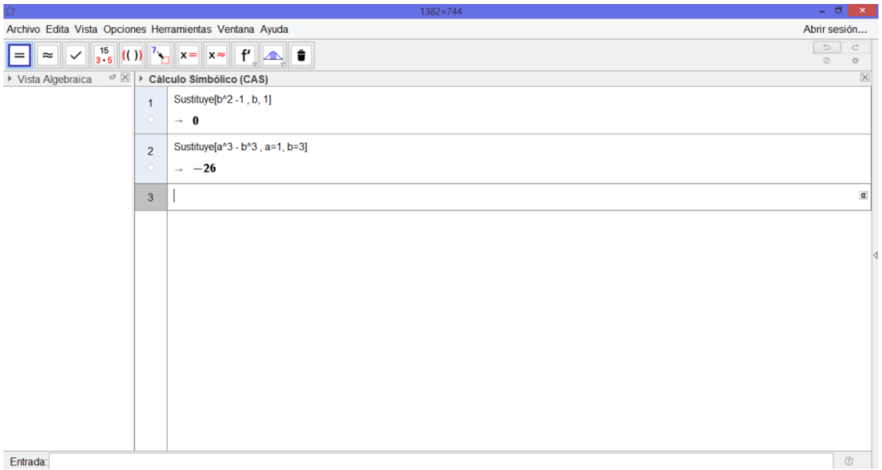


Figura 4

<u>Resolución de Ecuaciones</u>

Encontrar la solución de una ecuación, en una variable real con GeoGebra se realiza con el comando

“Solucion[Ecuacion]”

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Ejemplo: Encontrar la solución de x^2-4 utilizando GeoGebra.

Solucion[ecuacion, variable]

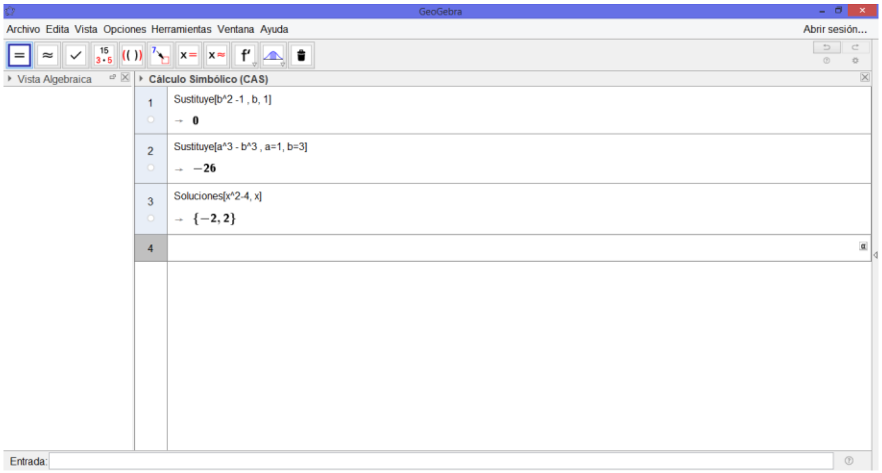


Figura 5

Resolución de Sistemas de Ecuaciones lineales

Así como en los casos anteriores de ecuaciones, para resolver un Sistema de Ecuaciones Lineales (SEL) vamos a utilizar el comando

"Solucion[lista de ecuaciones,lista de variables]"

Ejemplo: Encontrar las soluciones al sistema $\begin{cases} -x+8y+z=1 \\ 2x+3y+4z=2 \\ -2x+y+z=0 \end{cases}$

REFERENCIAS

Avila, P., *APLICACIONES DIDÁCTICAS DE LA TECNOLOGÍA*. Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa.

Cabero, J., (2007). *Tecnología Educativa*. Madrid. Ed. Mac Graw Hill.

Coll, C., Onrubia, J., Mauri, T., (2007). "Tecnología y prácticas pedagógicas: "Las Tics como instrumentos de mediación de la actividad conjunta de profesores y estudiantes". *Anuario de Psicología*, *38(3)*, 377- 400.

ISBN 978-84-945722-3-4

Cruz, D., Rivadeneira S., Vilanova G., Torres, M., Varas C., (2015). "Tecnología Educativa como herramienta para la innovación en la práctica docente". *XVII Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación*. RedUNci. Salta.

TORRES, Mariana G.; VARAS, Cristina V. Año: 2014. "*Dinamizando funciones con GeoGebra*". Mar del Plata. Editorial Martin. ISBN: 978-987-543-713-5.

T-1.275

DESIGN DE TAREFAS PARA AMBIENTES DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA ESCOLAR: UMA PERSPECTIVA MULTIDISCIPLINAR PARA AS AULAS DE MATEMÁTICA

Ivail Muniz Junior
ivailmuniz@gmail.com
Colégio Pedro II/ETEJLN/CSB - Brasil

Fernando Celso Villar Marinho
villarfernando@gmail.com
CAP/UFRJ - Brasil

Núcleo temático: III - Aspectos socioculturales de la Educación Matemática
Modalidad: T (20-25 participantes)
Nivel educativo: Medio o secundario/Terciario o Bachillerato.
Palabras clave: Tomada de decisão, Ambientes de Educação Financeira Escolar, Psicologia Econômica, Ensino e aprendizagem de matemática.

Resumo

O objetivo desse Taller é discutir o design de tarefas em ambientes de educação financeira escolar construídos para a sala de aula de matemática com foco na tomada de decisão. Serão distribuídas aos participantes várias situações financeiras reais veiculadas por meio da mídia, a partir das quais discutiremos os conceitos e ideais nelas apresentadas numa perspectiva multidisciplinar, culminando com a elaboração de tarefas pelos participantes a partir das discussões e de suas experiências. Aspectos da Matemática Financeira, Economia, Psicologia Econômica, Antropologia do Consumo e da Neurociência serão levantados nessa discussão com os participantes, integrando novos temas aos saberes docentes dos participantes. Discutiremos ainda alguns exemplos de investigações realizadas no Brasil, decorrentes de pesquisas acadêmicas e da experiência docente dos autores.

Introdução.

As transformações econômicas, sociais, demográficas, trabalhistas e ambientais, dentre outras, ocorridas nas últimas décadas do século XX e em especial no século XXI, juntamente com a influência da tecnologia digital móvel no acesso à informação e nas formas de comunicação global, têm ampliado o número de questões econômico-financeiras com as quais os cidadãos de diversos países têm lidado, dentre elas as relacionadas ao planejamento,

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

endividamento, consumo, renda, financiamentos, seguros e previdência (OCDE, 2005; Mandell 2008; Saito, 2008; Lusardi & Mitchel, 2010; Arthur, 2012; Aprea et al, 2016).

Diante dessa demanda do aumento da capacidade de lidar com o dinheiro, diversas iniciativas têm surgido para se educar financeiramente a população, geralmente restritas à esfera governamental ou por meio de instituições financeiras, impulsionadas pela Organização para Cooperação do Desenvolvimento Econômico (OCDE) através de seu *Financial Education Project* (2005), conforme apontam (OCDE, 2005; Xiao, 2008; Fox & Bartholome 2008; Saito, 2008; Atkinson & Messy, 2012; Britto, 2012; Hofmann, 2013; Brasil, 2014; Muniz, 2016a).

Dentre essas variadas iniciativas, estão as que se voltam para crianças e jovens estudantes da Educação Básica. É nesse contexto que se insere a Educação Financeira Escolar (EFE) que defendemos. Nessa concepção, baseada em Muniz & Jurkiewicz (2013) e Muniz (2016a, 2016b), a EFE é um **convite à reflexão** sobre as atitudes e ações das pessoas diante de situações econômico financeiras (SEF) envolvendo aquisição, utilização e distribuição do dinheiro, tais como consumo, poupança, financiamentos, investimentos, seguros, previdência e doações, bem como as suas possíveis consequências no curto, médio e longo prazos, numa perspectiva individual, familiar e social, olhando tanto para oportunidades quanto para as armadilhas do mercado. Um convite que leve em consideração o contexto social e econômico dos estudantes, as características culturais e singularidades sociais da região em que vivem. Essa EFE também é, portanto, um convite à ação, avaliação e reação, num movimento dinâmico, plural e democrático.

Defendemos que esse tipo de Educação Financeira Escolar pode ser uma poderosa ferramenta na formação dos estudantes, principalmente quando olhamos para as potencialidades de compreensão do mundo; de produção de conhecimentos para resolver problemas; de criação de formas de atuação nos espaços produtivos; de desenvolvimento de competências de representação, comunicação, investigação, compreensão e contextualização sociocultural.

Neste Taller, discutiremos o design de tarefas para a criação de ambientes de educação financeira escolar (Muniz, 2016a), ou seja, para a criação de momentos, situações, aulas, e de uma forma geral, para um conjunto de interações entre estudantes, professores, pesquisadores e outros agentes educacionais em que essa Educação Financeira Escolar é posta em movimento, ou seja, que a interação entre tais agentes envolva a reflexão e a

ISBN 978-84-945722-3-4

produção de significados para as situações econômico financeiras que envolvam ideias matemáticas, mas que não se limitem a elas. Nessa ótica, os AEFE são formados por momentos em que se abrem portas e janelas para se convidar os alunos a pensarem sobre situações financeiras em uma perspectiva ampla, interativa e multidisciplinar, sendo as tarefas que discutiremos importantes e potenciais caminhos para a criação desses AEFE.

Objetivos

O objetivo desse Taller é discutir o design de tarefas para ambientes de educação financeira escolar construídos para a sala de aula de matemática com foco na tomada de decisão numa perspectiva multidisciplinar.

Temas como consumo, emprego, renda, planejamento financeiro, taxas de juros, cartão de crédito, financiamentos, inflação e poder de compra, previdência privada, dentre outros, serão analisados a partir de diferentes perspectivas, incluindo as da matemática financeira, da Economia, da Antropologia do Consumo, da Psicologia Econômica e da Neurociência. Discutiremos as potencialidades dessa visão multidisciplinar, na perspectiva de Muniz (2016a), para a compreensão de diversas situações financeiras, e consequentemente, para a elaboração das tarefas para a sala de aula, levando em consideração, inclusive, o amplo espectro de perfis dos estudantes das diferentes regiões do país. Um tempo será destinado ao design de tarefas voltados para a tomada de decisão em situações financeiras.

Discutiremos ainda significados matemáticos e não matemáticos produzidos pelos estudantes para algumas dessas tarefas, e como essa produção se articula com a nossa prática docente no Ensino Médio nos últimos 18 anos. Por fim, veremos como diferentes contextos econômicos e financeiros podem ampliar a importância do ensino de matemática na abordagem de situações financeiras na Escola.

Dinâmica do Minicurso

O encontro será dividido em duas partes. Na primeira partiremos de algumas situações financeiras e as analisaremos sobre diferentes perspectivas, para em seguida mostrar exemplos de tarefas que temos desenhado e aplicado em diferentes salas de aula, a partir dessa visão multidisciplinar, com alunos de Ensino Fundamental e Médio das redes estadual, federal e particular de ensino do Rio de Janeiro, Brasil.

ISBN 978-84-945722-3-4

Na segunda parte vamos sugerir algumas situações e os participantes serão convidados a elaborarem suas próprias tarefas, a partir de uma das situações apresentadas (ou alguma outra de sua própria escolha) visando um determinado grupo de alunos definido pelo docente. Assim, os docentes terão oportunidades de pensarem essas perspectivas e, além disso, elaborar tarefas que poderão ser usadas em suas práticas docentes.

Sobre o Design das tarefas.

Nossa perspectiva para tarefa é de ferramenta de mediação para o ensino e aprendizagem, sendo qualquer coisa que um professor ou pesquisador usa para demonstrar e ou construir interativamente ideias, predominantemente (mas não exclusivamente) matemáticas, assim como para pedir aos alunos para fazerem algo (Watson et al, 2013). Para esse Taller, a tarefa é uma ferramenta de mediação composta de uma situação econômico financeira a partir da qual são realizadas uma série de perguntas que convidam os estudantes a analisarem as SEF que envolvam predominantemente a tomada de decisão sob diversos aspectos, dentre eles os aspectos matemáticos, financeiros, econômicos, sociais e culturais, e de uma forma mais geral, os aspectos comportamentais.

Nessa ótica, o design de tarefas envolve um conjunto de objetivos, dentre os quais gostaríamos de listar os seguintes:

1) convidar os participantes e/ou estudantes a produzirem significados matemáticos e não matemáticos na análise de situações econômico financeiras ou no processo de tomada de decisão;
2) apresentar situações econômico-financeiras em que noções e ideias matemáticas desenvolvidas na escola básica podem auxiliar na análise e tomada de decisão de problemas que nos rodeiam;
3) permitir que seja possível resolver problemas de mais de uma maneira para gerar um diálogo, que conduza à conexão de formas diferentes de pensar (Arcavi, 2000, p.85);
4) oferecer oportunidades para que os participantes e/ou estudantes apresentem outros aspectos, além dos matemáticos e financeiros, que foram (ou seriam) levados em consideração na análise das situações apresentadas;

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

5) apresentar variações de cenários, convidando a uma análise de sensibilidade que ajudasse a entender o impacto de uma determinada variável no comportamento outra variável, mantendo-se todas as demais fixas;
6) engajar os participantes e/ou estudantes a refletir sobre a relação entre o que as pessoas deveriam fazer (sob o ponto de vista da maximização do retorno ou da minimização dos gastos, por exemplo) e o que de fato fazem diante de tais situações.

Apresentaremos em seguida três exemplos de um conjunto de tarefas que apresentaremos no minicurso. A figura 1 apresenta uma dessas tarefas, envolvendo uma tomada de decisão sobre o valor de quitação de um financiamento baseado em um fato ocorrido com o autor desse texto.

Figura 1: Tarefa envolvendo a antecipação da quitação de um financiamento

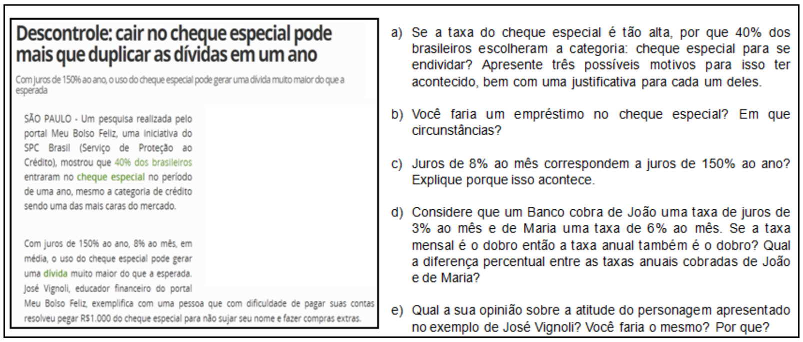
> Paulo comprou um carro financiado, dando uma entrada, e o restante em 24 prestações de 2 000 reais, a uma taxa de juros de 1,5% ao mês. Ele já pagou 20 prestações e deseja quitar a dívida em 10 de Maio de 2015, antecipando o pagamento das 4 prestações restantes que vencem em daqui a 1, 2, 3 e 4 meses respectivamente. Ao entrar em contato com a instituição que concedeu o financiamento, Paulo é informado que o valor de quitação, para 10 de Maio, é de 7.880 reais.
>
> **Paulo deve aceitar a proposta oferecida?**
> (Apresente seus argumentos para justificar a decisão que você entende que deveria ser tomada)

Fonte: elaborado pelos autores.

Nessa tarefa, além do uso de conceitos matemáticos e financeiros, o participante será convidado a tomar uma decisão baseado na proposta de quitação da instituição financeira. Seria a proposta apresentada justa? Como avaliar isso? Que aspectos podem ser levados em consideração na análise? Que aspectos as pessoas levam de fato? Estudantes de diferentes regiões do país tomariam a mesma decisão? Como os seus estudantes lidariam com tais questões? Que processos psicológicos estão envolvidos no financiamento e na antecipação de um financiamento? Que estratégias as instituições financeiras utilizam com os clientes nesse perfil? Essas são apenas algumas das perguntas que serão levantadas no minicurso.
Na figura 2, temos outra tarefa, desenhada a partir de uma situação econômica real brasileira, extraída de matéria em um portal na Internet, que vai explorar o impacto das taxas de juros no custo dos empréstimos e as suas consequências no nível de endividamento da população.

ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 2: Tarefa sobre o impacto das taxas de juros no custo de um financiamento



Descontrole: cair no cheque especial pode mais que duplicar as dívidas em um ano

Com juros de 150% ao ano, o uso do cheque especial pode gerar uma dívida muito maior do que a esperada

SÃO PAULO - Um pesquisa realizada pelo portal Meu Bolso Feliz, uma iniciativa do SPC Brasil (Serviço de Proteção ao Crédito), mostrou que 40% dos brasileiros entraram no cheque especial no período de uma ano, mesmo a categoria de crédito sendo uma das mais caras do mercado.

Com juros de 150% ao ano, 8% ao mês, em média, o uso do cheque especial pode gerar uma dívida muito maior do que a esperada. José Vignoli, educador financeiro do portal Meu Bolso Feliz, exemplifica com uma pessoa que com dificuldade de pagar suas contas resolveu pegar R$1.000 do cheque especial para não sujar seu nome e fazer compras extras.

a) Se a taxa do cheque especial é tão alta, por que 40% dos brasileiros escolheram a categoria: cheque especial para se endividar? Apresente três possíveis motivos para isso ter acontecido, bem com uma justificativa para cada um deles.

b) Você faria um empréstimo no cheque especial? Em que circunstâncias?

c) Juros de 8% ao mês correspondem a juros de 150% ao ano? Explique porque isso acontece.

d) Considere que um Banco cobra de João uma taxa de juros de 3% ao mês e de Maria uma taxa de 6% ao mês. Se a taxa mensal é o dobro então a taxa anual também é o dobro? Qual a diferença percentual entre as taxas anuais cobradas de João e de Maria?

e) Qual a sua opinião sobre a atitude do personagem apresentado no exemplo de José Vignoli? Você faria o mesmo? Por que?

Fonte – Muniz (2013, p.8)

Nessa tarefa discutiremos diferentes modalidades de crédito praticadas no mercado, a partir dos dados do Banco Central sobre as taxas de juros praticadas. Por que o cartão de crédito é tão usado? Quais são os perigos? Quais as alternativas ao financiamento de uma dívida no cartão de crédito? Todos têm acesso a essas alternativas? Comprar à vista é sempre melhor? Como e quando usar a taxa mínima de atratividade disponível ao comprador? Essas são algumas questões que serão levantadas no minicurso.

Na figura 3, temos uma terceira tarefa, que visa convidar os participantes a pensarem sobre alguns mecanismos psicológicos que nosso cérebro costuma usar, tais como aversão a perdas, e associação de custos a benefícios conforme apontam pesquisadores em psicologia cognitiva e economia comportamental, tais como Kahneman (2011), Ferreira (2008) e Nofsinger (2006).

Figura 3: Tarefa envolvendo aspectos comportamentais na tomada de decisão.

ISBN 978-84-945722-3-4

Uma pessoa tem planos de, daqui a seis meses, passar uma semana de férias em Porto de Galinhas. Isso custará 6.000 reais. A pessoa tem duas opções de pagamento: Opção I – seis prestações mensais e iguais de 1.000 reais, durante os seis meses que antecedem as férias. Opção II – seis prestações mensais e iguais de 1.000 reais, durante seis meses, após a volta das férias. **Considerando um cenário sem inflação, qual das duas opções você escolheria? Justifique sua resposta**. **E com inflação média ocorrida no Brasil em 2014-2015?**
Uma pessoa planeja comprar, dentro de seis meses, um fogão, uma geladeira e alguns eletrodomésticos para a casa nova. Juntos eles custarão 6.000 reais. A pessoa tem duas opções de pagamento: Opção I – seis prestações mensais e iguais de 1.000 reais, durante os seis meses que antecedem a chegada dos eletrodomésticos. Opção II – seis prestações mensais e iguais de 1.000 reais, durante seis meses, a começar após a entrega. **Considerando um cenário sem inflação, qual das duas opções você escolheria? Justifique sua**

Fonte: (Muniz, 2016a)

Férias pré-pagas são mais agradáveis do que as pós-pagas? Porque as pessoas preferem pagar os eletrodomésticos depois e as férias antes, se as situações são idênticas (do ponto de vista financeiro)? Qual a melhor decisão financeira? Ela realmente existe? Para quem? As pessoas pensam de forma exclusivamente racional nessas situações? O que as pessoas levam em consideração na hora de tomar decisões semelhantes? Como a psicologia econômica e neurociência têm explicado como as pessoas realmente tomam decisões? Como os estudantes pesquisados em nosso estudo tomaram as decisões e que argumentos emergiram de seus discursos que justificaram suas decisões? Essas são algumas questões que serão levantadas para essa tarefa, que foi desenhada, a partir de contextos reais, para levantar tais questões.

Considerações Finais

Nesse texto buscamos apresentar como se dará o minicurso de design de tarefas sobre educação financeira escolar, com foco na sala de aula de matemática. Nosso objetivo com o minicurso será trabalhar a elaboração das tarefas pelo professor de matemática numa perspectiva multidisciplinar, a qual pode auxiliar tanto a compreensão do papel e dos elementos presentes na abordagem de situações financeiras na escola básica, quanto na elaboração de tarefas que não apenas visem utilizar matemática para analisar situações

ISBN 978-84-945722-3-4

financeiras, mas que permitam outras explorações multidisciplinares que ampliem a visão e a compreensão da vida financeira e econômica dos cidadãos.

Referências

Aprea, C. et al. (2016). *International Handbook of Financial Literacy*. New York: Springer.

Arcavi, A.E. (2000). E em Matemática, Nós Que Ensinamos, o Que Construímos? Rio de Janeiro: *Boletim GEPEM*, vol 36, 83-102.

Arthur, C. (2012). Financial Literacy Education. Neoliberalism, the consumer and the Citizen. Education Futures: Rethinking Theory ant Pratice. Rotherdan: Sense Publishers.

Atkinson, A. and F. Messy (2012), "Measuring Financial Literacy: Results of the OECD / International Network on Financial Education (INFE) Pilot Study", *OECD Working Papers on Finance, Insurance and Private Pensions*, No. 15, OECD Publishing, Paris. http://dx.doi.org/10.1787/5k9csfs90fr4-en

BRASIL/COREMEC. Programa de Educação Financeira nas Escolas. Distrito Federal; 2014. Disponível em: http://www.edufinanceiranaescola.gov.br

Britto, R.R. (2012). **Educação Financeira:** Uma Pesquisa Documental Crítica. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), Juiz de Fora. Brasil.

Ferreira, V.R.M. (2008). *Psicologia Econômica: comportamento econômico e tomada de decisão*. Rio de Janeiro: Elsevier.

Fox, J.J. & Bartholone, S. (2008). *Financial Education and Program Evaluation*. In J.J. Xiao, (ed.), Handbook of Consumer Finance Research. pp. 47-68. New York: Springer.

Hofmann, R. M. (2013). Educação financeira no currículo escolar: Uma análise comparativa das iniciativas da Inglaterra e da França (Tese de Doutorado). Universidade Federal do Paraná, Curitiba – PR, Brasil.

Kahneman, D. (2011). *Fast and Slow. New York: Farrar, Straus and Giroux.*

Lusardi, A; Mitchell, Olivia (2010). *Financial Literacy among the Young: Evidence and Implications for Consumer Policy*. Journal of Consumer Affairs, 44(2), 358 – 380.

Mandell, L. (2008). *Financial Literacy of High School Students*. En Jing Jian Xiao (Ed.), Handbook of Consumer Finance Research. New York: Springer.

Muniz, I. Jr. (2016a). Econs ou Humanos? Um estudo sobre a tomada de decisão em Ambientes de Educação Financeira Escolar. Tese de Doutorado, UFRJ/COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil.

Muniz, I. Jr. (2016b). *Educação Financeira e a sala de aula de matemática: conexões entre a pesquisa acadêmica e a prática docente*. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática. 2016, São Paulo. Anais... ISSN 2178-034X. São Paulo, Brasil: XII ENEM, pp 1-12.

Muniz, I. Jr. & Jurkiewicz, S. (2015). *Uma investigação sobre a abordagem de situações financeiras envolvendo taxas de juros no Brasil em um curso pós-médio*. In: XIV Conferência Interamericana de Educacion Matemática. Tuxtla. Actas del XIV CIAEM, Tuxtla, México.

Muniz, I. Jr. & Jurkiewicz, S. (2013). Educação Econômico-Financeira: uma nova perspectiva para o Ensino Médio. In: VII Congresso Iberoamericano de educacion matematica: actas del VII CIBEM, Montevideo, Uruguai, 16-20 Set. 3125-3135.

Nofsinger, J. R. (2006). *A lógica do Mercado*. Como lucrar com finanças comportamentais. Rio de Janeiro: Fundamento.

OECD. Improving financial literacy: Analysisofissuesandpolicies. OECD. Disponível em http://www.browse.oecdbookshop.org/oecd/pdfs/product/ 2105101e.pdf. 2005

Saito, A.T. (2008). *Uma contribuição ao desenvolvimento da educação em finanças no Brasil*. Dissertação de Mestrado. FEA/USP. São Paulo, Brasil.

Watson, a; Ohtani, M.; Ainley, J.; Frant, J.B; Doorman; Margolinas, C.; Peter; s.; Yang; y.(2013). *Introduction In Task Design in Mathematics Education*. Procedings of ICMI Study 22. Vol 1. Oxford.

Xiao, J.J. (2008). Handbook of Consumer Finance Research. New York: Springer.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-1.276

ANIMALARIO

Mª Aurora Cuadra González – Margarita E. Martínez Barbero
profesoraau@gmail.com – magarqui@gmail.com
IES Manuel Cañadas, Moraleda de Zafayona, Granada, España

Núcleo temático: **IV. Matemáticas y su integración con otras áreas.**
Modalidad: **T**
Nivel educativo: **Medio o Secundario (12 a 15 años)**
Palabras clave: **Creatividad, Arquitectura, Aprendizaje Basado en Proyectos, Aprendizaje Cooperativo.**

Resumen

A partir de la voluntad de hacer del Centro un mejor lugar de experimentación con el mundo para posibilitar el desarrollo pleno y holístico del ser humano, se recurre al proyecto de arquitectura, sustentado en los métodos de Aprendizaje Cooperativo y Aprendizaje Basado en Proyectos, como recurso educativo.

Un proyecto de arquitectura resulta de procesos conscientes que doman las pasiones dejándolas aflorar de forma ordenada, mediante un riguroso proceso de selección de referencias y de abstracción.

Se propone a los alumnos el diseño y la construcción de un ***Animalario****: un espacio constituido por un conjunto de piezas de mobiliario urbano con elementos de reciclaje, respondiendo a una lista de deseos elaborada por ellos mismos con la guía del docente. Los conocimientos necesarios para elaborarlo se adquieren transversalmente a su desarrollo convirtiéndose las Matemáticas en el eje vertebrador.*

Lo que nos interesa es incitar la motivación del alumnado de forma que domestiquen el espacio y se comprometan con el proyecto; que cada experiencia pase a engrosar el conjunto de objetos que componen el ***Animalario*** *año tras año, instaurando de esa forma una tradición cultural en el Centro quedando siempre patente el proceso.*

ISBN 978-84-945722-3-4

Introducción y justificación

Con el *Animalario* se quiere demostrar que el esfuerzo del docente por impartir una formación multidisciplinar podría influir muy positivamente en la docencia de las matemáticas y cómo se podría partir de un planteamiento más profundo para impartir los contenidos, intentando siempre relacionar cualquiera de ellos con el desarrollo pleno del individuo, priorizando el desarrollo de la capacidad creativa de los alumnos mediante la introducción de estrategias y herramientas que la potencien.

Si vinculamos la idea de la *Razón poética* de María Zambrano que relaciona la razón matemática con la creatividad artística, ambas orientadas a la acción, convertirían a la Matemática en una herramienta esencial para la sublimación de la creatividad. *El ser que descubre es un ser creativo*.

El ***Animalario*** es un proyecto cuya metodología se nutre fundamentalmente, entre otras muchas fuentes, de tres modelos teóricos educacionales.

1. **Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP)**

El método parece surgir, curiosamente, en las escuelas de arquitectura europeas durante la Revolución Industrial.

2. **Aprendizaje Cooperativo**

Uno de los puntos importantes en los que se ha basado la puesta en práctica del AC de este proyecto han sido las conclusiones del estudio realizado por el gigante *Google* en busca del equipo de trabajo perfecto. No se encontraron rasgos mesurables comunes a los equipos más exitosos, únicamente la *igualdad en la distribución de turnos de conversación* y *la sensibilidad social promedio*, que pueden definirse mediante el término *seguridad psicológica* (Duhigg, 2016).

3. **Proyecto de Arquitectura**

Desde que nacemos, la arquitectura se convierte en una de las principales herramientas de acercamiento al espacio y su geometría, ya que forma parte de nuestra vida cotidiana y su gran escala con respecto a los demás objetos que nos rodean. La finalidad del profesor del Taller de Proyectos de una Escuela de Arquitectura es que el arquitecto egresado

ISBN 978-84-945722-3-4

tenga interiorizado a su propio profesor, es decir, ha de saber qué preguntas formularse constantemente para poner en marcha de una forma coherente y ordenada el mecanismo de la creatividad. El presente proyecto se sustenta, pues, sobre la estructura de estos talleres.

Objetivos

La finalidad del proyecto ha sido conseguir que los alumnos asimilen las matemáticas con mayor naturalidad, relacionándola con campos mucho más porosos y permeables a la mentalidad del adolescente como el dibujo, la música, el espacio físico o el juego. Con este proyecto de ***Animalario*** se pretende:

- Poner en práctica el ABP.
- Poner en práctica el AC.
- Contribuir positivamente al aumento de la autoestima de los estudiantes.
- Fomentar la transversalidad de todas las disciplinas.
- Fomentar la igualdad, la tolerancia y la cultura.
- Incentivar la creatividad y la iniciativa.

Diseño de la investigación y metodología

El término ***Animalario*** se utiliza para darle nombre a este proyecto por el libro *Animalario Universal del Profesor Revillod* (Revillod et al., 2003), en el que se ilustran una serie de anatomías de animales posibles a partir de la unión de tres piezas independientes correspondientes respectivamente a la cabeza, el tronco y el trasero de varios animales.

Se trata, pues, de realizar un *Taller de Proyectos de Arquitectura* con los alumnos del Centro. Aprovechando los conocimientos que se imparten en cada asignatura, se propone a los alumnos el diseño y la construcción de un ***Animalario***, entendiéndose éste como un conjunto de objetos de mobiliario urbano que nace a partir de una lista de necesidades y usos posibles que los alumnos elaboran en Estadística, Economía, o Informática. La elección de los materiales de construcción -todos ellos procedentes del reciclaje- se hace en las asignaturas de Tecnología, Educación Plástica, Visual y Audiovisual o Ciencias Naturales. Su diseño y armonía espacial, así como la elaboración de las instrucciones de montaje en Geometría y Análisis, Educación Plástica Visual y Audiovisual o TIC. El estudio del

ISBN 978-84-945722-3-4

presupuesto en Álgebra y Economía, y las herramientas necesarias para su construcción, en Tecnología. Finalmente se materializa el mejor de los objetos propuestos en cada aula y se le dota de un nombre propio desde las asignaturas de Lengua Castellana, Lenguas Extranjeras o Latín. Posteriormente, se diseña la gestión del espacio generado y la difusión del proyecto en TIC y Lenguas Extranjeras.

1ª Fase: Sensibilización y concienciación

Previamente se ha de concienciar a los alumnos sobre la necesidad de mejora de un espacio concreto del Centro como, por ejemplo, el patio. Los días previos a la charla de presentación del proyecto, se exponen varios reclamos ó llamadas (Anexo I). Cada día se colocan varias de ellas repartidas por el Centro. La charla-presentación (Anexo II) ***Animalario*** ha de enfocarse al 2º nivel de E.S.O. En ella se dejan claras las partes que tienen los procesos de construcción, explicando lo que significa el cuadro de necesidades para puntualizar sobre los procesos de reflexión, pensamiento, cálculo y ver qué materiales se pueden utilizar para así conseguir que el trabajo cumpla finalmente su función. Después de la conferencia se introduce el ***Animalario*** para que los alumnos imaginen ya proyectos posibles, con rigor y precisión matemática, y así domesticar el espacio del Centro elegido. Se les puede mostrar además este vídeo del colectivo Basurama. La Aventura del Saber:

http://www.rtve.es/alacarta/videos/la-aventura-del-saber/aventura-del-saber-basurama/2019944/

Se les propone que en una semana elaboren una lista de materiales posibles de construcción, un listado puramente instrumental de los desechos que puedan servir como material de construcción por su resistencia a la intemperie, su fuerza o su gran tamaño como neumáticos, pallets, sombrillas, toneles, bovinas de madera gigantes de cableado, ruedas de bici, cajas de fruta, cuerdas, toldos viejos, mangueras, cubos... También se les pide que escriban un máximo de 3 deseos para el listado de necesidades del ***Animalario***, tales como sentarse, tomar el sol, columpiarse, relajarse o trepar.

2ª Fase: Recopilación de deseos

Con los deseos que los alumnos piden se hace una selección de 20 necesidades. Con esa lista, los alumnos de 4º E.S.O, en la asignatura TIC, confeccionan una encuesta on-line (Anexo III) que se sube a la web del Centro. En ella el alumnado ha de votar un máximo de

ISBN 978-84-945722-3-4

3 posibilidades. Para realizar posteriormente un estudio estadístico, se fijan unos campos obligatorios: nombre, apellidos,... Todo el alumnado del instituto vota.

3ª Fase: Selección de los deseos y materialización

Los resultados de la encuesta son analizados en Matemáticas de 1º ESO, en el bloque de 'Estadística', durante 8 sesiones. Se entregan a los alumnos las respuestas, sin nombre y apellidos. Los alumnos se dividen en grupos de Aprendizaje Cooperativo:

GRUPO A de expertos:
1. Instituto completo.
2. Instituto completo, distinguiendo por sexos.

GRUPO B de expertos:
1. Por niveles: 1º E.S.O, 2º E.S.O, 3º E.S.O, 4º E.S.O
2. Por cursos: 1ºA, 1ºB, 2ºA, 3ºA, 3ºB, 4ºA, 4ºB

GRUPO C de expertos:
1. Alumnado de Matemáticas Académicas.
2. Alumnado de Matemáticas Aplicadas.

Cada grupo expone su análisis al resto trabajando el PLC (Proyecto Lingüístico de Centro) y la rúbrica de la exposición oral.

4ª Fase: Combinaciones de Animales

Con las ocho posibilidades más votadas, se estudia cuáles son los Animales que se van a diseñar para el ***Animalario***.

Por poner un ejemplo, en la experiencia llevada a cabo en el Centro donde nació el presente proyecto, dos de las opciones más votadas, *Escuchar música* y *Jugar al ping-pong*, pudieron materializarse sin necesidad de combinarlas con el resto, quedando 6 posibilidades para combinar los Animales, siendo el resultado en el ejemplo tomado el siguiente:

- ***Animal 1****: Mesas con asientos + Cubierta Sol + Tumbarse*
- ***Animal 2****: Laberinto + Espacios Íntimos*
- ***Animal 3****: Columpios Juveniles*
- ***Animal 4****: Mesas con asientos + Cubierta lluvia + Espacios Íntimos*

Esos cuatro animales, se reparten entre los grupos de 3º y 4º de E.S.O.

5ª Fase: Diseño de cada Animalario

ISBN 978-84-945722-3-4

La siguiente charla ha de estar enfocada esta vez en el diseño de los animales. Se les darán ejemplos de acciones y obras de artistas concretos. Los alumnos han de dividirse en grupos de AC mediante la técnica del *Jigsaw*, en el que cada Animal será asignado a un grupo que contará con uno o varios expertos en todas las materias posibles. Los alumnos rotarán por estos roles a fin de experimentarlos todos. Las materias en las que se centrarán los expertos serán:

1. Color y forma, apariencia física, equilibrio, elegancia y belleza.
2. Las necesidades del programa para ser materializadas con el rigor del diseño industrial.
3. Materiales de reciclaje, análisis de su cuidado o protección para la intemperie.
4. Construcción: Proceso, detalle constructivo, engranaje, tensiones, peso, estabilidad…

Durante dos semanas los alumnos trabajan en sus diseños, en asignaturas como Tecnología o Educación Plástica, Visual y Audiovisual. Podrán documentarse durante el proceso con referencias, a fin de obtener varios diseños para cada Animal elaborados por cada uno de los grupos de expertos, pudiendo elegir de entre cada uno de ellos el mejor para ser construido. Se les encargará a los de 2º de ESO la elaboración de un prototipo del Animal diseñado para que realicen en el Bloque de Geometría de Matemáticas.

Los objetivos que se pretenden alcanzar son:

- Lograr hacer varios manuales de instrucciones para construir los Animales.
- Investigar precios, materiales y diseño, a fin de ponerse de acuerdo para hacer un proyecto que los satisfaga a todos, igual que sucede en la vida real.
- Seguir el Método Científico hasta la materialización del proyecto (el diseño es geometría, la medición es análisis, el presupuesto es cálculo, el cuadro de necesidades así como la búsqueda de ofertas y tanteos para que el diseño se optimice económicamente, estadística y probabilidad, y la construcción es experimentación e iteración, ensayo y error).
- Motivar a los alumnos.

ISBN 978-84-945722-3-4

Al final de esta fase se evaluará en cada grupo la intervención de cada uno de los miembros del mismo, siguiendo una rúbrica de AC.

6ª Fase: Construcción del Animalario

Junto con el área de Tecnología, se comienza la construcción en clase del ***Animalario***, empezando por una charla. El instituto pone el taller, el espacio y las herramientas necesarias para llevarlo a cabo. En esta fase se construye la mejor pieza de cada Animal. El aula entera debe sentirse implicada como grupo. Para ello se establecen varios comités de expertos, practicando de nuevo la técnica del *Jigsaw*, que se encargará de asumir roles diversos para la puesta en obra del ***Animalario*.** Los comités de expertos establecidos son:

1. Comité de Materiales. Recopilación, abastecimiento y economía.

2. Comité del Diseño y el Color. Elaboración de modificados del diseño para su adaptación a las contingencias propias de la construcción. Supervisión formal y constructiva.

3. Comité de la construcción: Preparación y ensamblaje de piezas para la construcción de los Animales.

4. Comité de documentación y divulgación: Documentación mediante materiales audiovisuales y elaboración de un diario del proceso de gestación y construcción del ***Animalario***.

7ª Fase: Divulgación del Animalario

Lo recogido por los comités de documentación y divulgación se utilizará para dar salida en los medios de difusión al ***Animalario***. Todo ello desde las asignaturas de Lengua Castellana y Literatura, TIC o Lenguas Extranjeras. Por otra parte, en la asignatura de Lengua Castellana y Literatura o Latín se le dota de un nombre a cada Animal construido, a fin de establecer el mecanismo cultural de la tradición y hacerla durar en el tiempo.

8ª Fase: Reflexión final y debate

Después del desarrollo del ***Animalario*** y de la visualización del documental *Requiem for the American Dream: The 10 Principles of Concentration of Wealth & Power (2017)* por Noam Chomsky, se plantea como final del proyecto un debate sobre lo que ellos creen que el ***Animalario*** ha aportado de positivo a sus vidas. Aquí se pretende conseguir el objetivo de

ISBN 978-84-945722-3-4

*Aprender a Aprender***.** Por último se visualizará la divulgación del proyecto desde lo recogido por el Comité de Documentación y Divulgación durante el desarrollo del mismo y de los diarios de trabajo de los grupos. Todo ello en TIC.

Resultados y Conclusiones

En la experiencia llevada a cabo en el Centro donde nació el presente proyecto, se han conseguido gran parte de los objetivos que se pretendían. Se ha conseguido en primer lugar poner en práctica las teorías constructivistas que centran el aprendizaje en el alumno y no en el docente. En cuanto a la puesta en práctica de los Métodos de Trabajo Activo (MTA), por lo que respecta al AC resultó ser un éxito, siendo conscientes de que podría llevar a algún problema la realización de grupos con grandes heterogeneidades en cuanto a la formación o la disciplina.

Respecto a la puesta en práctica del ABP se piensa que no habría grandes problemas. Cabe destacar la gran acogida que tuvo, en la experiencia llevada a cabo, la propia idea del proyecto entre los miembros de la Comisión de Convivencia y en general, entre el alumnado y el profesorado.

En cuanto a la creatividad, se observa que la propia restricción en el presupuesto, en los materiales y en las herramientas contribuye a que los alumnos desarrollen más su pensamiento periférico y sean más propositivos, valientes y, en consecuencia, creativos, al afrontar el diseño del proyecto. A su vez, el Proyecto de Arquitectura, se ha notado ser un acierto como elección, pues aúna los esfuerzos intelectuales de gran parte de los departamentos didácticos del Centro.

Tras el estudio estadístico de la primera parte del proyecto, se observa que hay grandes diferencias en cuanto a deseos por parte de los alumnos/as en cuestiones de género. A medida que la edad avanza caen más en estereotipos y eso, se piensa, debería detectarse como un problema para poner en marcha un Plan de Acción a fin de que la situación no empeore. Parece conseguirse que los alumnos asimilan las matemáticas con mayor naturalidad, relacionándolas con un proyecto real y concreto en el que se ven implicados. Se ha observado además que el esfuerzo del docente por impartir una formación multidisciplinar, no especializada, influye muy positivamente en la docencia de las

ISBN 978-84-945722-3-4

matemáticas y cómo partiendo de un planteamiento holístico y centrado en la propia realidad para impartir los contenidos, intentando priorizar el desarrollo de la creatividad de los alumnos, se consiguen resultados más satisfactorios.

Se piensa además que el ***Animalario*** es una buena oportunidad para ayudar a que el Proyecto Educativo de Centro (PEC) se abra e implique a través del Plan de Convivencia (PC) a las familias.

Referencias bibliográficas

BARBER, M. & MOURSHED, M. (2008). "Cómo hicieron los sistemas educativos con mejor desempeño del mundo para alcanzar sus objetivos" O "El Informe Mckinsey". McKinsey & Company

DUHIGG, CH. (2016). "La búsqueda de Google del equipo perfecto". 16 de marzo de 2016. New York Times. Recuperado de: *https://www.nytimes.com/es/2016/03/16/la-busqueda-de-google-por-el-equipo-perfecto/*

JOHNSON, D.W. & JOHNSON, R.T. (1999). Making cooperative learning work, Theory Into Practice, 38:2, 67-73

KNOLL, M. (1997). The project method: Its vocational education origin and international development.

REVILLOD, MURUGARREN, M. & CASTÁN, J. S. (2003). Animalario universal del profesor Revillod. ED. Fondo de Cultura Económica.

ZAMBRANO, M. (2003). La razón en la sombra: antología crítica. Ed. Jesús Moreno Sanz. Ediciones Siruela.

BASURAMA. (septiembre 2013). La Aventura del saber.TVE a la carta. http://www.rtve.es/alacarta/videos/la-aventura-del-saber/aventura-del-saber-basurama/2019944/

CHOMSKY, N. (2017) Requiem for the American Dream: The 10 Principles of Concentration of Wealth & Power. Seven Stories Press.

Anexo I. Llamadas o Reclamos de la 1ª fase de sensibilización o concienciación

ISBN 978-84-945722-3-4

Fig. 13. Lunes 06/03/17 TIENE LOS DÍAS CONTADOS (elaboración propia, 2017)

ISBN 978-84-945722-3-4

Fig. 14. Martes 07/03/17 TIC, TAC, TIC, TAC... (elaboración propia, 2017)

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

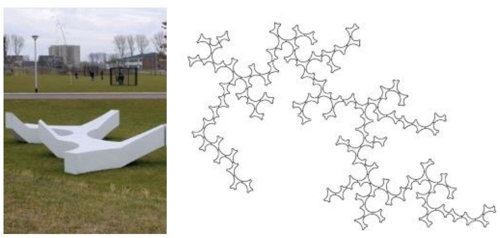
Fig. 15. Miércoles 08/03/17 DOMESTICA EL INSTITUTO!(elaboración propia, 2017)

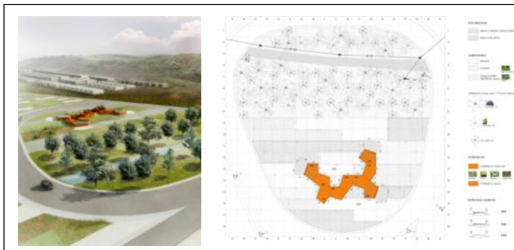
ISBN 978-84-945722-3-4

ANEXO II. Charla presentación de la 1ª Fase: Sensibilización y concienciación

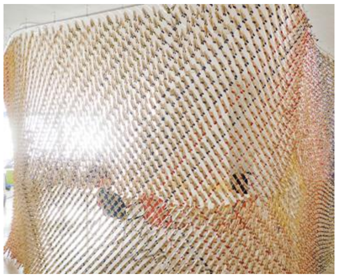
Se seleccionaron 7 proyectos, realizados por Margarita E. Martínez Barbero:

	***1.*** *Un capricho urbano o* ***FOLLY*** *en Gwangju, Corea del Sur, cuya geometría nace a partir del estudio del patrón de crecimiento de las copas de los árboles que ya habitan el lugar donde se encargará el proyecto.* *Fig. 16. Folly (estudio herreros, 2014)*

	***2. ISLERO:*** *Un banco encargado por la firma de mobiliario Escofet,* [*http://www.escofet.es/pages/productos/ficha_productos.aspx?IdP=60*](http://www.escofet.es/pages/productos/ficha_productos.aspx?IdP=60) *cuya geometría nace a partir de la búsqueda de relaciones entre varios arcos de cirfunferencia de radio los primeros 4 números primos.* *Fig. 17. Islero (Escofet, 2008)*

	***3.*** *Una escultura en una* ***ROTONDA*** *de la ciudad panameña de Colón, cuya geometría nace de la deconstrucción de un mosaico en el plano a partir de hexágonos y pentágonos irregulares. y cuyo volumen nace por la necesidad estructural de flotación por encontrarse sobre arenas movedizas* *Fig. 18. Escultura en Rotonda (estudio herreros, 2014)*

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

	***4.*** *Un biombo realizado con material de reciclaje,* ***TEDER****, (pinzas de la ropa en este caso) cuya forma, sistema constructivo y tamaño surgen de una necesidad estructural debido a la fuerza del soporte en el que se apoya (un falso techo de yeso).* *Fig. 19. Biombo TEDER (estudio herreros, 2014)*

	***5.*** *Una lámpara,* ***CATALAN_01,*** *nacida a partir de una complejización de uno de los sólidos de Catalan, el hexecontaedro pentagonal.* *Fig. 20. Lámpara CATALÁN 01 (elaboración propia, 2016)*

	***6. RETRATO*** *realizado a partir de la reducción a una matriz binaria de llenos y vacíos de las luces y sombras de un rostro, y materializado después como un bajorrelieve con alfileres clavados sobre un cartón pluma blanco.* *Fig. 21. Retrato de Álvaro Gallegos (elaboración propia, 2015)*

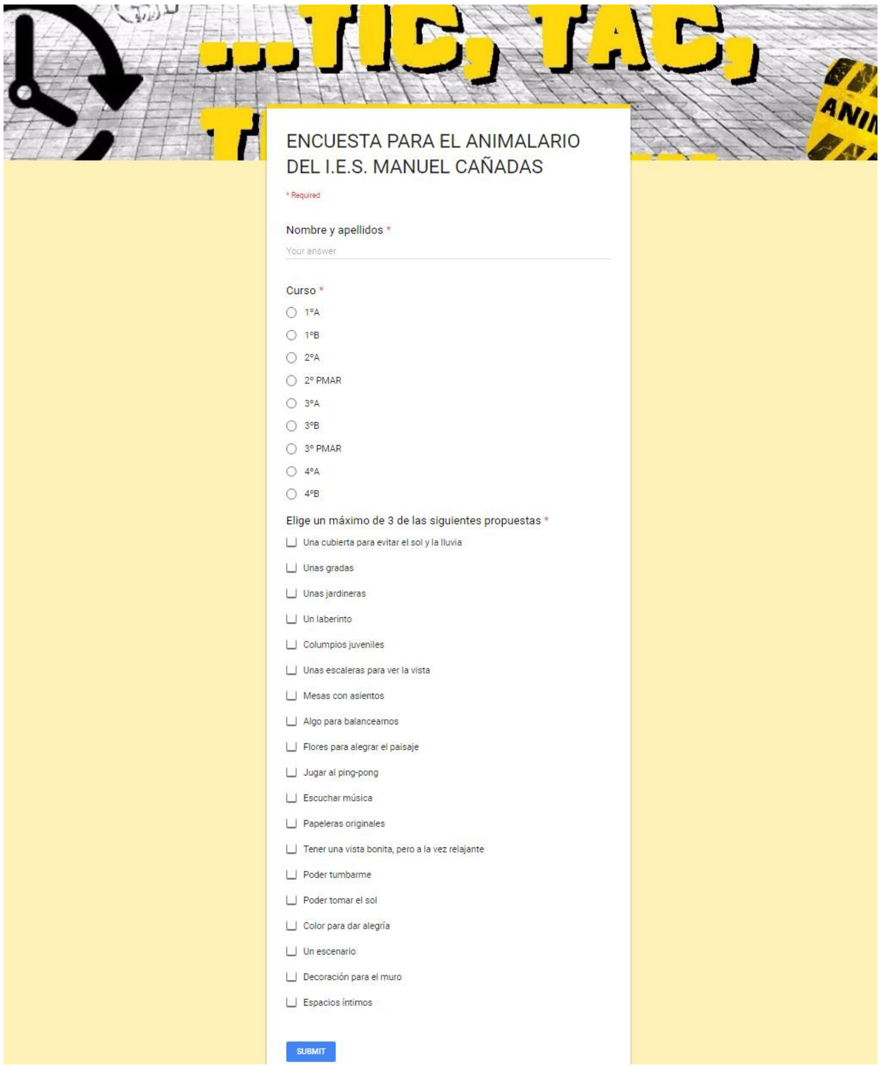
ISBN 978-84-945722-3-4

<table>
<tr>
<td></td>
<td>7. Una instalación TEJIDA con hilos que se dibuja a partir de la interpretación geométrica de cómo sería la vista que habría tras la pared dónde está realizada tomando como punto de vista el de mi propia persona sentada a la mitad del borde de la cama que hay en la habitación (geometría descriptiva, cónica de tres puntos de fuga).

Fig. 22. Instalación Tejida (elaboración propia, 2010)</td>
</tr>
</table>

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

ANEXO III. Encuesta online 2ª Fase: Recopilación de deseos.



...TIC, TAC,

ENCUESTA PARA EL ANIMALARIO DEL I.E.S. MANUEL CAÑADAS

* Required

Nombre y apellidos *

Your answer

Curso *

- 1ºA
- 1ºB
- 2ºA
- 2º PMAR
- 3ºA
- 3ºB
- 3º PMAR
- 4ºA
- 4ºB

Elige un máximo de 3 de las siguientes propuestas *

- Una cubierta para evitar el sol y la lluvia
- Unas gradas
- Unas jardineras
- Un laberinto
- Columpios juveniles
- Unas escaleras para ver la vista
- Mesas con asientos
- Algo para balancearnos
- Flores para alegrar el paisaje
- Jugar al ping-pong
- Escuchar música
- Papeleras originales
- Tener una vista bonita, pero a la vez relajante
- Poder tumbarme
- Poder tomar el sol
- Color para dar alegría
- Un escenario
- Decoración para el muro
- Espacios íntimos

SUBMIT

ISBN 978-84-945722-3-4

T-1.333

ROLE-PLAYS EN CLASE DE MATEMÁTICAS

Aubanell Pou, Anton - Belmonte Palmero, Sergi - Bosch Camós, Anna - de la Fuente Pérez, Abraham - Fernández Hernández, Raül - Font González, Jordi - Lopez Serentill, Paula - Margelí Voelp, Sílvia - Martínez Pascual, Manel - Massich Vall, Francesc - Miró Manasanch, Laia - Mora Cañellas, Lluís - Morera Úbeda, Laura - Muria Maldonado, Sergi
gdfmub@gmail.com
Grupo de didáctica de la Facultad de Matemáticas y Informática de la UB (Barcelona)

Núcleo temático: V. Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Modalidad: T
Nivel educativo: Medio o Secundario
Palabras clave: Recursos, actividades, role-play

Resumen

El uso de recursos didácticos en clase de matemáticas es una manera magnífica de ayudar a los alumnos a entender los conceptos y procedimientos del currículum matemático.
Hay diferentes tipos de recursos, dos de los más extendidos son los manipulativos y los TAC. Nosotros proponemos también el uso de unos materiales muy especiales como son los propios alumnos y profesores, que se convierten en recursos adoptando el papel de entes matemáticos y comportándose con coherencia en este rol.
Se trata así de realizar simulaciones de hechos que pasan en el mundo de las matemáticas de manera que "seres matemáticos" como números, puntos, funciones... son representados por los propios alumnos.
Los role-plays son unas de las actividades docentes en que, de una forma más clara, se pone de manifiesto la construcción colectiva de un nuevo conocimiento, armonizando acciones individuales en una representación conjunta de la cual emergerán ideas relevantes desde el punto de vista didáctico.
En el taller os animaremos a participar en role-plays adecuados para diferentes niveles y que plantean diferentes dinámicas. Se trata de visitar un territorio muy poco explorado desde el punto de vista de la educación matemática, y a la vez lleno de bonitas posibilidades.

Introducción

El grupo de profesores que presentamos este taller compartimos el convencimiento que es necesaria una mayor presencia de actividades de experimentación en las clases de matemáticas. Entre estas actividades los role-plays son un tipo de experiencias especialmente vivenciales, que tienen una enorme capacidad de motivación y una gran cantidad de posibles usos docentes. En general se entiende por "role-play" una actividad en la cual los

ISBN 978-84-945722-3-4

participantes asumen un papel y actúan según unas reglas coherentes con él. Nosotros nos centraremos en role-plays donde los alumnos representan entes matemáticos y, a través de su posición, de su relación o de su acción, dan vida, realidad dinámica, a situaciones matemáticas de las que emergerán ideas relevantes desde el punto de vista didáctico. Se trata pues de realizar simulaciones de hechos que ocurren en el territorio de las matemáticas haciendo el papel de seres matemáticos como números, puntos, funciones...

Aunque en el marco educativo parece consagrada la expresión role-play, no está admitida por el diccionario de la lengua española. Hemos valorado la posibilidad de emplear términos alternativos como “representación”, “dramatización”, “escenificación”, “teatralización”, “actuación”… sin embargo no nos parece que se ajusten adecuadamente al tipo de actividades a las que nos referimos y hemos optado por usar la expresión “role-play”. En todo caso quisiéramos aclarar que no nos referimos a los llamados juegos de rol ni tampoco a teatralizaciones biográficas o históricas en general.

Iniciaremos esta descripción de nuestro taller aportando algunas consideraciones generales sobre el uso de role-plays en educación matemática. Después presentaremos un conjunto de role-plays (que en el taller se realizan con la participación de los asistentes) y analizaremos su contenido matemático. Acabaremos con unas reflexiones finales a modo de conclusiones.

Consideraciones generales sobre el uso de role-plays en educación matemática

Los role-plays son un tipo de actividades didácticas especialmente eficaces para promover la motivación e implicación de los alumnos y, en consecuencia, para el aprendizaje. En los role-plays que presentamos los participantes asumen el papel de objetos matemáticos y actúan según las reglas con que estos objetos se relacionan. Al “entrar en sus personajes” los alumnos se familiarizan con las ideas matemáticas a las que dan vida como parte natural del soporte argumental de la actividad. Es importante que, de entrada, queden muy claras las identidades y las reglas de actuación de cada participante. En este sentido el docente tendrá que tener un especial cuidado en dar instrucciones precisas y fáciles de ejecutar, así como en dar tiempo a los alumnos para que interioricen “su nueva identidad”.

El movimiento físico que requieren los role-plays y la interacción que se establece entre los participantes es un elemento de motivación. Ambos factores hacen que el alumno tenga un papel muy activo en la experiencia y que las ideas que se ponen en juego se interioricen más

ISBN 978-84-945722-3-4

fácilmente. En algunos casos participará todo el alumnado, en otras algunos alumnos serán espectadores, sin embargo, este tipo de actividades son muy inclusivas. Nadie queda excluido de una experiencia vivida de manera directa, aunque las interpretaciones posteriores de cada participante puedan ser más o menos ricas desde el punto de vista matemático.

La relativa espectacularidad de un role-play no debería aislarlo del resto de las actividades de clase. Ha de estar bien enlazado con el desarrollo habitual del curso y aparecer de forma natural sin dar, de ninguna manera, la impresión de ser un añadido artificial de dudosa relación con los temas tratados.

Después de todo role-play (como después de cualquier actividad de experimentación) es necesario dedicar un tiempo a poner palabras a las ideas, compartirlas con el grupo, perfilar conceptos y, si es necesario, formalizarlos. Para los alumnos se puede comparar este proceso con el de elaboración de una crónica periodística después de un evento deportivo. Pueden hacer pequeños escritos de unas pocas líneas en la libreta y compartirlos, mejorando el redactado. Quizás otros alumnos habrán hecho alguna fotografía (¡Los reportajes gráficos son bienvenidos!). Esta fase de conceptuación es clave para recoger, aclarar y enriquecer las ideas trabajadas, así como para dejar un testimonio escrito o gráfico que ayude a recordarlas. A veces estas narraciones serán estrictamente descriptivas de las acciones que se han llevado a cabo, pero es deseable que también dejen constancia de las ideas que se han puesto en juego y de los "descubrimientos" realizados.

A continuación, se presenta una pequeña muestra de role-plays que tratan temas matemáticos diversos, que corresponden a varios niveles educativos y que plantean diferentes dinámicas.

1. **Role-play de coordenadas**

En primer lugar, situamos a los alumnos, sentados en sillas, formando una cuadrícula de 5x5 o de 6x6. Después les ponemos condiciones diversas del tipo:"Que se pongan de pie todos los que hayan nacido en un día par"… Ante estas condiciones unos permanecerán sentados y otros se pondrán de pie formando un "dibujo" normalmente muy "irregular", hecho que será importante posteriormente para contrastarlo con los resultados "regulares" de las condiciones matemáticas.

ISBN 978-84-945722-3-4

A continuación, les propondremos que "adquieran" un nuevo papel: el de puntos en el plano. Así pues, asignamos la primera coordenada de cada punto, columna a columna, del 0 al 4 o al 5. Luego asignamos, fila a fila, la segunda coordenada a cada alumno, del 0 al 4 o al 5.

Ahora empezará la dinámica imponiendo condiciones, de diversos tipos, sobre las coordenadas y pidiendo que los alumnos que las cumplan se pongan de pie: "Que se pongan de pie aquellos alumnos-puntos cuyas coordenadas sumen 8", "Que se pongan de pie aquellos alumnos-puntos cuyas dos coordenadas sean iguales"… Pronto se evidenciará la conveniencia de escribir las condiciones en la pizarra, será una buena oportunidad para pasar de los enunciados verbales al lenguaje algebraico: $x + y = 8,\ x = x = y, x - y = 2$… Ante la irregularidad de los resultados de las primeras condiciones, será interesante hacer notar que, a partir de estas condiciones "lineales", se obtienen rectas. Después pasaremos a los sistemas de ecuaciones lineales. Por ejemplo:

$$\begin{cases} \mathrm{x} + \mathrm{y} = 8 \\ \mathrm{x} - \mathrm{y} = 0 \end{cases}$$

Los alumnos descubrirán la solución como intersección de dos rectas. A continuación, pasaremos a las inecuaciones proponiendo sucesivamente que se pongan de pie los alumnos que cumplan: $x + y > 8,\ \ x + y < 8,\ \ x + y \geq 8,\ \ x + y \leq 8$… Al final el role-play se convierte en una especie de coreografía. Con frecuencia acabamos esta actividad con la frase "¿Os dais cuenta que estáis bailando al son que toca el álgebra?". Una pregunta retórica, pero con un trasfondo muy relevante.

En el tramo final de la actividad, representaremos sistemas de inecuaciones lineales y podemos acabar con la representación de sistemas más complejos como los que determinan la región admisible de los problemas de programación lineal.

Objetivos	Contenidos
• Entender la relación que existe entre la expresión analítica de una	• Interpretación gráfica de ecuaciones lineales con dos incógnitas, de sistemas de ecuaciones lineales con

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

condición algebraica y su representación gráfica en el plano. ● Distinguir los casos en que aparecen rectas y en que aparecen semiplanos. ● Descubrir que la representación gráfica de las soluciones de sistemas corresponde a las intersecciones de regiones.	dos incógnitas, de inecuaciones lineales con dos incógnitas y de sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas. ● Región admisible en programación lineal.

2. **Paseos aleatorios**

Para esta actividad se necesita un suelo embaldosado, unas escaleras anchas o simplemente dibujar en el suelo con tiza unas marcas equidistantes.

Todos los participantes se situarán uno al lado del otro alineados en una franja central y mirando hacia adelante.

Cuando se dé la señal cada uno lanzará al aire una moneda, mirará el resultado y esperará a que se indique que pueden moverse. Con la ayuda de un silbato, el director del juego les comunica que pueden efectuar su movimiento: Si les ha salido cara se mueven hasta la marca que tienen delante suyo o retroceden una en caso contrario.

Repetiremos este proceso tantas veces como creamos conveniente. Lo ideal sería que algunos de los participantes llegarán a los extremos de manera que queden distribuidos a lo largo del espacio asignado.

Una vez acabada esta fase se pide a los participantes que se desplacen lateralmente sin salirse de su franja hacia la derecha. Veremos así que se ha formado un histograma con la típica forma de la curva normal.

Objetivos	Contenidos
● Experimentar con procesos aleatorios. ● Trabajar el concepto de variable aleatoria. ● Descubrir como la suma de variables binomiales se puede aproximar a una variable aleatoria normal	● Distribuciones de probabilidad ● Procesos aleatorios ● Secuencias

3. **Funciones**

Para realizar el role-play de funciones se colocarán todos los alumnos repartidos equidistantemente formando una línea recta. Una vez colocados, se le asociará a cada alumno un valor entero de la variable independiente. Es preferible asociar el cero a un alumno del

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

centro de la línea i una vez colocado el cero, asociar los otros números según su posición en la recta numérica.

Una vez realizados todos los preparativos, uno de los participantes propone una función. Cada alumno, calcula la imagen de la función para el valor que él representa de la variable independiente y se desplaza perpendicularmente a la línea formada por las personas hasta llegar al valor de la imagen.

De este modo, todos los alumnos realizan un cálculo distinto y todos ellos son imprescindibles para que conjuntamente acaben generando la gráfica de la función elegida.

Objetivos	Contenidos
• Trabajar conceptos como la imagen o la antiimagen de un valor. • Percibir conceptos como la continuidad o los extremos relativos de una función.	• Representación de funciones. • Imagen y antiimagen. • Características de funciones.

4. **Descomposición factorial**

Esta actividad es ideal al comienzo del tema como introducción a conceptos que se explicarán. La actividad se desarrolla con la participación de todo el alumnado disponible en el aula. Los alumnos, en este caso, se convierten en elementos numéricos, y uno de ellos, será el encargado de escribir en la pizarra las conclusiones que se van extrayendo a cada paso.

Se empieza con el número 1. Para ello se saca un alumno y se le pregunta si es posible "formar" un rectángulo él solo. Le ayudamos en la respuesta ya que no la entenderá muy bien y le explicamos que él será un rectángulo 1x1. Hay que hacer notar que se considera el cuadrado como un caso particular de rectángulo.

Añadimos otro alumno. Ahora son dos y les pedimos que se sitúen formando un rectángulo, que en este caso será un rectángulo 1x2 (o 2x1 que será equivalente y para nosotros el mismo rectángulo). A continuación, se saca otro alumno más. Con tres alumnos solo pueden formar el rectángulo 1x3. Hasta aquí, los alumnos no acaban de entender qué están haciendo, pero a partir de ahora se comprenderá mejor.

Ahora ponemos un alumno más. Tenemos el número 4 (cuatro alumnos). Con este número se le dice que se dispongan en forma de rectángulo. Se tienen dos formas: 1x4 y 2x2. Es

ISBN 978-84-945722-3-4

interesante dejar que los alumnos debatan cómo colocarse sin la ayuda del profesor y que encuentren (en este caso fácilmente) las dos disposiciones.

Así se van sacando alumnos uno a uno para que se vayan disponiendo en forma de rectángulo para cada número. El alumno que está en la pizarra va escribiendo las dimensiones de los diferentes rectángulos conseguidos.

De esta manera se van obteniendo los divisores de cada número (que corresponden a los lados de los diferentes rectángulos que forman). Por ejemplo, con 12 alumnos, se pueden formar varios rectángulos: 1x12, 2x6, 3x4 y los equivalentes. Huelga decir que cuantos más alumnos en el aula, se puede llegar a más números; aunque lo realmente interesante es que deduzcan el "patrón" a seguir para formar los rectángulos posibles. Una vez que se han agotado los alumnos y han entendido la mecánica, se les devuelve a sus sitios y se les propone que realicen lo mismo en la libreta para otros números más grandes (por ejemplo, 36 ó 60).

Para finalizar la actividad, se revisa lo escrito en la pizarra para dar paso a la explicación y concreción de los conceptos aparecidos en la actividad.

Objetivos	Contenidos
• Entender de una manera muy visual el concepto de divisor de un número. • Descubrir un "patrón" para poder calcular todos los divisores de un número. • Comprender el concepto de número primo y visualizarlo. Aprender los primeros números primos. • Repasar de una manera práctica los diferentes criterios de divisibilidad. • Pasar a la generalización matemática para promover la utilidad de tener un método efectivo de descomposición factorial de números: T. Fundamental de la Aritmética.	• Divisores de un número. • Criterios de divisibilidad. • Números primos. • Descomposición factorial.

Reflexiones finales a modo de conclusiones

Todos los role-plays que hemos presentado ponen en juego ideas matemáticas importantes, de manera seria y rigurosa. Hemos evitado, de forma absolutamente consciente, las meras actividades de dinámica de grupos con un débil trasfondo matemático. Nos parece fundamental subrayar la indispensable necesidad de que los role-play que llevemos a clase sean robustos en sus contenidos matemáticos, pertinentes en el marco temático que se esté desarrollando y significativos desde el punto de vista educativo. Sólo así podremos evitar

ISBN 978-84-945722-3-4

que resulten simplemente una anécdota más o menos divertida y conseguir que aporten todo su fruto didáctico.

Ciertamente los role-play no son actividades muy comunes en las clases de matemáticas - quizás tampoco deben serlo - pero es importante que tengan una cierta presencia en nuestras aulas, por su enorme potencia docente, por la implicación personal de los alumnos, por su capacidad de motivación y porque son unas de las actividades escolares donde, de manera más clara, se pone de manifiesto la construcción colectiva de un nuevo conocimiento, armonizando acciones individuales en una representación conjunta que aporta valor añadido desde el punto de vista educativo.

Nos gustaría que este taller fuera una invitación a un mayor uso de este tipo de actividades en nuestras clases. Pueden implementarse los role-plays que se han presentado y se puede explorar y crear otros nuevos en torno a contenidos matemáticos diversos. Estamos seguros que, compartiendo ideas, también en este terreno, podremos enriquecer nuestra práctica docente y la educación matemática.

Referencias bibliográficas

Aubanell, A. (2016).Construint matemàtiques, Nosaltres com a recurs: role-plays a classe de matemàtiques (1). Noubiaix, Revista de la FEEMCAT i de la SCM, 39, 104-110.

De la Fuente, A. (2016). *Construcción del lenguaje algebraico en un entorno de resolución de problemas. El rol del conocimiento del profesor*. Bellaterra: UAB.

ANEXO - ROLE-PLAYS EN CLASE DE MATEMÁTICAS

RECURSOS COMPLEMENTARIOS PARA LAS ACTIVIDADES

Aubanell Pou, Anton - Belmonte Palmero, Sergi - Bosch Camós, Anna - de la Fuente Pérez, Abraham - Fernández Hernández, Raül - Font González, Jordi - Lopez Serentill, Paula - Margelí Voelp, Sílvia - Martínez Pascual, Manel - Massich Vall, Francesc - Miró Manasanch, Laia - Mora Cañellas, Lluís - Morera Úbeda, Laura - Muria Maldonado, Sergi
gdfmub@gmail.com
Grupo de didáctica de la Facultad de Matemáticas y Informàtica de la UB (Barcelona)

1. Role-play de coordenadas

Una vez realizado el role-play, cuando los alumnos aún están situados formando una cuadrícula, es interesante representar en la pizarra la propia distribución, poniendo junto a cada punto, las primeras letras del nombre del alumno correspondiente y rehaciendo en la

ISBN 978-84-945722-3-4

pizarra las representaciones hechas en el role-play. Para ampliar la información pueden consultarse las propuestas del ARC que se encuentran en los enlaces: http://apliense.xtec.cat/arc/node/200 y http://apliense.xtec.cat/arc/node/198 .

A continuación, citamos dos posibles ampliaciones:

- Tratar el sentido de la compatibilidad / incompatibilidad y de la determinación / indeterminación de sistemas.

En el marco de la programación lineal, una vez se ha determinado la región admisible, será interesante que cada alumno-punto de esta región "se evalúe" la función objetiva, se observen las direcciones de variación y se identifique el punto (o los puntos) que la optimizan.

2. Paseo aleatorio

Como complemento a esta actividad proponemos visionar el funcionamiento de la máquina de Galton y comentar con ellos si les parece que hay similitudes en el funcionamiento y los resultados obtenidos y a qué se deben. https://www.mathsisfun.com/data/quincunx.html
Otra propuesta interesante es la de pedirles a todos que escriban una secuencia aleatoria de tirada de monedas (cara-cruz) a partir de la experimentación real y otra que sea inventada por ellos. El conductor de la actividad mirando las dos secuencias les puede retar a adivinar en la mayoría de casos cuál es la real. Para ello bastará en que señale en cada ocasión la que tenga una secuencia más larga de caras o cruces, lo que se llama una racha de muchas cruces o muchas caras. La mayoría de veces al ser una secuencia inventada el participante tenderá a compensar la aparición de caras y cruces y no le parecerá que una tira demasiado larga de caras consecutivas pueda ser "aleatoria".

3. Funciones

Una posible variable a esta actividad podría ser la de representar dos funciones a la vez. En este caso, debería haber dos personas a las cuales se les diera el mismo número. Esta ampliación permitiría hablar de las características de los puntos de intersección de funciones y pensar cómo se tienen que hallar.

4. Descomposición factorial

Otra manera de enfocar la actividad consiste en que cada alumno sea $1m^2$, así se les puede pedir que formen rectángulos de $2m^2$, $3m^2$, $4m^2$, etc…

Con este enfoque más geométrico, se pueden trabajar conceptos como el perímetro, el área y sus relaciones.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-1.335

ANEXOS: USO DE RECURSOS MATERIALES Y ACTIVIDADES DE EXPERIMENTACIÓN PARA LA ENSEÑANZA DE MATEMÁTICAS EN BACHILLERATO

Aubanell Pou, Anton - Belmonte Palmero, Sergi - Bosch Camós, Anna - de la Fuente Pérez, Abraham - Fernández Hernández, Raül - Font González, Jordi - Lopez Serentill, Paula - Margelí Voelp, Sílvia - Martínez Pascual, Manel - Massich Vall, Francesc - Miró Manasanch, Laia - Mora Cañellas, Lluís - Morera Úbeda, Laura - Muria Maldonado, Sergi
gdfmub@gmail.com
Grupo de didáctica de la Facultad de Matemáticas y Informática de la UB (Barcelona)

a. **Cono de Apolonio**

Tal como se nos propone en Guzmán (2003) la mejor manera de conseguir una elipse es cortar de manera oblicua un buen chorizo. De esta manera ya podremos experimentar sobre elipses de diferente excentricidad. Si lo que queremos obtener son, además de círculos y elipses, hipérbolas y parábolas, bastará con seccionar, de diferentes maneras, un cono. Para ello en clase podemos construir un cono de barro o de plastilina. Una vez ya se ha pasado por una primera fase de experimentación libre, podemos usar un cono de espuma verde de los que se usan en floristerías para hacer composiciones florales.

b. **Teorema de Dandelín, el eslabón perdido**

Habitualmente se inicia la presentación de las cónicas justificando su nombre como las curvas resultantes de la intersección de un cono con un plano. Según la posición del plano se obtendrán elipses (en particular círculos), parábolas o hipérbolas (aparte de determinados casos “degenerados”). Una vez hecha esta introducción se suele pasar a deducir las ecuaciones de cada cónica a partir de las condiciones métricas que cumplen, por ejemplo, en el caso de la elipse, se partirá de su definición como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos dados, denominados focos, es constante. Así surge una pregunta obvia pero que, con frecuencia, pasa desapercibida: ¿Aquella elipse que inicialmente definíamos como intersección de un cono y un plano (no paralelo ni a su eje ni a su generatriz) cumple la condición métrica de constancia de las suma de distancias a los

ISBN 978-84-945722-3-4

focos? La respuesta a esta pregunta viene dada por el teorema de Dandelín y es el eslabón lógico (y muchas veces olvidado) entre una definición y otra.

A continuación demostraremos el teorema de Dandelín para el caso de una elipse. Consideremos un cono como el de la figura XXX y un plano s que lo corta determinando una curva que vamos a demostrar que cumple la condición métrica característica de la elipse. Consideremos dos esferas:

- La esfera (grande) tangente al cono y al plano s, situada en la parte opuesta al vértice del cono. Será tangente al cono a lo largo de una circunferencia y al plano s en un punto F1.
- La esfera (pequeña) tangente al cono y al plano s, situada entre el plano y el vértice del cono. Será tangente al cono a lo largo de una circunferencia y al plano s en un punto F2.

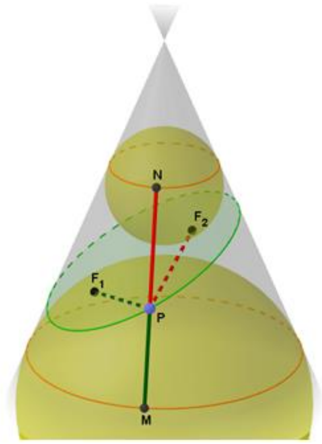


Figura XXX: Teorema de Dandelín

Consideremos un punto P cualquiera sobre la curva de corte (que pretendemos demostrar que es una elipse), formará parte a la vez del cono y del plano s. Trazamos los segmentos PF_1 y PF_2 que son tangentes, respectivamente, a una y otra esfera en los puntos F_1 y F_2. A continuación consideramos la generatriz del cono que pasa por P y que, naturalmente, cortará a las circunferencias de tangencia entre las esferas y el cono. Llamemos N y M a los respectivos puntos de intersección (véase la figura XXX). Observemos que PF_1 y PM son dos tangentes a la esfera grande trazadas desde P y, por lo tanto, PF_1=PM. Igualmente PF_2 y

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

PN son dos tangentes a la esfera pequeña trazadas desde P y, por lo tanto, $PF_2=PN$. Así pues: $PF_1 + PF_2 = PM + PN = MN$. Dado que MN no depende de P (puesto que es la distancia entre las circunferencias de tangencia del cono y las respectivas esferas) habremos deducido que $PF_1 + PF_2$ es constante para cualquier punto P de la curva de intersección entre el cono y el plano. Así pues esta curva es una elipse cuyos focos son los puntos de tangencia, F_1 y F_2, de las esferas con el plano de corte s. Por consiguiente hemos demostrado el teorema de Dandelín en el caso de la elipse. Existen versiones de este teorema para el caso de la parábola y de la hipérbola análogas a la que se ha expuesto.

USO DE RECURSOS MATERIALES Y ACTIVIDADES DE EXPERIMENTACIÓN PARA LA ENSEÑANZA DE MATEMÁTICAS EN BACHILLERATO

Aubanell Pou, Anton - Belmonte Palmero, Sergi - Bosch Camós, Anna - de la Fuente Pérez, Abraham - Fernández Hernández, Raül - Font González, Jordi - Lopez Serentill, Paula - Margelí Voelp, Sílvia - Martínez Pascual, Manel - Massich Vall, Francesc - Miró Manasanch, Laia - Mora Cañellas, Lluís - Morera Úbeda, Laura - Muria Maldonado, Sergi
gdfmub@gmail.com
Grupo de didáctica de la Facultad de Matemáticas y Informática de la UB (Barcelona)

Núcleo temático: V. Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Modalidad: T
Nivel educativo: Terciario o Bachillerato (16 a 18 años)
Palabras clave: Recursos, actividades, experimentación

Resumen

El uso de recursos materiales y actividades de experimentación en clase de matemáticas se está normalizando en educación primaria y, quizás en menor medida, en educación secundaria obligatoria. Así podemos encontrar muchos ejemplos de uso de materiales manipulativos y TAC, en las aportaciones que se han ido presentando en diferentes ediciones de las JAEM. En cambio, para la etapa de Bachillerato este tipo de recursos didácticos no parece que sean tan populares. Parece que en Bachillerato el formalismo toma un protagonismo que deja de lado otras opciones.

Llevar al aula buenos recursos materiales inmersos en actividades adecuadas puede ser el método de transporte más eficaz para llegar a las ideas de fondo que subyacen en los contenidos propios de bachillerato.

Las actividades de experimentación con recursos materiales nos permiten poner en juego el ciclo: experimentación, descubrimiento, conceptuación y formalización de una forma

ISBN 978-84-945722-3-4

natural.
Durante su desarrollo mostraremos y discutiremos con los asistentes la diferente utilización de éstos y cómo pueden gestionarse para que este tipo de actividades puedan ser aportaciones relevantes en los niveles más avanzados de la educación secundaria y que son un buen camino para llegar a comprender y a formalizar ideas abstractas.

Introducción

Está ampliamente aceptado que para conseguir un aprendizaje significativo y profundo de los conceptos matemáticos, los niños deben tener oportunidades de interaccionar con objetos concretos antes de pasar a una fase más abstracta. El uso de recursos materiales facilita el paso por el concreto y nos puede conducir hacia la abstracción de conceptos a través de las propias intuiciones de los alumnos. En la práctica esta idea se tiene muy en cuenta en la etapa Infantil y Primaria, algo menos en Secundaria y casi nada en Bachillerato. Creemos que esto ocurre por dos razones: por un lado, como los alumnos son ya expertos aprendices, se da por hecho que pueden pasar directamente a la visión abstracta de los conceptos matemáticos, sin la necesidad de pasar antes por esta fase concreta. Pero por otro lado, como los conceptos son mucho más complejos que los que se tratan en Secundaria y por supuesto en Bachillerato, parece más difícil encontrar recursos materiales que sean interesantes para llevar a clase que muestren esta complejidad. Además, las actividades de experimentación que puedan resultar interesantes para mostrar esta complejidad, da la sensación de que necesitan de un tiempo en el aula del que no disponemos en Bachillerato.
En este taller mostraremos algunos recursos manipulativos fáciles de construir que son muy efectivos para algunos temas concretos. Y por otro lado, intentaremos convencer a los asistentes de que usarlos no requiere de tanto tiempo de clase como se pudiera pensar y de que resultan ser recursos muy efectivos para entender conceptos difíciles.

1. **Cónicas**

    a. **Construcción de cónicas con cordel**

La construcción de las cónicas no degeneradas a partir de un cordel nos permitirá mostrar las propiedades métricas que las definen.
Podemos construir una elipse por el método del jardinero. Si partimos de una madera con dos clavos que sobresalgan situados en los puntos F y F’ (que harán de focos), y un cordel de longitud mayor que la distancia entre los clavos con un cárcamo en cada punta para poderlo

ISBN 978-84-945722-3-4

sujetar en los clavos. Con un rotulador y sin dejar de tensar la cuerda trazamos la cónica. Se obtiene una elipse partiendo de su definición como el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de distancias a los focos es constante. Precisamente la longitud del cordel será la suma de estas distancias.

Para construir la hipérbola necesitaremos, además de la madera con los dos clavos, una regla con un cárcamo en un extremo para encajarlo en los focos, y que en el otro extremo se haya unido un cordel algo más corto que la regla. El cordel acabará también con un pequeño cárcamo para poderlo pasar por los clavos de los focos. Encajaremos la regla en uno de los focos y el cárcamo del extremo libre del cordel, por el otro. Con la punta de un rotulador tensaremos la cuerda tocando siempre la regla. A medida que vayamos girando la regla alrededor de uno de los focos, el rotulador se irá desplazando, siempre en contacto con la regla y estirando el cordel al máximo. El conjunto de puntos que se dibuja forma una rama de la hipérbola. De forma análoga, intercambiando las posiciones de regla y cordel en los focos, trazamos la otra rama. Una vez construida la cónica se podrá demostrar que es el lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia de distancias a los focos, en valor absoluto, es constante. Esta última es precisamente la diferencia entre la longitud de la regla y el cordel, y coincide con la distancia entre los vértices de la hipérbola. Utilizando cuerdas de diferentes longitudes se puede analizar la excentricidad de la cónica.

Finalmente, para construir la parábola sólo necesitamos una madera con un clavo que sobresalga situado en el punto F (foco), una regla para marcar la directriz, una escuadra y un cordel con un cárcamo en cada extremo de longitud igual al cateto mayor de la escuadra. Fijamos un extremo del cordel en el vértice del ángulo agudo y mostramos que cateto y cordel tienen la misma longitud. El otro cárcamo del cordel lo situamos en el foco y colocamos la escuadra de manera que su cateto mayor sea perpendicular a la regla (directriz) juntando el cateto menor con esta. Con un rotulador, en contacto siempre con la escuadra, tensamos el cordel y, deslizando la escuadra por la regla el rotulador va trazando la parábola. Es necesario que el rotulador no deje de estar en contacto con la escuadra y estirando siempre de la cuerda.

b. **Rebote en elipses y parábolas. Espejos parabólicos**

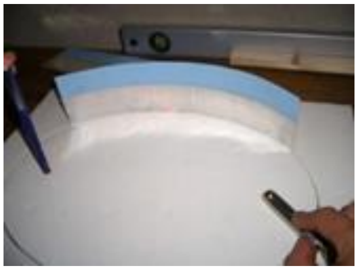
La visualización de las propiedades de las cónicas y sus aplicaciones prácticas nos ayudan a comprender la importancia que tienen en la vida real.

ISBN 978-84-945722-3-4

En el primer ejemplo vamos a ver una de las propiedades de la parábola que es que cualquier rayo de luz que entre paralelo al eje de la parábola y que rebota en ésta, pasa siempre por el foco de la parábola. Para visualizarlo construiremos la parábola y la recortaremos sobre cartón pluma, de manera que dispongamos tanto de la figura como del molde. En el cartón pluma marcaremos el foco y el eje de la parábola. Dispondremos también de una lámina flexible de cartulina con una cara plateada que encajaremos entre la parábola y el molde. Después de bajar la luz del aula y trabajando todo el grupo de alumnos conjuntamente, en el foco encajaremos un pequeño palo y moveremos el láser en paralelo al eje, enfocando diferentes puntos de la parábola, observando que el rebote siempre pasa por el foco. En el momento adecuado será interesante señalar la posición de la recta tangente y de la recta normal a la parábola y comentar la igualdad entre el ángulo de incidencia y el ángulo de reflexión. Esta propiedad es la base del funcionamiento de las antenas parabólicas y de las cocinas solares parabólicas. También se utiliza en los espejos convexos de los retrovisores de los coches y de las motos para aumentar el campo de visión y en los espejos que se utilizan en las esquinas de algunos cruces sin visibilidad o en las tiendas y aparcamientos.

En un segundo momento situaremos el láser en el foco de la parábola y comprobaremos como todos los reflejos salen en dirección paralela al eje de la parábola. Esta propiedad se utiliza en los focos de los coches para aprovechar al máximo la luz que desprende la bombilla. También es muy interesante la creación de una imagen virtual de un objeto con un doble espejo parabólico. Así se sitúa un objeto en el foco del primer espejo parabólico creando una imagen virtual en el foco del segundo espejo. En una segunda actividad visualizaremos una propiedad de la elipse que es que cualquier rayo de luz que sale de un foco y rebota sobre cualquier punto de la elipse pasa por el otro foco de la elipse. Para ello construiremos una estructura análoga a la del primer ejemplo con una elipse. Esta propiedad se puede comprobar también en cúpulas o túneles con secciones elípticas, en las que si situamos una persona en cada foco de una sección pueden hablar entre ellos sin ningún problema. También se aplica en las litotricias, con ondas de choque de alta frecuencia, para romper cálculos en el riñón, la vejiga o el uréter. El emisor de ondas se sitúa en uno de los focos del elipsoide y el cálculo en el otro foco.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



Todas estas propiedades visualizadas con materiales manipulativos se pueden ampliar modelizándolas con una construcción de GeoGebra. El lector encontrará applets en la bibliografia de este documento.

2. **Funciones**

   a. **Cortando un cilindro**

Para empezar la actividad, partiremos de un cilindro envuelto con un papel dando repetidas vueltas alrededor de él. A partir de este punto, aparece la pregunta central donde se sienta la propuesta didáctica: ¿qué sucederá cuando cortemos transversalmente el cilindro? ¿cuál será la sección del cilindro que se producirá? ¿qué sucederá cuando desenvolvamos el papel? Analizemos por encima, las respuestas descritas hasta el momento.

<u>¿Cuál será la sección del cilindro que se producirá?</u>:

La sección transversal del cilindro será una elipse. Sin embargo, podemos ir un poco más allá y preguntarnos qué relación hay entre el radio del cilindro y el ángulo de corte con la elipse resultante. Si el lector estudia la imagen superior detenidamente, observará que el eje menor de la elipse coincide con el diámetro del cilindro (D). Para determinar el eje mayor de la elipse (M) se necesitará buscar una relación entre el diámetro del cilindro y el ángulo de corte

ISBN 978-84-945722-3-4

respecto el eje del cilindro, le llamaremos α. Usando las relaciones básicas de trigonometría obtendremos que $M = \frac{D}{\sin\alpha}$

¿Qué sucederá cuando desenvolvamos el papel?:

La actividad toma una nueva perspectiva al desenvolver la sección del cilindro. El momento que descubrimos nuestro cilindro en clase es un momento mágico. Los alumnos pueden llegar a aplaudir a la función que aparece: ¡una sinusoidal! En este momento nos aparece un nuevo paradigma donde debemos hacer pensar a nuestros alumnos: ¿Qué sucederá a la función resultante si modificamos el ángulo de corte? ¿Qué aspectos se mantienen invariantes si modificamos el ángulo de corte? ¿Qué características de la función vienen determinadas por el radio del cilindro?

A modo de ampliación se puede estudiar qué sucedería si se hacen dos secciones a modo de cuña en un cilindro o cambiar el cilindro por un prisma. Como atacar estas ampliaciones lo dejamos a la elección del lector. Sin embargo, quedarse a un nivel de análisis cualitativo es más que interesante. El material es el punto de salida de la actividad pero, en el momento que se quiera entrar a una investigación más detallada, el uso de software dinámico pasa a ser mucho más rico y efectivo.

b. Optimización con una hoja de papel

Esta actividad trata de dar respuesta y enriquecer un problema clásico de optimización utilizando materiales: Se quiere construir una caja sin tapa con una lámina de "a" cm de alto i "b" cm de largo recortando un cuadrado de la lámina en cada vértice y doblando las pestañas para formar los laterales. Hallar las dimensiones de la caja de volumen máximo.

Al empezar esta actividad se da una hoja de papel con una trama cuadriculada a todos los alumnos y se les asigna un número natural a cada uno. Las instrucciones son muy sencillas, cada alumno tiene que construir un cajón sin tapa recortando cuatro cuadrados, uno de cada esquina de la trama, la longitud de los cuales debe ser el número natural que tiene asignado cada alumno y luego doblando el papel. Es bueno que haya alumnos que no puedan realizar el cajón por restricciones del problema, en este caso, se les deja escoger el número que prefieran siempre que éste les permita construir el cajón. Esta situación nos permitirá hablar del dominio de la función.

ISBN 978-84-945722-3-4

Cuando todos los alumnos tengan un cajón construido, cada uno de ellos tendrá que hallar el volumen de su cajón. Una vez calculados todos los volúmenes, se colocan en una hoja de cálculo la longitud del lado de los cuadrados recortados y los volúmenes obtenidos. A continuación, se representan en una gráfica el volumen en función de la longitud del lado de los cuadrados recortados. En éste momento, se puede discutir sobre el tipo de función obtenida. Además, ya podemos hacer la pregunta que ha motivado la actividad ¿Quien es el alumno que tiene el cajón con un mayor volumen? O la pregunta real ¿Qué longitud del lado del cuadrado recortado hace que el volumen del cajón sea máximo? También es un buen momento para reflexionar sobre si la caja obtenida por uno de los alumnos es la de más volumen que se puede hacer recortando un cuadrado de cada esquina.

Una vez solucionado el problema, es momento de formalizarlo y escribir el volumen del cajón en función del lado del cuadrado recortado. Entonces, si las dimensiones de la trama inicial eran “a” de ancho y “b” de largo, y al lado del cuadrado le llamamos “x”, la función del volumen es la siguiente:

$$V(x) = x \cdot (a-2x) \cdot (b-2x)$$

Conocedores ya de la respuesta gracias a la actividad manipulable, es momento de encontrar la solución analítica al problema y ver que evidentemente coinciden además de comentar las peculiaridades que se han generado en el problema por el hecho de trabajar sólo con números naturales.

c. **Integrales con tallarines**

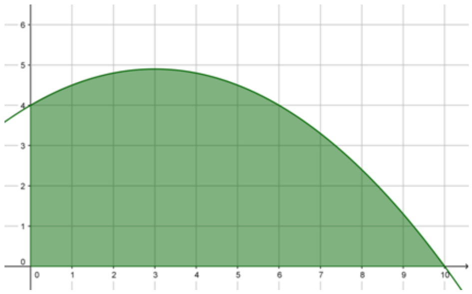
Sin querer entrar en excesivos formalismos (no es la intención de este texto), la integral de Riemann se podría definir como

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i^*) \Delta x_{i-1}$$

para f continua en un intervalo [a,b] i x_i puntos de los subintervalos que forman una partición del intervalo [a,b]. Seguramente, antes sería necesario hablar de sumas superiores e inferiores… Sin embargo, podemos llegar al concepto por un camino donde los materiales toman un papel mucho más preponderante. Supongamos que queremos calcular el área de la

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

siguiente región:



Para hacerlo, utilizaremos únicamente tallarines y una regla. ¿Cómo podemos hacerlo? Recubriendo nuestra región con segmentos de distinta longitud. Posteriormente, únicamente necesitaremos calcular el área de los tallarines que recubren la región. Para hacerlo, el alumno se puede decantar por agrupar los segmentos para que le sea más fàcil su cálculo o, por lo contrario, echar mano de una hoja de cálculo para hacer el sumatorio de las àreas de los distintos rectángulos de pasta.

Metodológicamente hablando, se pueden hacer distintos enfoques de la misma actividad: estudiar sumas superiores o inferiores, estudiar distintas particiones usando tallarines de grueso distinto (hasta combinar distintos gruesos), se puede utilizar pasta de dos colores para diferenciar las regiones por encima o por debajo del eje OX… Sean cuales sean las decisiones del docente, es de especial interés comparar los resultados obtenidos por los alumnos con el resultado teórico de la integral de Riemann. Para ello, es más que interesante que la imagen sobre la cual trabajen los alumnos esté debidamente escalada para que una unidad en los ejes mida 1 cm. En caso contrario, deberán utilizar las relaciones de proporcionalidad entre áreas.

Reflexión final

Hemos mostrado en este artículo algunas posibilidades para llevar al aula de Bachillerato recursos materiales y actividades de experimentación que no nos harán sentir que hemos perdido ni un minuto de clase, porque gracias a estos recursos conseguiremos un aprendizaje mucho más significativo, duradero y sobre más alumnos, que si nos limitamos al mundo de lo abstracto.

ISBN 978-84-945722-3-4

Referencias bibliográficas

Aubanell Pou, A. (2006). *Recursos materials i activitats experimentals en l'educació matemàtica a secundària*. http://www.xtec.cat/~aaubanel/ Consultado 22/05/2017.

Castelnuovo, E. y Barra, M. (1976). *Matematica nella realtà.* Torino: Editore Boringhieri. pp. 17, 33, 145,

de Guzmán, M. (2003). *Cuentos con cuentas.* Capítulo 1, pp. 9-22. Madrid: S.L. NIVOLA LIBROS Y EDICIONES.

Grupo de didáctica de las matemáticas de la UB (2017). Uso de recursos materiales y actividades de experimentación. https://www.geogebra.org/m/CwbGzWvH Consultado 23/05/2017

Nabla Ltd. (2004-2017). Conic sections.
http://www.nabla.hr/PC-ConicsProperties2.htm#Proof Consultado 23/05/2017

Puig Adam, P. (1948): *Curso de Geometría Métrica, Tomo II.- Complementos*. Madrid: Gómez Puig, Ediciones.

Puig Adam, P. (1956): *Didáctica Matemática Eurística*. Madrid: Instituto de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-1.353

PRÁCTICAS QUE FAVORECEN LA EXISTENCIA DE UN TRIÁNGULO EN UN CONTEXTO DINÁMICO

José Carlos León Ríos -Isabel Zoraida Torres Céspedes
jleonr@ulima.edu.pe – iztorres@ulima.edu.pe

Universidad de Lima. Instituto Geogebra Universidad de Lima (IGUL). Perú

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
Modalidad: T
Nivel educativo: Medio básico
Palabras clave: pensamiento y lenguaje variacional, visualización, geogebra.

Resumen

A partir de la condición de existencia del triángulo, situaciones variacionales y el *uso del Geogebra, propiciamos el significado gráfico del valor numérico y algebraico de dicha condición. Esta resignificación del objeto, permite llevarlo a un contexto alejado de las aulas y modelar el movimiento de algunos mecanismos empleados en actividades humanas, cuyo funcionamiento está relacionado al pensamiento dinámico de la matemática. Las situaciones planteadas se fundamentan en la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional (Pylvar) cuyas características, de acuerdo a Caballero y Cantoral (2013), muestran elementos propios de dicho pensamiento, los cuales describen la forma en que se desarrolla. Nuestras actividades propician cambios en el objeto de estudio, cuantifican las transformaciones y las integran a otros escenarios, fuera de las aulas. Nuestra pregunta de investigación plantea lo siguiente ¿Cómo desarrollar y comunicar el pensamiento variacional, a partir de la existencia de un triángulo, cuando nos encontramos en un contexto social distinto al de las aulas? Las situaciones dinámicas planteadas, permitieron al participante, movilizar argumentos y generar estrategias variacionales.*

Una revisión a los textos, nos permite señalar que el tema de la condición de existencia de triángulos, gira en torno la variación numérica y algebraica de dicha condición, es decir, dado el valor numérico de los lados de un triángulo, estos números deben garantizar la condición de existencia, verificando que las longitudes dadas cumplan que cada lado de un triángulo sea menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

Nuestras actividades pretenden, en cambio, propiciar el significado gráfico a los valores numéricos de dicha condición, eso incluye integrar y favorecer también el campo de la visualización.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Debido a la importancia de visualizar determinado evento, incluimos el trabajo de Gonzalo, Fernández y Díaz (2011), los cuales señalan que "visualizar y orientar un objeto, sujeto o espacios no solamente incluye la habilidad de verlos, sino también la de reflexionar sobre ellos y sus posibles representaciones, sobre las relaciones entre sus partes y de examinar sus posibles transformaciones de rotación, sección y desarrollo" (p.100). En esa mirada, creemos oportuno considerar el reciente Programa Curricular de Educación Secundaria del 2016, el cual considera a la matemática como una actividad humana que ha contribuido al desarrollo del conocimiento y de la cultura de nuestros países. Dicho programa curricular, describe una de las competencias como logro del perfil de egreso del estudiante de educación Básica de la siguiente forma:

> Competencia RESUELVE PROBLEMAS DE FORMA, MOVIMIENTO Y LOCALIZACIÓN. Consiste en que el estudiante se oriente y describa la posición y el movimiento de objetos y de sí mismo en el espacio, visualizando, interpretando y relacionando las características de los objetos con formas geométricas bidimensionales y tridimensionales. Implica que realice mediciones directas o indirectas de la superficie, del perímetro, del volumen y de la capacidad de los objetos, y que logre construir representaciones de las formas geométricas para diseñar objetos, planos y maquetas, usando instrumentos, estrategias y procedimientos de construcción y medida. Además describa trayectorias y rutas, usando sistemas de referencia y lenguaje geométrico. (p.154)

En ese sentido, nuestras actividades se basan, en algunos aspectos del Pensamiento y Lenguaje Variacional que es una línea de investigación de la teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa.

Al respecto, Cantoral (2013) indica que "El pensamiento y lenguaje variacional estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y el medio social que les da cabida" (p.202). El autor aclara que existe una distinción entre los vocablos cambio y variación. El primero, referido a la modificación del estado del objeto, mientras que el segundo, denota la cuantificación de dicho cambio. Además, hace énfasis en la capacidad inherente al ser humano por tratar de predecir ciertos sucesos de cambio y anticipar los resultados y comportamiento de sistemas complejos. Agrega también, que la variación congrega a

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

diversos campos simbólicos, numéricos, algebraicos, analíticos, visuales, gráficos y geométricos.

En nuestras actividades, enriquecemos el significado gráfico asociado al valor numérico de la condición de existencia del triángulo. Creemos, que la sola reducción de ciertos mecanismos geométricos a la aplicación de algoritmos y procedimientos, se aleja de la comprensión basado en experiencias vividas. Pensemos entonces, en el valor de uno de los lados del triángulo, como un segmento de longitud variable.

Dicho tratamiento gráfico, nos encamina a la necesidad de describir y procesar el contenido visual que ofrece, reinterpretando dicho significado en aquellas actividades cuyos procesos de cambio y variación puedan ser visualizados en un contexto social fuera de las aulas. En ese sentido, tomamos como referencia de experiencias vividas, ciertos sistemas con articulaciones mecánicas, pues tienen la peculiaridad de reproducir el significado gráfico de la condición de existencia de los triángulos, propiciando la puesta en juego de estrategias que permiten explicar el carácter dinámico de dichas articulaciones, utilizadas en contextos de la vida cotidiana. El enfrentamiento a este tipo de actividades, permite a los estudiantes de las prácticas tradicionales de aula, hay un acercamiento a las prácticas de lo que cambia y varía, de lo que permanece constante, de lo que rota o se traslada, logrando una ruptura con el sistema tradicional de la enseñanza de la condición de existencia del triángulo.

Nuestras actividades estuvieron basadas en la caracterización propuesta por Caballero y Cantoral (2013), y que los autores clasificaron en tres fases. La primera fase describe las estrategias variacionales que los alumnos ponen en juego cuando se enfrentan a las situaciones variacionales. La segunda fase, detalla los elementos de interacción que caracterizan el desarrollo del pensamiento variacional y en la tercera, establece un modelo que interpreta la interacción de dichos elementos.

En la figura 1, mostramos el modelo de interacción del desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional (Pylvar) y que resume las tres fases.

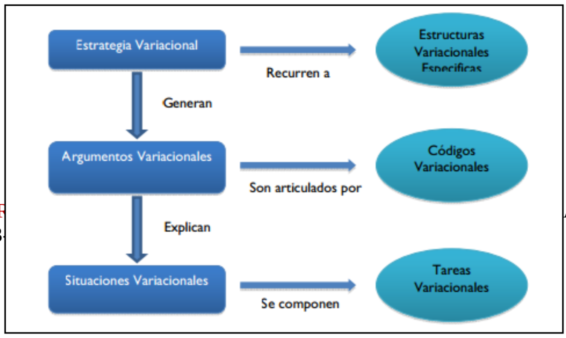


Figura 1 Modelo de interacción de los elementos Pylvar.
Fuente: Caballero et al. (2013, p.1204)

.

De acuerdo a Caballero et al. (2013), dicho modelo de interacción contiene elementos que por su naturaleza, actúan de manera conjunta y no aislada. Una breve explicación a dicho proceso de interacción se describe a continuación.

La Situación Variacional, incluye situaciones problemáticas que propicien la variación, el cambio, la cuantificación y que demanden la puesta en juego de las *Estrategias Variacionales* por parte de los alumnos. De acuerdo a Salinas (2003 como se citó en Caballero et al., 2013), algunas de las siguientes *Estrategias Variacionales* se hacen presente, cuando el alumno razona y actúa, en el momento del análisis de las actividades:

- Comparación: Asociada a la acción de establecer diferencias entre estados.
- Seriación: Se analizan estados sucesivos y se establecen relaciones entre ellos.
- Estimación: A partir de conocer el comportamiento de un fenómenos en estados previos, se proponen nuevos estados o comportamientos a corto plazo.
- Predicción: Está asociada a la acción de poder anticipar un comportamiento, estado o valor, luego de realizar un análisis de estados previos. (p.1199).

El empleo de una o más *Estrategias Variacionales* estará conformado por *Tareas Variacionales,* que son las acciones ejecutadas en una situación variacional como la tabulación, análisis de registros de patrones de comportamiento, construcción y análisis de gráficos. En nuestro caso, son los gráficos y registros de comportamiento gráfico en lo que incidiremos, los alumnos deslizan el puntero, hacen anotaciones y estiman resultados. Para ello, se requiere de un esquema o comportamiento organizado para una situación específica, que los autores denominan Estructura *Variacional Específica,* que de acuerdo a González (1999 como se citó en Caballero et al., 2013), son las "herramientas, procesos y procedimientos especializados del ámbito matemático o científico" que funcionan para analizar cuánto y cómo cambian los elementos que la componen. Por ejemplo, en un análisis

ISBN 978-84-945722-3-4

a priori, consideramos como procedimientos la resolución de desigualdades, el conocimiento de las propiedades de los triángulos y circunferencias y el uso de las herramientas básicas del programa Geogebra. La *Estrategia Variacional* genera también *Argumentos Variacionales* que se articulan por *Códigos Variacionales*. De acuerdo a de acuerdo a Cantoral (2000 como se citó en Caballero et al., 2013), dichos códigos son "maniobras, ideas, técnicas, o explicaciones que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema u objeto que se está estudiando". Las justificaciones y explicaciones fueron parte de esta caracterización.

Nuestra investigación es cualitativa, de orden descriptivo y está formada por cuatro actividades para ser desarrolladas con alumnos de cuarto y quinto de secundaria.

Se dispone de 3 horas para la ejecución del taller. En las dos primeras horas, se ejecutan las tareas de las actividades y se identifican algunos elementos del modelo de interacción del Pylvar. En la siguiente hora se modelan algunos mecanismos sobre la base de la condición de existencia del triángulo.

Daremos una breve descripción de las actividades.

Primera actividad

Se construye la figura que se muestra a continuación, haciendo uso de deslizadores, hemos considerado *r2* mayor o igual a *r1*. Posicione los deslizadores a 3 y 8 unidades. Luego, desplace dos de los vértices del triángulo *ABC* sobre las circunferencias sin alterar las longitudes de los radios.

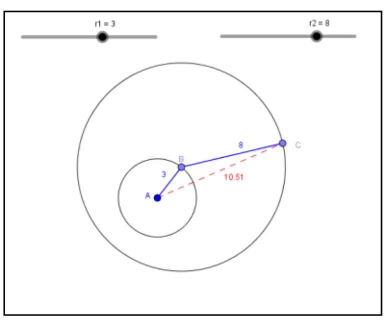


Tabla 1. Variación del segmento AC

a) ¿Es cierto que el triángulo *ABC* siempre existe? Justifique.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

b) Si la longitud de los segmentos *AB y BC* corresponden a 3 y 8 unidades, ¿qué valor o valores podría tomar la longitud del segmento *AC*? Justifique.

c) Modifique los deslizadores y determine el valor o valores que podría tomar la longitud del segmento *AC*. Complete la tabla.

d) Determine una expresión que restrinja la longitud del segmento *AC*, cuando los lados se representan por *a, b y c* que corresponden a los segmentos *AB, BC y AC* respectivamente.

Segunda actividad

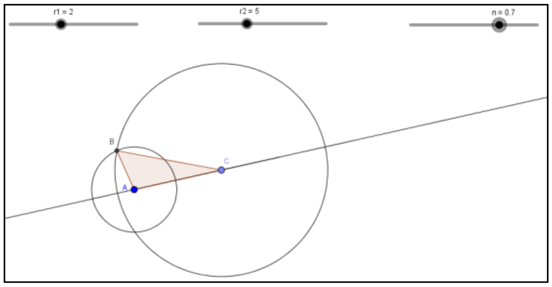
Modifique las propiedades de cada uno de los deslizadores creados en la primera actividad. Para ello ingrese al menú contextual y considere *r1* mayor o igual a *r2*.

a) ¿La restricción de la longitud del segmento *AC* que determinó en la parte d) de la primera actividad, se sigue cumpliendo? Justifique su respuesta.

b) Proponga una nueva restricción en esas circunstancias.

Tercera actividad

Construya una familia de triángulos como se muestra en la figura. Los deslizadores *r1, r2* corresponden a las longitudes de los lados *AB* y *BC*. El tercer deslizador controla el desplazamiento del vértice *C* sobre la recta.



Con la herramienta Polígono del Geogebra, coloree el triángulo.

Cuarta actividad

Ingrese al internet y observe en las páginas correspondientes, algunos mecanismos como sistemas basculantes en levadizos de puertas, automóviles, sistema manivela y biela. Luego

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

modele dichos mecanismos haciendo uso del triángulo que construyó en la cuarta actividad y del programa Geogebra.

Conclusiones

En las actividades se emplearon estrategias variacionales como la comparación y predicción, respaldados por deslizadores con el objetivo de comprobar los patrones de regularidad para la condición de existencia. Las tareas que realizaron los alumnos, como análisis de registros de patrones de comportamiento, construcción y análisis de gráficos, están orientadas para explicar la situación variacional propuesta con el uso de argumentos variacionales.

Las actividades mostradas, intentan favorecer el desarrollo del lenguaje y pensamiento variacional en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la condición de existencia del triángulo. Por tal motivo, recurrimos a la modelación de eventos físicos como los mecanismos hidráulicos y otros similares, los cuales exigen el uso de un triángulo de lado variable.

Referencias bibliográficas

Caballero, M. y Cantoral, R. (2013). *Una caracterización de los elementos del Pensamiento y Lenguaje Variacional.* En Flores R. (Ed.) (2013).Acta Latinoamericana de Matemática Educativa A.C., Vol. 26. (pp.1195-1204). México DF: Editorial Colegio Mexicano de Matemática

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento.* México DF: Editorial Gedisa

MINEDU (2016). Currículo Nacional de Educación Básica. Ministerio de Educación. Perú.

ISBN 978-84-945722-3-4

T-1.360

GEOGEBRA-MATIC SA

Presentes en la CIBEM
Juan Agustín Noda Gómez – Alfredo Monereo Muñoz
joannoda@gmail.com – alfredo.monereo@gmail.com
IES Andrés Bello, España – Colegio Nuryana, España

No presentes en la CIBEM
Sergio Darias Beautell – Pablo Espina Brito
IES Los Realejos, España – Área de Tecnología Educativa.
DGOIPE.
Sergivo88@gmail.com – pebrito@gmail.com

Núcleo temático: V. Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
Modalidad: T
Nivel educativo: 3. Nivel educativo medio o secundario (12 a 15 años)
Palabras clave: GeoGebra, Vídeo, TIC, Comunicación

Resumen

Este taller participa del objetivo general de propiciar un entorno motivador para que docentes integren en sus situaciones de aprendizaje (SA) instrumentos de evaluación que profundicen en el desarrollo de la competencia lingüística por parte del alumnado, en concreto, en la dimensión de comunicar y expresar tanto oral como por escrito el pensamiento y razonamiento matemático y los pasos seguidos para la elaboración de los productos que configuran los mencionados instrumentos de evaluación.

Por tanto, este taller trata de recrear en dos horas una dinámica de trabajo que despierte la curiosidad y el interés del docente por el uso de la aplicación GeoGebra, la grabación de vídeos y otros elementos TIC innovadores para el aprendizaje de contenidos integrados en sus SA. Y así, obtener productos que para ser integrados como instrumentos de evaluación que en la SA.

Concretamente, cada equipo de participantes realizará un vídeo explicativo de construcciones sencillas de GeoGebra utilizando el programa Screen-O-Matic. Después de ser subido a Youtube, cada vídeo será enlazado a un mural en "Thinglink". Con este vídeo el alumnado demuestra su capacidad de comunicar y expresar su pensamiento y razonamiento matemático. También se realizará con el móvil utilizando el GeoGebra móvil, Vocaroo, AZ Screen Recorder y Pinterest.

Desarrollo del trabajo.

ISBN 978-84-945722-3-4

Este taller es una ejemplificación del proyecto de innovación "GeoGebra-MATIC SA" elaborado y desarrollado por los autores, miembros activos de la Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas y el Instituto de GeoGebra de Canarias con el servicio de Innovación Educativa de la Consejería de Educación y Universidad del Gobierno de Canarias en el presente curso 2016-2017.

En general, el uso de las TIC en una materia y en un contexto adecuado, está estrechamente vinculado con la contribución al desarrollo de la competencia digital. En muchas ocasiones, en la práctica docente, se hace el hincapié en el uso de ciertos programas donde el alumnado lo aplica para resolver una situación concreta, esto es, se potencia la "T" de las TIC. Sin embargo, la información es pobre sobre su pensamiento y razonamiento. Con la idea de ordenar este pensamiento y mejorar la comprensión y relación de los conceptos en el alumnado, nace la idea de que ellos verbalicen y comuniquen el producto que se les ha pedido. De esta manera se traslada el enfoque a la "C" de las TIC, es decir, a través de la grabación de sus explicaciones y utilizando herramientas informáticas se contribuye a la mejora de la dimensión de la comunicación de la competencia lingüística. Cuando el alumnado es capaz de explicar correctamente todo lo que interviene en el producto elaborado, entonces lo ha conseguido aprender.

Con respecto a la educación en matemáticas y a lo comentado, el uso de vídeos matemáticos con GeoGebra fomenta que las tecnologías de la información y de la comunicación entren en aula y exploren nuevas posibilidades educativas. Este software puntero en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en combinación con la realización de vídeos o de audios permite al alumnado organizar y comunicar su pensamiento matemático. Luego, utilizar el GeoGebra y el vídeo o audio como herramientas tecnológicas permite resaltar el papel de la comunicación en el aprendizaje de las matemáticas. En los siguientes vídeos se puede contrastar el objetivo de este taller. En el primero, a pesar de que resuelve y genera el producto pedido, no se tiene claro cómo ha entendido o ha razonado el alumno. Pero en el segundo, se puede apreciar cómo se tiene información del pensamiento y comprensión del alumnado.

ISBN 978-84-945722-3-4

- (vídeo 1) https://goo.gl/gRlVzR
- (vídeo 2) https://goo.gl/ZQdrqh

Además, ese vídeo o audio puede ir acompañado de un breve resumen de lo que han pretendido explicar.

En este proceso de investigación y elaboración de vídeos matemáticos con GeoGebra u otra herramienta, a parte de la competencia matemática, están involucradas muchas otras: la comunicación lingüística al verbalizar de forma comprensiva todo el proceso y los resultados obtenidos; el sentido de iniciativa y espíritu emprendedor al establecer un plan de trabajo en revisión y modificación continua en la medida que se va resolviendo el problema y construyendo el vídeo o audio; la competencia digital, al tratar de forma adecuada la información y, en su caso, servir de apoyo a la resolución del problema y elaboración del producto, o la utilización de una herramienta informática para su comprensión, investigación, búsqueda de regularidades, invariantes, propiedades ocultas, resolver o generar nuevas hipótesis; o la competencia social y cívica, al implicar una actitud abierta ante diferentes formas de resolver y elaborar conjuntamente el vídeo o el audio.

Por ello, un producto a conseguir por equipos de alumnos/as es un vídeo de no más de tres minutos donde expliquen cómo realizar la construcción de una escena de GeoGebra que ilustre el contenido del currículo del nivel al que pertenece. Dicha escena puede ser, por ejemplo, la resolución de un problema, una demostración de un resultado teórico, o cualquier otra idea que sea trasladable a GeoGebra.

La evaluación formativa se consigue si alumnado tiene a su alcance un indicador de logro, en nuestro caso una rúbrica, que les proporcione información de la situación de su producto y a hacia dónde deben aspirar. (ver rúbrica). Luego, el alumnado recibe un feedback a lo largo del proceso de forma autónoma, además de las realizadas por el docente. De esta manera, se tiene un instrumento de calificación al unir el instrumento de evaluación (vídeo explicativo) y el indicador de logro (rúbrica).

Por ello, se piensa que si estos instrumentos de evaluación se integran coherentemente en situaciones de aprendizajes, se mejora en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de forma competencial. Este taller “GeoGebra-MATIC SA” consiste en que los participantes

ISBN 978-84-945722-3-4

realicen todo este proceso realizando y compartiendo un vídeo explicativo de dos problemas concretos. Vivenciar lo que debe realizar el alumnado animará a que los docentes ganen en seguridad para incorporarlo en sus situaciones de aprendizajes y su práctica docente. Su finalidad es contextualizar y orientar a docentes participantes en la elaboración de actividades donde el producto final integre la grabación de vídeos con Geogebra y, si se considerara oportuno, otros elementos TIC. Comentar que las similitudes de las materias de tecnología y matemáticas permiten desarrollar un enfoque interdisciplinar del proceso de enseñanza y aprendizaje, incorporando contextos y situaciones de la vida cotidiana, y utilizando todas las herramientas tecnológicas precisas.

En conclusión, el taller "GeoGebra-MATIC SA" pretende:

a) Despertar la curiosidad y el interés de los docentes de matemáticas por el uso de la aplicación GeoGebra, la grabación de vídeos y otros elementos TIC innovadores para el aprendizaje de contenidos integrados en sus situaciones de aprendizaje.

b) Experimentar con GeoGebra, grabación de vídeo y otros elementos TIC que permitan nuevos enfoques de la materia, mediante la elaboración de situaciones de aprendizaje con herramientas y actividades propias de esta tecnología.

c) Fomentar la integración de instrumentos de evaluación en las situaciones de aprendizaje mostrando lo que la grabación de vídeos u otros elementos TIC combinados con construcciones de GeoGebra pueden aportar en el aprendizaje de las matemáticas, así como a la contribución del desarrollo de las competencias claves.

El taller se organizará de la siguiente manera:

Cronograma	**Tiempo**
Presentación del Taller	**2.5 min.**
Dinámica inicial: Se deben levantar y hablar entre ellos sobre el uso que han hecho con el GeoGebra (nivel). Después realizan una fila en "U" ordenándose de los que más saben a los que menos. Cuando esté hecho se comentan los distintos niveles y se	**12.5 min.**

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

propone que se sienten cerca, parejas con uno que sepa y otro no. (Esto nos ayudará a un aprendizaje entre iguales) Votación con la aplicación Ping Pong (clicker) http://www.gogopp.com/ (Esquema del proceso tanto para Pinterest como para PingPong https://drive.google.com/open?id=0B34JsEdBgqukTGhzaHFtMjFhbG8)	
Vídeo ejemplo objetivo de la sesión. Estos fueron los inicios, con música, después se incorporarán narraciones orales del alumnado) https://goo.gl/gRlVzR	**5 min.**
Actividad de calentamiento (NIVEL BÁSICO) haciendo una construcción sencilla en GeoGebra (REALIZAR un LOGO utilizando los 3 movimientos en el plano). Se puede trabajar con esta ficha esta ficha: **Ficha Logos:** https://drive.google.com/open?id=0B34JsEdBgqukQzNFUTU0cVJ6aUk (NIVEL menos BÁSICO) realizar un fractal utilizando el BOTÓN "Crear nueva herramienta…"	**30 min.**
Mostramos algunos **Vídeo ejemplos** comentados (a elegir entre estos) https://www.youtube.com/watch?v=uMvcezU5G7M https://www.youtube.com/watch?v=Gv2K7nvvAHU https://www.youtube.com/watch?v=GKhDyGHr6uw	**5 min.**
Conexión con el currículo, los criterios de evaluación y la necesidad encontrar nuevos instrumentos de evaluación. Se analizará, por ejemplo, el segundo criterio de evaluación común a todos los niveles en el currículo LOMCE de Secundaria de la comunidad autónoma de Canarias. ***"Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación en el proceso de aprendizaje, buscando y seleccionando información relevante en Internet o en otras***	**5 min.**

ISBN 978-84-945722-3-4

fuentes para elaborar documentos propios, mediante exposiciones y argumentaciones y compartiéndolos en entornos apropiados para facilitar la interacción. Emplear las herramientas tecnológicas adecuadas para realizar cálculos numéricos y estadísticos; realizar representaciones gráficas y geométricas; y elaborar predicciones, y argumentaciones que ayuden a la comprensión de conceptos matemáticos, a la resolución de problemas y al análisis crítico de situaciones diversas.” *Se trata de comprobar si el alumnado utiliza las TIC para buscar, seleccionar, producir e intercambiar información extraída de diferentes fuentes (Internet, prensa escrita, etc.); empleando las herramientas tecnológicas adecuadas para analizar y comprender propiedades geométricas. También se evaluará si realiza cálculos de todo tipo cuando su dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente; y si resuelve distintos problemas matemáticos. Para ello, cuando proceda, elaborará documentos digitales (texto, presentación, imagen, vídeo, sonido…), individualmente o en grupo, en apoyo de las exposiciones orales que realicen para explicar el proceso seguido en la resolución de problemas, todo ello, mediante la realización de juicios críticos.* *Asimismo, se ha de constatar si el alumnado es capaz de aceptar y sopesar diferentes puntos de vista, extraer conclusiones, elaborar predicciones y analizar sus puntos fuertes y débiles para corregir errores y establecer pautas de mejora.* **Estándares:** 6. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos. 23. Selecciona herramientas tecnológicas adecuadas y las utiliza para la realización de cálculos numéricos, algebraicos o estadísticos cuando la dificultad de los mismos impide o no aconseja hacerlos manualmente.	

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

24. Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. 25. Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos. 26. Recrea entornos y objetos geométricos con herramientas tecnológicas interactivas para mostrar, analizar y comprender propiedades geométricas. 27. Elabora documentos digitales propios (texto, presentación, imagen, vídeo, sonido,…), como resultado del proceso de búsqueda, análisis y selección de información relevante, con la herramienta tecnológica adecuada y los comparte para su discusión o difusión. 28. Utiliza los recursos creados para apoyar la exposición oral de los contenidos trabajados en el aula. 29. Usa adecuadamente los medios tecnológicos para estructurar y mejorar su proceso de aprendizaje recogiendo la información de las actividades, analizando puntos fuertes y débiles de su proceso académico y estableciendo pautas de mejora.	
Realización de vídeos. Resaltar la importancia de la **comunicación** oral y el proceso de grabar Vídeo. **Proyección de vídeos ganadores del Concurso de Vídeos en GeoGebra de la SCPM Isaac Newton.** http://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/mediateca/sinewton/ **Grabación de la pantalla de los ordenadores con Screen-O-Matic.** **1.** Preparación del Canal de Youtube de cada equipo de participantes. Diferenciar entre subir un vídeo como público, oculto o privado. **2.** Explicación del uso de la aplicación Screen-O-matic para grabar la pantalla del ordenador y la explicación de cada equipo.	**30 min.**

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

3. Cada equipo realizará y subirá un vídeo a su canal de youtube de duración máxima de 3 minutos explicando todos los elementos, figuras geométricas y movimientos realizados en la construcción de su logo. **4.** Posteriormente cada equipo envía el link del vídeo a través de un formulario de Google. **5**. Se presenta la herramienta "Thinglink" para la creación de murales interactivos y se insertará los vídeos de cada equipo. De esta manera se consigue colaborativamente un producto a partir del trabajo cooperativo de cada equipo. **6**. Explicación de la utilización de la rúbrica para que los alumnos realicen la coevaluación.	
Pequeña muestra de subida al Pinterest de imágenes con un link asociado a la grabación de voz realizada por la aplicación Vocaroo y generación del código QR. **1.** Preparación y explicación del Pinterest. **2**. Sacar una foto de la escena: https://ggbm.at/DTxEand5 **3**. Abrir el enlace de Vocaroo (http://vocaroo.com/) para realizar la grabación de voz de la explicación y respuesta razonada al problema planteado en la escena anterior. **4**. Subir al Pinterest la foto de la escena con el link proporcionado por Vocaroo. **5**. Compartir el link del Pin del Pinterest. Esquema del proceso tanto para Pinterest como para PingPong https://drive.google.com/open?id=0B34JsEdBgqukTGhzaHFtMjFhbG8	**25 min**
Conclusiones y presentación de grabaciones realizadas	**5 min.**

MATERIALES O RECURSOS NECESARIOS

1) Sala de informática con:
   ¿30 ordenadores? con conexión internet. Van a trabajar en parejas.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

NOTA: Vamos a ser 2 docentes para ayudar en el desarrollo del taller. No sé cuál es el máximo de participantes que ustedes quieren fijar. Más de 60 creo que no podríamos desarrollarlo con un mínimo de condiciones. Ya me comentan.

2) Cascos con micrófono por cada puesto de dos ordenadores. En la grabación de los vídeos se deben escuchar a los dos participantes.
3) Para el ponente un PC con proyector con cable HDMI y altavoces, casco y micrófono, conexión a Internet para. Si pudiera tener el programa Notebook de la casa Smartboard instalado sería ideal. Lo utilizo con bastante frecuencia. Lo de conexión HDMI es por si utilizo mi portátil.
4) Conexión WiFi para los dispostivos móviles (portátiles, tablets y teléfonos).
5) Tener instalado GeoGebra , ScreenOmatic, Chrome en todos los equipos informáticos.
6) Se necesita que los participantes que traigan una tablet o móvil con las siguientes aplicaciones instaladas:
    - GeoGebra (https://www.geogebra.org/home)
    - AZ Screen Recorder (https://goo.gl/IX3Ky0)
    - Lector QR
    - Pinterest
    - PingPong (www.gogopp.com)

Referencias bibliográficas

Mis flash de Mates (2016). SA con TIC. http://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoblog/sdarbea/2016/11/10/11190/

Instituto de GeoGebra de Canarias (2017). Concurso de Vídeos en GeoGebra. http://www.sinewton.org/igcanarias/?page_id=306

Consejería de Educación y Universidades del Gobierno de Canarias (2017). Proyecto de Innovación "GeoGebra-MATIC SA". http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/web/programas-redes-educativas/convocatorias/proyecto-geogebra-matic-sa-2016-17.html

T-1.413

TALLER DE GEOMETRÍA DINÁMICA CON GEOGEBRA

Alexander Arévalo Soto – Oswaldo Rodríguez Díaz
aarevalo@admon.uniajc.edu.co – orodriguez@uao.edu.co
Institución Universitaria Antonio José Camacho – Universidad Autónoma de Occidente
Instituto GeoGebra Cali
Colombia

Núcleo temático: V. Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
Modalidad: T (Taller).
Nivel educativo: Terciario o Bachillerato.
Palabras Clave: Matemática, tecnología, herramienta, patrón.

Resumen

En la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas se mantiene una tensión entre la enseñanza desde lo clásico o tradicional y la mediada con tecnología. Harel (2008) plantea lo siguiente: ¿Por qué enseñamos procesos largos y complicados en lugar del modo rápido y preciso utilizando tecnología electrónica? La matemática, desde el punto de vista común, es una disciplina estática basada en fórmulas aprendidas en la aritmética, geometría, álgebra y cálculo, pero fuera de ella continúan creciendo, donde la pauta no son los cálculos ni las fórmulas sino la búsqueda abierta de patrones (Steen, 1998). Además, la tecnología permite hacer gráficas con un alto grado de detalle que, en el caso de descubrir el patrón, puede validar sus propiedades gracias a la potencia que estas tienen.

En el taller propuesto, los participantes a través de problemas básicos, tales como encontrar propiedades y patrones en el triángulo de Pascal y la generación de número reales en la recta numérica, y con ciertas características, dadas por una herramienta como GeoGebra, podrán explorar y validar dichas propiedades mencionadas.

Introducción

En el taller, a través de problemas básicos como la generación o construcción del triángulo de Pascal, la construcción de conjuntos que generen algunos número reales o aproximaciones de ellos en la recta numérica y el famoso juego de las Torres de Hanoi, se pretende encontrar patrones en su generación y propiedades que se pueden explorar y validar usando un software de geometría dinámica como GeoGebra, aprovechando los ambientes algebraicos, geométricos, tabular (hoja de cálculo) y numéricos que posee.

Adicionalmente, mostrar que en este tipo de diseño y todos los que se puedan implementar con el uso de las TICs, hay un guion conceptual, pedagógico y didáctico que se potencia con el uso de estas herramientas computacionales, las cuales permiten tener otra(s) posibles representaciones y, así, no sólo tener que trabajar en el entorno netamente algebraico.

Objetivos

Para este taller, se plantean los siguientes objetivos:

Objetivo general

Identificar patrones de generación, propiedades y características de algunas estructuras y objetos matemáticos, a partir de recursos trabajados en el programa GeoGebra.

Objetivos específicos

Como objetivos específicos tenemos los siguientes:

- Descubrir patrones existentes en la generación de los números del triángulo de pascal, de la construcción de conjuntos numéricos y de la cantidad de movimientos en las Torres de Hanoi.
- Establecer relaciones entre las diferentes representaciones matemáticas, que permitan identificar distintas propiedades de objetos matemáticos.
- Describir formulaciones de estructura recursiva y cerrada que den paso a la construcción de secuencias numéricas propias de algunas estructuras matemáticas.

Marco teórico

En el estado del arte de la Educación Matemática se plantea la discusión o tensión entre la enseñanza clásica o tradicional y las experiencias de aprendizaje mediadas con herramientas computacionales. Al respecto Santos Trigo (2011) plantea que debido al notable desarrollo

ISBN 978-84-945722-3-4

de la tecnología, se hace necesario investigar el potencial que estas herramientas ofrecen para la construcción de conocimiento en los estudiantes y se plantea interrogantes como: ¿Qué tipo de representaciones y formas de razonamiento muestran los estudiantes cuando emplean herramientas computacionales en el estudio de las matemáticas? ¿Cómo se caracterizan los procesos que exhiben los estudiantes al transformar artefactos como Excel, el software dinámico o la calculadora simbólica en herramientas de aprendizaje y de resolución de problemas? ¿Cuál es el papel de estas herramientas en la comprensión y resolución de problemas? (Santos, 2011).

Tanto Santos Trigo (2011) como Harel (2008), hacen reflexiones que pretende destacar que más allá del dominio de reglas, algoritmos, técnicas, fórmulas o procedimientos para relacionar un listado de problemas clásicos o rutinarios, se necesitan, durante el proceso de enseñanza – aprendizaje, desarrollar en los estudiantes una disposición y forma de pensar en la práctica, el uso y aplicación del quehacer disciplinar. Desde este punto de vista, se busca que los estudiantes exploren y usen diferentes tipos de representaciones, relaciones, razones, conjeturas, establezcan conexiones y utilicen o empleen diferentes argumentos para comunicar los resultados.

Adicionalmente, Harel (2008) plantea que el razonamiento de los seres humanos implica numerosos *actos mentales* tales como interpretar, conjeturar, inferir, probar, explicar, estructurar, generalizar, aplicar, predecir, clasificar, buscar y resolución de problemas (Harel, 2008). Todos estos actos mentales son importantes en el aprendizaje de la matemática y no son exclusivos; de hecho, se complementan entre ellos.

En la historia de la humanidad, el hombre siempre ha usado herramientas para hacer diferentes tareas o actividades como medir y calcular, para ello ha usado desde la regla hasta las calculadoras algebraicas y simbólicas de hoy en día. El desarrollo tecnológico de estas herramientas permite hacer cálculos más precisos y potenciar los actos mentales que plantea Harel, dado que proveen diferentes representaciones matemáticas complejas, tales como la geométrica, tabular, numérica, algebraica, que pone a disposición de la Educación

ISBN 978-84-945722-3-4

Matemática la posibilidad de fortalecer estos actos mentales importantes en el aprendizaje de las matemáticas.

Por lo tanto, permiten, aparte de hacer gráficas con un alto grado de detalle, potenciar la teoría de números al poder validar y descubrir patrones (tarea exclusiva de los matemáticos en décadas pasadas) y propiedades de los objetos matemáticos (geométricos y no geométricos) más importantes.

En el caso de la geometría, según Klein (1968), la reactivación y asimilación de las matemáticas de los griegos dieron lugar en el siglo XVI al desarrollo del álgebra simbólica de Vieta, y por medio de la geometría analítica, los matemáticos resolvieron los problemas geométricos al reducirlos a ecuaciones algebraicas (regla y compás es equivalente a ecuaciones algebraicas). Lo anterior implicó el papel fundamental del algebra simbólica y por ende el de las TIC, equipadas con cálculos simbólicos, que permitieron hacer cálculos muy complejos; pero estas tecnologías generaron tensiones en el sentido que se deben usar con prudencia (Kaput & Hegedus, 2003) porque pueden privar al estudiante de la oportunidad de desarrollar uno de los modos matemáticos más importante de pensar, la invariancia algebraica.

Metodología y resultados

A partir de tres (3) problemas básicos, como lo son la generación de los números que conforman el triángulo de Pascal, la construcción de conjuntos numéricos que permitan poblar la recta numérica con aproximaciones de algunos números reales y el famoso juego de las Torres de Hanoi, se pretende diseñar, con la ayuda de GeoGebra, estos problemas; con el propósito de encontrar patrones de generación de los números en el Triángulo de Pascal y descubrir propiedades de los lados diagonales del triángulo al recórrelo desde el vértice superior hasta la parte más baja, tales como la suma de los términos de cada lado diagonal, la relación de los lados diagonales con el renglón siguiente, su simetría, entre otros.

ISBN 978-84-945722-3-4

En el caso de los conjuntos numéricos, se pretende diseñar una actividad que permita ilustrar la densidad de los números racionales con la construcción de diferentes conjuntos, dados por extensión, que permiten poblar la recta numérica y así validar propiedades de los principales conjuntos numéricos, como los racionales y los reales.

Por último, con las Torres de Hanoi se pretende diseñar una actividad con GeoGebra para descubrir las secuencias de generación de la cantidad de movimientos mínimos de acuerdo al número de discos que se empleen, de tal manera que cumplan con las reglas establecidas del juego. Con estas secuencias, se buscará formular dicha cantidad de movimientos, tanto recursivamente, como en forma cerrada; usando los diferentes entornos de la herramienta GeoGebra (algebraico, numérico, tabular tipo hoja de cálculo y geométrico).

Como resultados, se espera mostrar la importancia del uso de herramientas computacionales, como GeoGebra, en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas, al aprovechar el guion conceptual, pedagógico y didáctico que está detrás del diseño computacional, en una actividad de aprendizaje para hacer explícitos patrones, propiedades y características, algunas muy propias de la teoría de números, que hoy en día con el uso de las TICs se puede hacer claramente, fortaleciendo el aprendizaje de las matemáticas.

Conclusiones

En el taller se va a mostrar que el uso de las TICs juega un papel fundamental en la Educación Matemática, sobre todo porque permiten a los profesores de matemática, en el proceso de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas, tener otros recursos que favorecen los procesos matemáticos como construcción de razones, argumentos, exploraciones potentes y sobre todo integrar diferentes ambientes o entornos en el desarrollo de este proceso, tales como el ambiente geométrico, algebraico, tabular (tipo hoja de cálculo), simbólico (CAS[29]) y el numérico.

[29] CAS: Computer Algebra System (en español, Sistema Algebraico Computacional).

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Referencias

Harel, G. (2008). What is mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question. In B. Gold & R. Simons (Eds.). *Proof and other dilemmas: Mathematics and philosophy* (pp. 265-290). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Kaput, J., & Hegedus, S. (2003). The effect of SimCalc connected classrooms on student´s algebraic thinking. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J: Zilliox (Eds.) *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 47-54). Honolulu, Hawaii: College of Education, University of Hawaii.

Klein, J. (1968). *Greek mathematical thought and the origin of algebra* (E. Brann, Trans.). Cambridge, MA: MIT Press. (Original work published 1934).

Santos, T. L, M. (2011). La Educación Matemática, resolución de problemas y el empleo de herramientas computacionales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Año 6. Número 8, pp. 35-54. Costa Rica.

Steen, L. A. (Ed.). (1998). *La enseñanza Agradable de las matemáticas.* México: Limusa

ISBN 978-84-945722-3-4